

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УСЕРЕДНЕНОГО ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ У ВИПАДКОВИХ ШАРУВАТИХ СТРУКТУРАХ З УРАХУВАННЯМ СТРИБКІВ ШУКАНОЇ ФУНКЦІЇ НА МІЖФАЗНИХ ГРАНИЦЯХ

*Досліджено процеси дифузії домішкової речовини у двофазній шаруватій смугі випадково неоднорідної структури з урахуванням стрибків функції концентрації та її похідної на границях контакту фаз. Запропоновано нове подання оператора рівняння масоперенесення для цілого тіла. Сформульовано еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння, розв'язок якого побудовано у вигляді інтегрального ряду Неймана. Усереднення отриманого розв'язку здійснено за ансамблем конфігурацій фаз із рівномірною функцією розподілу. Показано, що розрахункова формула для усередненої концентрації за явного врахування її стрибків на міжфазних границях містить додатковий доданок. Встановлено, що на знак цього доданка впливають відношення коефіцієнтів дифузії, концентраційної залежності хімічних потенціалів у різних фазах та їхній взаємозв'язок. Знайдено області значень параметрів задачі, за яких цей доданок є нехтовно малим.*

Широке використання у промисловості та будівництві композитних матеріалів, функціональні властивості яких істотно залежать від дифузійних процесів, вимагає вивчення їх основних закономірностей, зокрема з метою оцінки надійності, оптимальності та довговічності складних інженерних конструкцій [16–18]. Одним з найбільш розповсюджених класів композитних матеріалів є шаруваті композити з основою із металічної матриці (Al, Mg, Ni та ін.) [13, 19]. Використання полі- та біметалів дозволяє істотно скоротити витрати високолегованих сталей, дефіцитних і дорогих кольорових металів, наприклад Cu, Cr, Mo. При цьому для таких середовищ, як правило, є невідомими дані про конкретне просторове розміщення окремих фаз, проте є достатньо інформації про їхні об'ємні частки та основні фізико-хімічні властивості [15, 19].

Для знаходження особливостей досліджуваних явищ переважно використовують методи стохастичного усереднення, тобто обчислення середнього типу середнього значення  $\langle c(\mathbf{r}, t) \rangle$  (через  $\langle \cdot \rangle$  позначено усереднення за ансамблем реалізацій випадкових параметрів,  $\mathbf{r}$  – радіус-вектор біжучої точки,  $t$  – час), просторово-часової кореляційної функції  $\langle c(\mathbf{r}, t)c(\mathbf{r}', t') \rangle$  тощо. Тоді якісні особливості окремих реалізацій згладжуються й отримані статистичні характеристики можуть істотно відрізнитися від конкретної реалізації структури тіла. При цьому повна статистика містить всю інформацію про динамічну систему [9, 14, 15].

Для випадків, коли процеси у випадково неоднорідних тілах не є ергодичними або квазіергодичними, розроблено [10] підхід, за якого стохастичне поле концентрації шукають у вигляді ряду Неймана. Таке подання випадкових полів є зручним для усереднення за ансамблем допустимих просторових реалізацій структури тіла [10]. При цьому природно скорочуються доданки, які безпосередньо описують величину стрибка випадкової функції концентрації на границях контакту. У цій роботі запропоновано інше подання випадкового оператора збуреного рівняння дифузії, що дає можливість явно враховувати величину стрибків шуканої функції та її похідної на міжфазних границях.

**1. Постановка задачі.** Нехай домішкові частинки мігрують у шарі товщини  $z_0$ , який складається з підшарів двох типів (фаз). При цьому розміщення підшарів є невідомим. Одну з можливих реалізацій структури багатопшарового тіла, в якому дифундує домішкова речовина, подано на рис. 1.

Вважаємо, що дифузійні властивості фаз (області  $\Omega_0$  і  $\Omega_1$ ), з яких складене тіло, можуть суттєво відрізнятися. Приймаємо, що фази в тілі розташовані за рівномірним розподілом і об'ємна частка  $v_1$  області  $\Omega_1$  є набагато меншою від об'ємної частки  $v_0$  області  $\Omega_0$ , тобто  $v_1 \ll v_0$ .

Концентрація домішкових частинок  $\langle I_2(\xi, \tau) \rangle$  в області  $\Omega_j$  визначається з рівняння дифузії

$$\rho_j \frac{\partial c_j(z, t)}{\partial t} = d_j \frac{\partial^2 c_j(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in \Omega_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} \Omega_{ij}, \quad t \in [0, \tau], \quad \tau < \infty, \quad j = 0, 1, \quad (1)$$

де  $\rho_j$  – густина області  $\Omega_j$ ;  $d_j$  – кінетичний коефіцієнт переносу в цій області,  $n_j$  – кількість підшарів  $j$ -ї фази,  $\Omega_{ij}$  –  $i$ -та однозв'язна область  $j$ -ї фази,  $i = 1, \dots, n_j$ ,  $j = 0, 1$ .

Приймаємо нульові початкові умови, а також, що на границі тіла  $z = 0$  підтримується постійне значення концентрації домішкової речовини  $c_*$ , а на нижній границі  $z = z_0$  концентрація дорівнює нулеві:

$$\begin{aligned} c_0(z, t)|_{t=0} = c_1(z, t)|_{t=0} = 0, \quad c_0(z, t)|_{z=0} = c_* \equiv \text{const}, \\ c_0(z, t)|_{z=z_0} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

На границях поділу областей  $z = z_\ell$  і  $z = z_\ell + h_{\ell 1}$  виконуються умови рівності хімічних потенціалів  $\mu(z, t)$  і дифузійних потоків частинок домішкової речовини:

$$\begin{aligned} \mu(z, t)|_{z=z_\ell-0} = \mu(z, t)|_{z=z_\ell+0}, \\ \mu(z, t)|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}-0} = \mu(z, t)|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}+0}, \\ \rho_0 d_0 \left. \frac{\partial \mu}{\partial z} \right|_{z=z_\ell-0} = \rho_1 d_1 \left. \frac{\partial \mu}{\partial z} \right|_{z=z_\ell+0}, \\ \rho_1 d_1 \left. \frac{\partial \mu}{\partial z} \right|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}-0} = \rho_0 d_0 \left. \frac{\partial \mu}{\partial z} \right|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}+0}, \end{aligned}$$

де  $z_\ell$  – випадкова координата верхньої межі області  $\Omega_{i1}$  (рис. 1),  $h_{\ell 1}$  – товщина підшару  $\Omega_{i1}$ .

