УДК 539.3

Ю. В. Токовий

РОЗВ'ЯЗКИ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ПРОСТОРУ ТА ПІВПРОСТОРУ

Розвинуто методику побудови розв'язків осесиметричних задач теорії пружності та термопружності в напруженнях для простору та півпростору, пружні характеристики яких є довільними функціями координати z. З використанням методу безпосереднього інтегрування та інтегрального перетворення Ганкеля задачі зведено до ключових інтегральних рівнянь, які у випадку півпростору супроводжуються локальною крайовою та інтегральною умовами. Розв'язки отриманих рівнянь знайдено в явному вигляді з використанням методу резольвентного ядра.

Вступ. Розвиток методів дослідження напружено-деформованого стану для необмежених чи напівобмежених тіл (простору, півпростору, шару) насамперед має на меті побудову загальних еталонних розв'язків відповідних задач механіки деформівного твердого тіла, які можуть бути використані при розв'язуванні задач для областей складної геометрії, зокрема, з урахуванням залежності властивостей матеріалу від просторових координат. Крім того, такі розв'язки мають самостійне прикладне значення. Так, задача про визначення напружено-деформованого стану неоднорідного за глибиною півпростору пов'язана з проблемами геомеханіки, що стосуються вивчення статичних розподілів напружень у ґрунтах при локальному навантаженні поверхні [20] або поширення коливних процесів внаслідок сейсмічної активності [9]. Сюди також належать дослідження напружень і деформацій у багатошарових покриттях злітно-посадкових смуг та автомобільних доріг тощо. У циклі з трьох робіт (перша з яких [21]) Бурмістером було розглянуто аналог задачі Бусінеска для дво- та тришарового півпростору. Розв'язок задачі для багатошарового півпростору у загальній постановці було дано Коганом [3]. Розвитком розробленого методу став наближений розв'язок неперервно неоднорідного за глибиною півпростору [2], який моделювався багатошаровим тілом. С. Г. Лехницький [8] запропонував доволі прості розв'язки плоских задач для деяких випадків неперервної неоднорідності пружного півпростору. Зокрема, було показано, що якщо модуль пружності E змінюється пропорційно до глибини (при сталому коефіцієнті Пуассона), то радіальна компонента тензора напружень матиме вигляд $\sigma_r = -2(P_x + 2P_y\theta)\cos\theta/(\pi r)$ (осі декартових координат Ox, Oy розміщені відповідно перпендикулярно і паралельно до границі), P_x, P_y − відповідні складові прикладеної у точці поверхні зовнішньої сили, r, θ − полярні кординати з початком у точці прикладання сили. Таким чином, якщо до границі півпростору прикладена лише нормальна сила $(P_y = 0)$, то розподіл напружень у випадку плоскої задачі для нестисливого ізотропного матеріалу буде таким самим, як і для однорідної півплощини. Для випадку, коли модуль пружності змінюється обернено пропорційно до відстані від границі, було показано, що $\sigma_r = -P_x/(\pi x)$, а сила, прикладена паралельно до границі, не викликає напружень у півплощині. Більш загальні випадки неоднорідності були проаналізовані у роботах [5, 10], де побудовано розв'язки осесиметричних контактних задач для неоднорідного пружного півпростору, модуль пружності якого змінюється за глибиною за степеневим законом. Оскільки для степеневої залежності від глибинної координати модуль пружності на межі півпростору дорівнює нулеві, В. П. Плевако розглянув випадок півпростору з модулем пружності $E(z) = E_0(1+cz)^b$ за нормального