Зв'язок між хімічними потенціалами і концентраціями має логарифмічний характер [1, 6]:

$$\mu(z, t) = \mu^0 + A \ln \gamma(z)c(z, t), \quad (3)$$

де  $\mu^0$  – хімічний потенціал для чистої речовини у стані, заданому значенням абсолютної температури  $T$  і тиску  $P$ ;  $\gamma(z) = \begin{cases} \gamma_0, & z \in \Omega_0, \\ \gamma_1, & z \in \Omega_1, \end{cases}$  – коефіцієнт активності;  $A = RT / M$ ;  $R$  – універсальна газова стала;  $M$  – атомна маса.

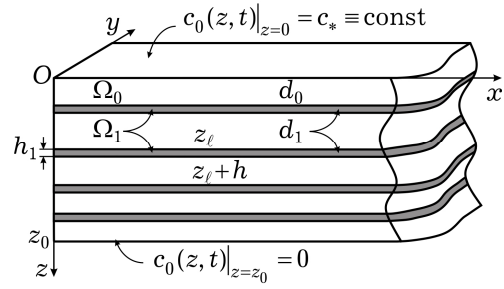


Рис. 1

Якщо лінеаризувати співвідношення (3), то одержимо лінійну залежність хімічного потенціалу від концентрації:

$$\mu(z, t) = \mu^0 - A(1 - \gamma(z)c(z, t)). \quad (4)$$

Тоді отримуємо умови неідеального контакту для концентрації [3]:

$$\begin{aligned} k_0 c_0(z, t) \Big|_{z=z_\ell-0} &= k_1 c_1(z, t) \Big|_{z=z_\ell+0}, \\ \rho_0 d_0 \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell-0} &= \rho_1 d_1 \frac{\partial c_1}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell+0}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} k_1 c_1 \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}-0} &= k_0 c_0 \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}+0}, \\ \rho_1 d_1 \frac{\partial c_1}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}-0} &= \rho_0 d_0 \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}+0}, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $k_j$  – коефіцієнт концентраційної залежності хімічного потенціалу в  $j$ -й фазі [10].

Позначивши через  $[c(z, t)]_{z=z_\ell}$  стрибок функції  $c(z, t)$  у точці  $z_\ell$ , умови контакту (5), (6) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} [c(z, t)]_{z=z_\ell} &= c_0(z, t) \Big|_{z=z_\ell-0} - c_1(z, t) \Big|_{z=z_\ell+0} = \\ &= \left(1 - \frac{k_0}{k_1}\right) c_0(z, t) \Big|_{z=z_\ell-0}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial c(z, t)}{\partial z}\right]_{z=z_\ell} &= \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell-0} - \frac{\partial c_1}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell+0} = \\ &= \left(1 - \frac{\rho_0 d_0}{\rho_1 d_1}\right) \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell-0}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [c(z, t)]_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} &= c_1 \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}-0} - c_0 \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}+0} = \\ &= \left(\frac{k_0}{k_1} - 1\right) c_0(z, t) \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}+0}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial c(z, t)}{\partial z}\right]_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} &= \frac{\partial c_1}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}-0} - \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}+0} = \\ &= \left(\frac{\rho_0 d_0}{\rho_1 d_1} - 1\right) \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}+0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Зазначимо, що при такій постановці задачі випадковими величинами є границі контакту  $z = z_\ell$  та  $z = z_\ell + h_{\ell 1}$ , тобто межі областей  $\Omega_0$  та  $\Omega_1$ , які є внутрішніми для тіла. Це, в свою чергу, приводить до стохастичності поля концентрації домішкової речовини, яка мігрує у тілі.

**2. Рівняння масоперенесення для усього тіла.** Розв'язок сформульованої контактної-крайової задачі (1)–(4) будемо шукати у вигляді інтегрального ряду Неймана [3, 7]. Для цього введемо випадкову функцію просторової координати  $c(z, t)$ , яка описує концентрацію в усьому тілі і дорівнює розв'язку  $c_j(z, t)$  рівняння (1), якщо  $z \in \Omega_j$ ,  $j = 0, 1$ , а також задовольняє контактні умови (7), (8), якщо  $z = z_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, n_\ell$ , і умови (9), (10), якщо  $z = z_\ell + h_{\ell 1}$ ,  $\ell = 1, \dots, n_\ell$ , тобто

$$c(z, t) = \begin{cases} c_j(z, t), & z \in \Omega_j, \quad j = 0, 1, \\ \tilde{c}_{z_\ell}(t), & z = z_\ell, \quad \ell = 1, \dots, n_\ell, \\ \tilde{c}_{z_\ell+h_{\ell 1}}(t), & z = z_\ell + h_{\ell 1}, \quad \ell = 1, \dots, n_\ell, \end{cases} \quad (11)$$

де  $\tilde{c}_{z_\ell}(t) = c_0(z, t)|_{z=z_\ell-0}$ , якщо  $\frac{\partial c(z, t)}{\partial z}|_{z=z_\ell} = \frac{\partial c_0(z, t)}{\partial z}|_{z=z_\ell-0}$  і  $\tilde{c}_{z_\ell+h_{\ell 1}}(t) = c_0(z, t)|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}+0}$ , якщо  $\frac{\partial c(z, t)}{\partial z}|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} = \frac{\partial c_0(z, t)}{\partial z}|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}+0}$ .

Підставивши випадкову концентрацію домішок  $c(z, t)$  у вигляді (11) у рівняння балансу маси (за нехтування конвективної складової)

$$\rho(z) \frac{\partial c(z, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}(z, t),$$

де  $\mathbf{J}(z, t) = d(z)\nabla c(z, t)$  – потік маси домішкової речовини, отримаємо

$$\begin{aligned} \rho(z) \frac{\partial c(z, t)}{\partial t} = & \left\{ d(z) \frac{\partial^2 c(z, t)}{\partial z^2} \right\}_{z \in \Omega_{ij}} + \\ & + 2 \sum_{\ell=1}^{n_1} \left( [d(z)]_{z=z_\ell} \left[ \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} \right]_{z=z_\ell} \delta(z - z_\ell) + \right. \\ & \left. + [d(z)]_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} \left[ \frac{\partial c(z, t)}{\partial z} \right]_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} \delta(z - (z_\ell + h_{\ell 1})) \right) + \\ & + \sum_{\ell=1}^{n_1} \left( [d(z)]_{z=z_\ell} [c(z, t)]_{z=z_\ell} \delta'(z - z_\ell) + \right. \\ & \left. + [d(z)]_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} [c(z, t)]_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} \delta'(z - (z_\ell + h_{\ell 1})) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Тут  $\{\cdot\}_{z \in \Omega_{ij}}$  – області неперервності функції,  $\delta(z)$  – дельта-функція Дірака,  $\delta'(z)$  – похідна від дельта-функції Дірака, коефіцієнти рівняння  $\rho(z)$  і  $d(z)$  задані у відкритих областях  $\Omega_0$  і  $\Omega_1$ :

$$\rho(z) = \sum_{j,i} \{\rho_j\}_{z \in \Omega_{ij}}, \quad d(z) = \sum_{j,i} \{d_j\}_{z \in \Omega_{ij}}.$$

На границях контакту  $z = z_\ell$  і  $z = z_\ell + h_{\ell 1}$  відбуваються стрибки цих коефіцієнтів  $[ \rho(z) ]_{z=z_\ell} = -[ \rho(z) ]_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} = \rho_1 - \rho_0$ ,  $[ d(z) ]_{z=z_\ell} = -[ d(z) ]_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} = d_1 - d_0$ ,  $\ell = 1, \dots, n_1$ . У рівнянні (12) враховано, що  $c(z, t)$  є неперервною функцією за часовою змінною, і області неперервності коефіцієнта  $d(z)$  та концентрації  $c(z, t)$ , а відповідно і її другої похідної співпадають.

**3. Інтегро-диференціальне рівняння, еквівалентне вихідній крайовій задачі.** Введемо в розгляд випадкову функцію просторової координати («функцію структури») [7], яка задовольняє умову суцільності тіла:

$$\eta_{ij}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_{ij}, \\ 0, & z \notin \Omega_{ij}, \end{cases} \quad \sum_{j,i} \eta_{ij}(z) = 1. \quad (13)$$

Подамо через функцію  $\eta_{ij}(z)$  (13) коефіцієнти  $\rho(z)$ ,  $d(z)$  рівняння (12):

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^{n_j} \rho_j \eta_{ij}(z), \quad d(z) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^{n_j} d_j \eta_{ij}(z) \quad (14)$$

і підставимо представлення (14) у рівняння (12). Тоді отримаємо рівняння дифузії в операторному вигляді

$$L(z, t)c(z, t) = 0, \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} L(z, t) \equiv & \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^{n_j} \rho_j \eta_{ij}(z) \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=0}^1 \sum_{i=1}^{n_j} d_j \eta_{ij}(z) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} - 2(d_0 - d_1) \times \\ & \times \sum_{\ell=1}^{n_1} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial z} \right]_{z=z_\ell} \delta(z - z_\ell) - \left[ \frac{\partial}{\partial z} \right]_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} \delta(z - (z_\ell + h_{\ell 1})) \right) - \\ & - (d_0 - d_1) \sum_{\ell=1}^{n_1} \left( \left[ \mathbf{I} \right]_{z=z_\ell} \delta'(z - z_\ell) - \left[ \mathbf{I} \right]_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} \delta'(z - (z_\ell + h_{\ell 1})) \right). \end{aligned}$$

У рівнянні (15) додамо і віднімемо детермінований оператор дифузії  $L_0(z, t) = \rho_0 \partial / \partial t - d_0 \partial^2 / \partial z^2$ , коефіцієнти якого є характеристиками матеріалу фази  $\Omega_0$ . Отже, маємо

$$L_0(z, t)c(z, t) = L_s(z, t)c(z, t), \quad (16)$$

де  $L_s(z, t) = L_0(z, t) - L(z, t)$ , звідки

$$\begin{aligned} L_s(z, t) = & (\rho_0 - \rho_1) \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z) \frac{\partial}{\partial t} + (d_0 - d_1) \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \\ & + 2(d_0 - d_1) \sum_{\ell=1}^{n_1} \left( \left( 1 - \frac{\rho_0 d_0}{\rho_1 d_1} \right) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell} \delta(z - z_\ell) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\rho_0 d_0}{\rho_1 d_1} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} \delta(z - (z_\ell + h_{\ell 1})) \right) - \\ & - (d_0 - d_1) \sum_{\ell=1}^{n_1} \left( \left( 1 - \frac{k_0}{k_1} \right) \Big|_{z=z_\ell} \delta'(z - z_\ell) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{k_0}{k_1} - 1 \right) \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} \delta'(z - (z_\ell + h_{\ell 1})) \right). \end{aligned}$$

Вважаємо праву частину рівняння (16) джерелом. Тоді розв'язок крайової задачі (2), (16) можна подати у вигляді

$$c(z, t) = c_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z', t') c(z', t') dz' dt', \quad (17)$$

де  $c_0(z, t)$  – розв'язок однорідного рівняння з умовами (2), тобто [5]

$$c_0(z, t) = c_* \left( 1 - \frac{z}{z_0} \right) - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_* e^{-d_0 y_n^2 t / \rho_0} \frac{\sin(y_n z)}{y_n}. \quad (18)$$

Тут  $y_n = n\pi / z_0$ ,  $G(z, z', t, t')$  – функція Гріна задачі (2), (16) (див. [8]):

$$G(z, z', t, t') = \frac{2\theta(t - t')}{z_0 \rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-d_0 y_n^2 (t - t') / \rho_0} \sin(y_n z) \sin(y_n z'). \quad (19)$$

Таким чином, побудовано інтегро-диференціальне рівняння (17) з випадковим ядром. Це рівняння еквівалентне вихідній контактній-крайовій задачі і є рівнянням Вольтерра II-го роду за часовою змінною і рівнянням Гаммерштейна за просторовою змінною. Його розв'язок шукаємо у вигляді ряду Неймана [12] ітеруванням співвідношення (16):

$$\begin{aligned}
c(z, t) = & c_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' + \\
& + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z', t') \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G(z', z'', t', t'') \times \\
& \times L_s(z'', t'') c_0(z'', t'') dz'' dt'' dz' dt' + \\
& + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z', t') \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G(z', z'', t', t'') L_s(z'', t'') \times \\
& \times \int_0^{t''} \int_0^{z_0} G(z'', z''', t'', t''') L_s(z''', t''') \times \\
& \times c_0(z''', t''') dz''' dt''' dz'' dt'' dz' dt' + \dots
\end{aligned} \tag{20}$$

#### 4. Усереднення поля концентрації за ансамблем конфігурацій фаз.

Для знаходження середнього поля концентрації домішкової речовини обмежимося першими двома членами ряду (20):

$$\begin{aligned}
c(z, t) \approx & c_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \sum_{i=1}^{n_1} \left[ (\rho_0 - \rho_1) \frac{\partial c_0(z', t')}{\partial t'} + \right. \\
& + (d_0 - d_1) \frac{\partial^2 c_0(z', t')}{\partial z'^2} \left. \right] \eta_{i1}(z') + \\
& + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \sum_{i=1}^{n_1} \left[ 2(d_0 - d_1) \sum_{\ell=1}^{n_1} \left( \left( 1 - \frac{\rho_0 d_0}{\rho_1 d_1} \right) \frac{\partial c_0(z', t')}{\partial z'} \Big|_{z'=z'_\ell} \times \right. \right. \\
& \times \delta(z' - z'_\ell) - \left. \left. \left( \frac{\rho_0 d_0}{\rho_1 d_1} - 1 \right) \frac{\partial c_0(z', t')}{\partial z'} \Big|_{z=z'_\ell + h_{\ell 1}} \delta(z' - (z'_\ell + h_{\ell 1})) \right) \right. \\
& + (d_0 - d_1) \sum_{\ell=1}^{n_1} \left( \left( 1 - \frac{k_0}{k_1} \right) c_0(z', t') \Big|_{z'=z'_\ell} \delta'(z' - z'_\ell) - \right. \\
& \left. \left. - \left( \frac{k_0}{k_1} - 1 \right) c_0(z', t') \Big|_{z'=z'_\ell + h_{\ell 1}} \delta'(z' - (z'_\ell + h_{\ell 1})) \right) \right] dz' dt'. \tag{21}
\end{aligned}$$

Усереднюємо вираз (21) за ансамблем конфігурацій фаз з рівномірною функцією розподілу [2] у тілі. Оскільки  $c_0(z, t)$  є детермінованою функцією, то  $\langle c_0(z, t) \rangle_{\text{conf}} = c_0(z, t)$ . Усереднимо другий доданок виразу (21). Врахуємо, що

$$\eta_{i1}(z') = \begin{cases} 1, & z' \in [z'_i, z'_i + h_{i1}] \\ 0, & z' \notin [z'_i, z'_i + h_{i1}] \end{cases} = \begin{cases} 1, & z' - z'_i \in [0, h_{i1}] \\ 0, & z' - z'_i \notin [0, h_{i1}] \end{cases} = \eta_{i1}(z' - z'_i),$$

і в підінтегральному виразі (21) від випадкових величин  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, n_1$ , залежить лише функція  $\eta_{i1}(z')$ , а також нема інших членів з індексом  $i$ . Тоді всі множники та знак суми можна винести за знак середнього:

$$\begin{aligned}
\langle I \rangle_{\text{conf}} = & \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \left[ (\rho_0 - \rho_1) \frac{\partial c_0(z', t')}{\partial t'} + (d_0 - d_1) \frac{\partial^2 c_0(z', t')}{\partial z'^2} \right] \times \\
& \times \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n_1} \int \eta_{i1}(z') dz_\ell dz' dt' + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \sum_{i=1}^{n_1} \left[ 2(d_0 - d_1) \times \right. \\
& \times \sum_{\ell=1}^{n_1} \left( \left( 1 - \frac{\rho_0 d_0}{\rho_1 d_1} \right) \frac{\partial c_0(z', t')}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell} - \frac{1}{V} \sum_{\ell=1}^{n_1} \int \delta(z - z_\ell) dz_\ell - \right. \\
& \left. \left. - \left( \frac{\rho_0 d_0}{\rho_1 d_1} - 1 \right) \frac{\partial c_0(z', t')}{\partial z} \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} - \frac{1}{V} \sum_{\ell=1}^{n_1} \int \delta(z - (z_\ell + h_{\ell 1})) dz_\ell \right) + \right. \\
& + (d_0 - d_1) \sum_{\ell=1}^{n_1} \left( \left( 1 - \frac{k_0}{k_1} \right) c_0(z', t') \Big|_{z=z_\ell} - \frac{1}{V} \sum_{\ell=1}^{n_1} \int \delta'(z - z_\ell) dz_\ell - \right. \\
& \left. \left. - \left( \frac{k_0}{k_1} - 1 \right) c_0(z', t') \Big|_{z=z_\ell+h_{\ell 1}} - \frac{1}{V} \sum_{\ell=1}^{n_1} \int \delta'(z - (z_\ell + \right. \right. \\
& \left. \left. + h_{\ell 1})) dz_\ell \right) \right] dz' dt'. \tag{22}
\end{aligned}$$

Надалі приймаємо  $h_{i1} = h \quad \forall i = 1, \dots, n_1$ , де  $h$  – характерна (середня) товщина прошарків.

Зазначимо, що усереднення першого доданка (22) наведено у роботі [11]. Для того щоб знайти усереднення інших доданків (22), візьмемо інтеграли від дельта-функцій та їхніх похідних. Враховуючи властивості інтегрування функцій  $\delta(z - z_\ell)$  та  $\delta'(z - z_i)$ , запишемо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V} \sum_{\ell=1}^{n_1} \int \delta(z - z_\ell) dz_\ell &= \frac{1}{V} \sum_{\ell=1}^{n_1} \int \delta(z - (z_\ell + h_{\ell 1})) dz_\ell = \frac{v_1}{h}, \\
\frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n_1} \int \delta'(z - z_\ell) dz_\ell &= \frac{1}{V} \sum_{\ell=1}^{n_1} \int \delta'(z - (z_\ell + h_{\ell 1})) dz_\ell = -\frac{v_1}{h}.
\end{aligned}$$

Як наслідок, після усереднення виразу (22) для поля концентрації домішкових частинок отримаємо

$$\begin{aligned}
\langle c(z, t) \rangle_{\text{conf}} = & c_0(z, t) + \int_0^t \left[ \int_0^h G(z, z', t, t') \left[ (\rho_0 - \rho_1) \frac{\partial c_0(z', t')}{\partial t'} - \right. \right. \\
& \left. \left. - (d_0 - d_1) \frac{\partial^2 c_0(z', t')}{\partial z'^2} \right] \frac{v_1 z'}{h} dz' + \int_h^{z_0-h} G(z, z', t, t') \left[ (\rho_0 - \rho_1) \frac{\partial c_0(z', t')}{\partial t'} - \right. \right. \\
& \left. \left. - (d_0 - d_1) \frac{\partial^2 c_0(z', t')}{\partial z'^2} \right] v_1 dz' \right] dt' + \frac{v_1}{h} \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \sum_{i=1}^{n_1} \left[ 2(d_0 - d_1) \times \right. \\
& \times \left( 1 - \frac{\rho_0 d_0}{\rho_1 d_1} \right) \sum_{\ell=1}^{n_1} \left( \frac{\partial c_0(z', t')}{\partial z} \Big|_{z'=z'_\ell} + \frac{\partial c_0(z', t')}{\partial z} \Big|_{z'=z'_\ell+h_{\ell 1}} \right) + \\
& \left. + (d_0 - d_1) \left( 1 - \frac{k_0}{k_1} \right) \sum_{\ell=1}^{n_1} (c_0(z', t')|_{z'=z'_\ell} + c_0(z', t')|_{z'=z'_\ell+h_{\ell 1}}) \right] dz' dt'. \tag{23}
\end{aligned}$$

Таким чином, отримано формулу для знаходження усередненого за ансамблем конфігурацій фаз поля концентрації домішкової речовини у випадково неоднорідній багатошаровій смузї за рівномірного розподілу фаз у тілі та явного врахування стрибків функції та її похідної на границях контакту. Підставляючи у співвідношення (23) вирази для концентрації домішки в однорідному шарі (18) і функції Гріна (19), отримаємо розрахункову формулу для усередненого поля концентрації:

$$\begin{aligned} \frac{\langle c(z, t) \rangle}{c_*} \approx & 1 - \frac{z}{z_0} - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n} e^{-d_0 y_n^2 t / \rho_0} \sin(y_n z) + \frac{4v_1}{z_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sin(y_n z) \times \right. \\ & \times e^{-d_0 y_n^2 t / \rho_0} \left[ \frac{d_0 R_n t}{8\rho_0 y_n} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} y_m \left( \frac{d_1}{d_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) A_e \right] \right] + I_2(z, t), \end{aligned} \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} I_2(z, t) = & \frac{4v_1}{hz_0^2 \rho_0} K_d \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sin(y_m z) (A_m + A_r) - \right. \\ & \left. - \frac{2\rho_0}{d_0} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_e \sin(y_m z) B_{nm} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Тут

$$\begin{aligned} y_n = \frac{n\pi}{z_0}, \quad y_m = \frac{m\pi}{z_0}, \quad K_d = 2 - \frac{\rho_0 d_0}{\rho_1 d_1} - \frac{k_0}{k_1}, \\ R_n = 1 - 4h + 2h^2 y_n^2 + 2(1 - 4hy_n) \sin(2y_n h) - \cos(2y_n h), \\ A_{mn} = \frac{2 \sin(hy_n) \sin(hy_m)}{h} + \frac{\sin(h(y_n - y_m))(2(y_n - y_m)^2 - 1)}{y_n - y_m} + \\ + \frac{\sin(h(y_n + y_m))(1 - 2(y_n + y_m)^2)}{y_n + y_m}, \\ A_m = \rho_0 (1 - e^{-d_0 y_m^2 t / \rho_0}) \left( \frac{1}{y_m} (1 - \cos(y_m(z_0 - h)) - \cos(y_m h) + \right. \\ \left. + \cos(y_m z_0)) - \frac{1}{2} \frac{\sin(y_m(z_0 - h)) + \sin(y_m h)}{d_0 y_m^2} \right), \\ A_e = \frac{e^{-d_0 y_m^2 t / \rho_0} - e^{-d_0 y_n^2 t / \rho_0}}{y_n^2 - y_m^2}, \\ A_r = e^{-d_0 y_m^2 t / \rho_0} (\cos(2y_m z_0) - \cos(2y_m h) - \cos(2y_m(z_0 - h)) + 1) \frac{1}{2y_m}, \\ B_{nm} = \frac{-\cos((y_n - y_m)(z_0 - h))}{2(y_n - y_m)} + \frac{\cos((y_n + y_m)(z_0 - h))}{2(y_n + y_m)} + \frac{y_n}{y_n^2 - y_m^2} + \\ + \sin(y_m(z_0 - h)) \cos(y_n(z_0 - h)) - \\ - \frac{\cos((y_n - y_m)z_0)}{2(y_n - y_m)} - \frac{\cos((y_n + y_m)z_0)}{2(y_n + y_m)} + \\ + \frac{\cos((y_n - y_m)h)}{2(y_n - y_m)} - \frac{\cos((y_n - y_m)h)}{2(y_n + y_m)} + \sin(y_m h) \cos(y_n h). \end{aligned}$$



Формула (24) відрізняється від аналогічної розрахункової формули задачі [11] з іншим поданням оператора  $L_s$  наявністю доданка  $I_2$ . Цей доданок пропорційний коефіцієнту  $K_d$ , який містить відношення коефіцієнтів дифузії і концентраційної залежності хімічного потенціалу.

Коефіцієнт  $K_d$  може бути додатним або від'ємним залежно від відповідно збільшення або зменшення усередненої концентрації. Причому коефіцієнти дифузії можуть відрізнитися на порядки, а коефіцієнти концентраційної залежності хімічного потенціалу у різних фазах – у рази. Тоді для значень коефіцієнтів дифузії, значно менших у включеннях, ніж у матриці, відношення  $\rho_0 d_0 / \rho_1 d_1$  набуває великих значень, а відношення  $k_0 / k_1$  стає нехтовно малим незалежно від значень  $k_j$ . У випадку, коли коефіцієнт  $k_1$  у включеннях є значно більшим, ніж у матриці, кількісне співвідношення  $\rho_0 d_0 / \rho_1 d_1$  може стати нехтовно малим.

На рис. 2 наведено 3D-поверхню  $K_d$  у просторі  $O \frac{k_0}{k_1} \frac{\rho_0 d_0}{\rho_1 d_1} K_d$ . Тут по осі абсцис відкладено відношення коефіцієнтів  $k_j$ , по осі ординат – відношення коефіцієнтів дифузії, а аплікатою є коефіцієнт  $K_d$  як функція від відношення коефіцієнтів дифузії та коефіцієнтів концентраційної залежності хімічних потенціалів у матриці та включеннях. Зміна знаку  $K_d$  відбувається при перетині поверхні площиною  $K_d(k_0/k_1, \rho_0 d_0/\rho_1 d_1) = 0$  (рис. 2). Щоб отримати залежність від  $k_0/k_1$ , зробимо перерізи поверхні  $K_d$  паралельними площинами для  $\rho_0 d_0/\rho_1 d_1 = \text{const}$ . На рис. 3 наведено проекцію таких перерізів поверхні  $K_d$  на площину  $O \frac{k_0}{k_1} K_d$ , де по осі абсцис відкладено відношення коефіцієнтів  $k_0 / k_1$ , а прямі пораховано для значень  $\rho_0 d_0 / \rho_1 d_1 = 0.01, 0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10$  (лінії 1–7).

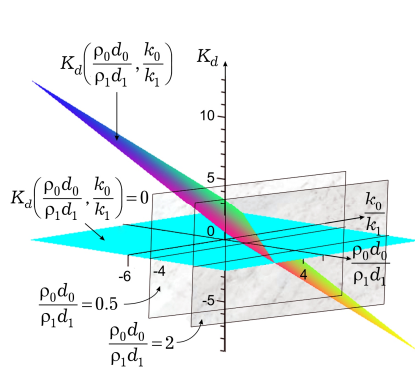


Рис. 2

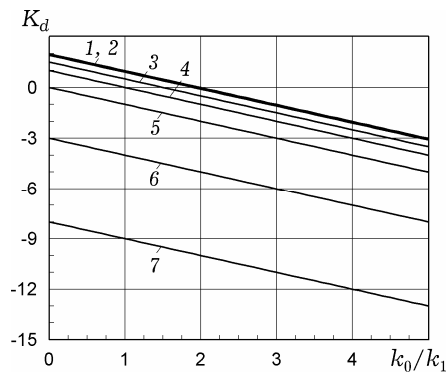


Рис. 3

Чим більші значення приймають відношення коефіцієнтів дифузії або відношення коефіцієнтів  $k_j$ , тим менших значень набуває коефіцієнт  $K_d$ . Причому  $K_d$  не міняє знак, якщо  $\rho_0 d_0 / \rho_1 d_1 > 2$ . В інших випадках зміна знаку цього коефіцієнта відбувається при значеннях  $\rho_0 d_0 / \rho_1 d_1 < 2$  разом з відповідним зростанням значень  $k_0 / k_1$ . Тобто, чим менше відношення коефіцієнтів дифузії, тим при більших значеннях відношень коефіцієнтів  $k_j$  відбувається зміна знаку  $K_d$ . Хоча відношення коефіцієнтів  $k_0 / k_1$  і

$\rho_0 d_0 / \rho_1 d_1$  є взаємно незалежними, але на зміну знаку  $K_d$  вони впливають у комплексі.

**5. Числовий аналіз усередненого поля концентрації.** Обчислення здійснено у безрозмірних змінних [5]  $\tau = d_0 t / z_0$ ,  $\xi = z / z_0$ . На рис. 4 проілюстровано характерні розподіли усередненого за ансамблем конфігурацій фаз поля концентрації домішкової речовини, обчисленого за формулою (24), у різні моменти часу. За базові вибрано такі значення:  $d_1/d_0 = 0.01$ ;  $\rho_1/\rho_0 = 1.3$ ;  $h = h/z_0 = 0.1$ ;  $v_1 = 0.1$ ;  $k_0 = 1$ ;  $k_1 = 2$ . На рис. 4 наведено розподіли усередненої концентрації у моменти безрозмірного часу  $\tau = 0.01, 0.025, 0.05, 0.1, 0.5$  (криві 1–5) для об'ємних часток включень  $v_1 = 0.1$  (рис. 4а) і  $v_1 = 0.2$  (рис. 4б) за явного врахування стрибків шуканої функції і її похідної на границях контакту (суцільні лінії) та за подання оператора  $L_s(z, t)$  [11] (штрихові лінії).

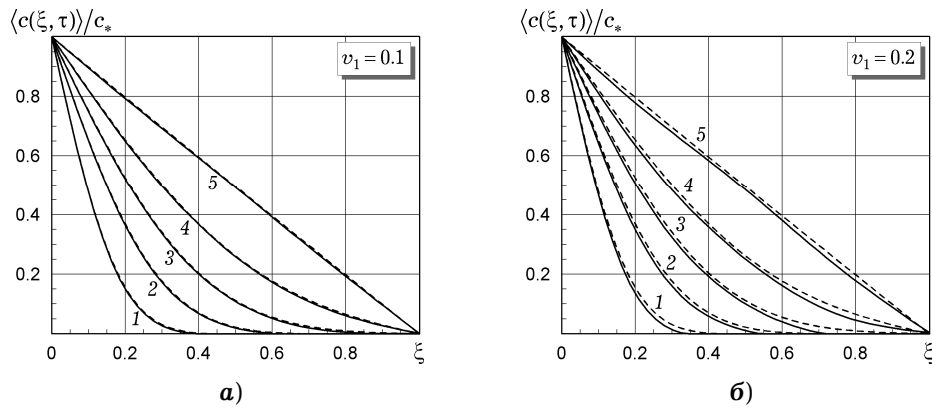


Рис. 4

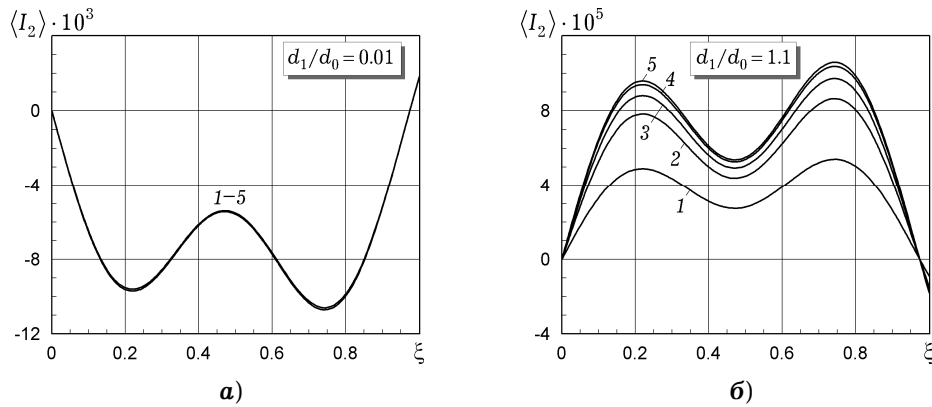


Рис. 5

Зазначимо, що поведінка функції  $\langle c(\xi, \tau) \rangle / c_*$  є однаковою для різних представлень оператора  $L_s(z, t)$ , проте числові значення можуть істотно відрізнятися. Найбільша відмінність між випадками з явним урахуванням стрибків шуканої функції та її похідної на границях контакту та без цього врахування спостерігається, коли відношення коефіцієнтів переносу у включенні та матриці є меншим від одиниці:  $d_1/d_0 < 1$ , і для середніх часів. Натомість, для випадків  $d_1/d_0 > 1$  відмінність між значеннями концентрації є достатньо малою і спостерігається лише у 3-4 значущій цифрі.

На рис. 5, 6 наведено розподіли функції  $\langle I_2(\xi, \tau) \rangle$ , яка є різницею між розв'язком (25) і розв'язком, отриманим раніше [4, 11]. На рис. 5 проілюстровано поведінку функції  $\langle I_2(\xi, \tau) \rangle$  для значень коефіцієнта концентраційної залежності хімічного потенціалу  $k_1 = 1, 2, 5, 10, 25$  (криві 1–5) при  $d_1/d_0 = 0.01$  (рис. 5а) і при  $d_1/d_0 = 1.1$  (рис. 5б). На рис. 6 зображено вплив об'ємної частки включень  $v_1 = 0.001, 0.01, 0.05, 0.1, 0.2$  (криві 1–5) на функцію  $\langle I_2(\xi, \tau) \rangle$  для  $d_1/d_0 = 0.01$  (рис. 6а) і  $d_1/d_0 = 10$  (рис. 6б).

Зазначимо, що функція  $\langle I_2(\xi, \tau) \rangle$  має три екстремуми: два локальні максимуми і один локальний мінімум для додатних значень  $\langle I_2 \rangle$ . Для  $\langle I_2 \rangle < 0$  наявні два локальні мінімуми і один локальний максимум. Крім цього, для всіх випадків, які досліджуємо, величина другого локального максимуму або мінімуму завжди є більшою від першого.

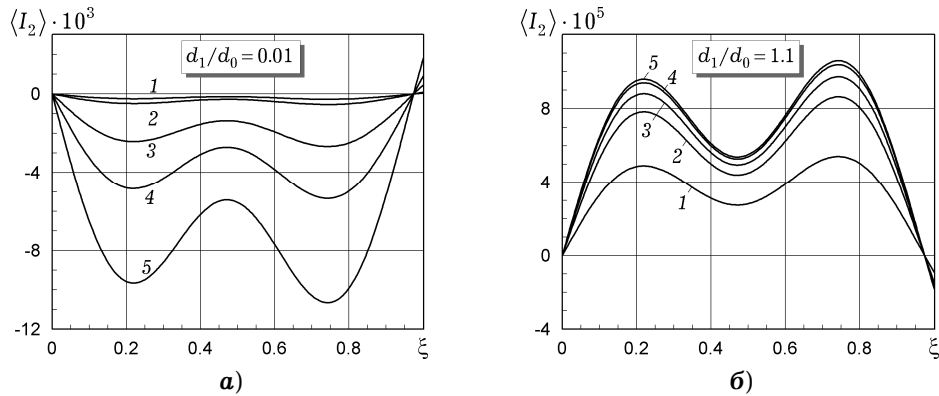


Рис. 6

Для відношення коефіцієнтів дифузії  $d_1/d_0$ , меншого від одиниці, зміна коефіцієнта  $k_1$  практично не впливає на величину  $\langle I_2 \rangle$  (рис. 5а). У випадку більших коефіцієнтів дифузії у включеннях зростання коефіцієнта  $k_1$  веде до зростання функції  $\langle I_2(\xi, \tau) \rangle$  на всьому проміжку (рис. 5б).

Збільшення відношення коефіцієнтів дифузії приводить до зростання значень функції  $\langle I_2(\xi, \tau) \rangle$  і зміни її знаку, починаючи від  $d_1/d_0 = 1.1$ . Зі зростанням об'ємної частки включень на порядок абсолютні значення доданка усередненого поля концентрації, який виникає за рахунок явного врахування стрибків на міжфазних границях, зростають у рази (рис. 6).

**Висновки.** Для математичного опису процесів дифузії у двофазних випадково неоднорідних шаруватих тілах отримано нове рівняння масоперенесення для усього тіла. Запропоновано нове подання оператора рівняння дифузії для всього тіла, яке явно враховує стрибки функції концентрації та її похідної на границях контакту фаз. Побудовано інтегро-диференціальне рівняння, еквівалентне вихідній контактній-крайовій задачі, яке розв'язано ітеруванням у вигляді інтегрального ряду Неймана. Поле концентрації усереднено за ансамблем конфігурацій фаз з рівномірною функцією розподілу включень. Показано, що розрахункова формула для усередненої концентрації за явного врахування її стрибків на міжфазних границях містить додатковий доданок, який в загальному випадку не змінює поведінку функції  $\langle c(z, t) \rangle_{\text{conf}}$ , проте може істотно вплинути на її значення. Встановлено, що на знак цього доданка впливають відношення коефіцієнтів дифузії, концентраційної залежності хімічних потенціалів у різних фазах

та їхній взаємозв'язок. Числові експерименти виявили три екстремуми у поведінці нового доданка функції усередненої концентрації, причому величина останнього екстремуму є найбільшою. Встановлено області значень параметрів задачі, за яких цей доданок є нехтовно малим.

1. Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – Київ: Наук. думка, 2006. – 272 с.
2. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – Москва: Наука, 1985. – 640 с.
3. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – Москва: Наука, 1975. – 300 с.
4. Литвин В. В., Угрин Д. І., Фітьо А. М. Моделювання процесу формування територіальних громад як задачі розбиття графу // Сх.-Євр. журн. передових технологій. – 2016. – **1**, № 4 (79). – С. 47–52.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 600 с.  
Te same: *Luikov A. V. Analytical heat diffusion theory.* – New York: Acad. Press, 2012. – 702 p.
6. Мюнстер А. Химическая термодинамика. – Москва: Мир, 1974. – 295 с.  
Te same: *Münster A. Chemische Thermodynamik.* – Berlin: Verlag Chemie, 1969. – ix+261 S.
7. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. – Ч. II. Случайные поля. – Москва: Наука, 1978. – 464 с.
8. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 735 с.
9. Хорошун Л. П. Математические модели и методы механики стохастических композитных материалов // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 10. – С. 30–62.  
Te same: *Khoroshun L. P. Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites* // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, No. 10. – P. 1284–1316.
10. Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – Київ: Наук. думка, 2009. – 302 с.
11. Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю., Білуцак Ю. І. Контактно-крайова задача дифузії домішкових частинок у двофазній стохастично неоднорідній шаруватій смугі // Мат. методи та фіз. мат. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 79–90.  
Te same: *Chaplya Ye. Ya., Chernukha O. Yu., Bilushchak Yu. I. Contact initial boundary-value problem of the diffusion of admixture particles in a two-phase stochastically inhomogeneous stratified strip* // *J. Math. Sci.* – 2012. – **183**, No. 1. – P. 83–99.
12. Чернуха О. Ю., Білуцак Ю. І., Чучвара А. Є. Моделювання дифузійних процесів у стохастично неоднорідних шаруватих структурах. – Львів: Растр-7, 2016. – 262 с.
13. Chaudhari G. P., Acoff V. Cold roll bonding of multi-layered bi-metal laminate composites // *Compos. Sci. Technol.* – 2009. – **69**, No. 10. – P. 1667–1675.
14. Davydov M. V. A probabilistic search algorithm for finding suboptimal branchings in mutually exclusive hypothesis graph // *Int. J. Knowledge-based Intell. Eng. Systems.* – 2014. – **18**, No. 4. – P. 247–253.
15. Keller J. B. Flow in random porous media // *Transport in Porous Med.* – 2001. – **43**, No. 3. – P. 395–406.
16. Loimer T., Uchytıl P. Influence of the flow direction on the mass transport of vapors through membranes consisting of several layers // *Exp. Therm. Fluid Sci.* – 2015. – **67**. – P. 2–5.
17. Mikdam A., Makradi A., Ahzi S., Garmestani H., Li D. S., Remond Y. Effective conductivity in isotropic heterogeneous media using a strong-contrast statistical continuum theory // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2009. – **57**, No. 1. – P. 76–86.
18. Ngan A. H. W. Canonical ensemble for static elastic structures with random microstructures // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2009. – **57**, No. 5. – P. 803–811.
19. Yang Y., Wang D., Lin J., Khan D. F., Lin G., Ma J. Evolution of structure and fabrication of Cu/Fe multilayered composites by a repeated diffusion-rolling procedure // *Materials & Design.* – 2015. – **85**. – P. 635–639.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСРЕДНЕННОГО ПОЛЯ  
КОНЦЕНТРАЦИИ В СЛУЧАЙНЫХ СЛОИСТЫХ СТРУКТУРАХ С УЧЕТОМ СКАЧКОВ  
ИСКАМОЙ ФУНКЦИИ НА МЕЖФАЗНЫХ ГРАНИЦАХ**

Исследованы процессы диффузии примесного вещества в двухфазной слоистой полосе случайно неоднородной структуры с учетом скачков функции концентрации и ее производной на границах контакта фаз. Предложено новое представление оператора уравнения массопереноса для всего тела. Сформулировано эквивалентное интегро-дифференциальное уравнение, решение которого построено в виде интегрального ряда Неймана. Усреднение полученного решения выполнено по ансамблю конфигураций фаз с равномерной функцией распределения. Показано, что расчетная формула для усредненной концентрации при явном учете ее скачков на межфазных границах содержит дополнительное слагаемое. Установлено, что на знак этого слагаемого влияют отношения коэффициентов диффузии, концентрационной зависимости химических потенциалов в различных фазах и их взаимосвязь. Определены области значений параметров задачи, при которых это слагаемое является пренебрежимо малым.

**MATHEMATICAL MODELING OF THE AVERAGED CONCENTRATION FIELD  
IN RANDOMLY STRATIFIED STRUCTURES WITH ACCOUNT FOR INTERPHASE  
JUMPS OF THE SOUGHT FUNCTION**

We investigate the processes of admixture diffusion in a two-phase stratified strip of a randomly inhomogeneous structure when taking into account the interphase jump discontinuities of the concentration function along with its derivative. A new representation of the operator for the mass transfer equation in the entire body is proposed. The equivalent integro-differential equation is formulated. Its solution is constructed in the form of the Neumann integral series. The averaging of the obtained solution is performed over the ensemble of phase configurations with the function of uniform distribution. It is shown that the computational formula for the averaged concentration with the explicit account of its jump discontinuities on the interphases contains an additional summand. It is shown that the sign on the mentioned summand relies on ratios of the diffusion coefficients, concentrative dependence of the chemical potentials of different phases and their interrelations. The range spaces of the problem parameters, where the summand is negligible, are determined.

Центр мат. моделювання  
Ин-ту прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
12.01.17