[11] і дотичного [12] навантаження. Тут E_0 − значення модуля пружності на межі півпростору $z = 0$, c, b − дійсні числа. Задачі розв'язано з використанням двох гармонічних потенціальних функцій. Частковий випадок такого подання, коли модуль зсуву змінюється за лінійним законом $G(z) = G_0 + mz$ (G_0 − значення модуля зсуву на межі півпростору, m − дійсне число), проаналізовано Ґібсоном [22] для випадку плоскої задачі, коли поверхня півпростору зазнає тиску, рівномірно розподіленого по смузі певної ширини, а також осесиметричної задачі, коли тиск розподілено у межах круга того самого радіуса. Крім того, було розглянуто інші випадки зміни модуля пружності (модуля зсуву) за глибиною, при яких вдається отримати аналітичний розв'язок $E(z) = E_0 \exp(\lambda z)$ та $E(z) = E_0 \eta (z + \eta)^{-1}$, де λ і η − числові параметри. Огляд досліджень пружної поведінки матеріалів із експоненційною і раціональною залежністю властивостей матеріалу від координат наведено в [30, 31]. Вплив зміни коефіцієнта Пуассона з глибинною координатою на напружений стан півпростору вивчено в [23, 24].

Зауважимо, що беззастережне подання пружних властивостей півпростору у вигляді монотонних функцій від глибини може призвести до невідповідності результатів фізичній моделі механіки деформівного твердого тіла, коли такі функції або безмежно зростають, або є нескінченно малими для віддалених точок. Очевидно, функції, якими моделюють пружні властивості необмежених або напівобмежених тіл, повинні прямувати до сталих, відмінних від нуля значень на безмежності. Тому часто неоднорідний за глибиною півпростір моделюють у вигляді тіла, яке складається з неоднорідного за товщиною шару, ідеально зчепленого з однорідною напівбезмежною основою [13, 15]. У цьому випадку використовують методи, розроблені для аналізу пружної поведінки багатошарових тіл [14, 17].

Велику увагу дослідників спрямовано на вивчення осесиметричних задач теорії пружності для неоднорідного півпростору у контексті контактних задач про тиск штампів циліндричної чи сферичної форми на поверхню півпростору. У роботі [6] побудовано розв'язок осесиметричної задачі теорії пружності для неоднорідного півпростору, що зазнає герцівського тиску на поверхні. Півпростір складається з однорідної основи, до якої ідеально прикріплено систему періодично укладених пружних шарів. Показано, що розв'язок такої задачі якісно співпадає з розв'язком для випадку, коли систему шарів замінено гомогенізованим покриттям. Осесиметричну контактну задачу для неоднорідного півпростору, що складається з однорідної основи та експоненційно неоднорідного шару, при втискуванні жорсткої кулі розв'язано в [7]. Здійснено порівняння з випадком, коли експоненційно неоднорідний шар моделюється пакетом однорідних шарів однакової товщини, та показано, що розглянуті випадки добре корелюють, коли у пакеті є більше 20 шарів. У роботах [25, 26] побудовано аналітично-числові розв'язки осесиметричних задач про тиск нагрітого циліндричного штампа з плоскою основою на поверхні довільно неоднорідного за глибиною півпростору. З використанням методу моделюючих функцій ядра отриманих дуальних інтегральних рівнянь було наближено раціональними виразами, що дає змогу розв'язати вказані рівняння аналітично за допомогою двостороннього асимптотичного методу. У цих же працях наведено широкі огляди літератури стосовно вивчення контактних задач для неоднорідних тіл.

Одним із важливих прикладів неоднорідності матеріалу є його термочутливість, тобто залежність властивостей від нерівномірно розподіленого у тілі температурного поля. У цьому випадку рівняння теплопровідності, а також окремі типи крайових умов для температурного поля є нелінійними внаслідок залежності наявних у них коефіцієнтів від шуканої температури. Таке ускладнення вимагає застосування лінеаризаційних методик і передбачає побудову наближених розв'язків відповідних задач. У роботах [16, 27] з використанням перетворення Кірхгофа побудовано розв'язок задачі термопружності для термочутливого півпростору зі сферичною порожниною при конвективно-променевому теплообміні на її границі. Розв'язок відповідної нестаціонарної нелінійної задачі теплопровідності побудовано за допомогою методу послідовних наближень.

Одним із потужних підходів до побудови аналітичних розв'язків задач теорії пружності та термопружності для довільно неоднорідних тіл є зведення до інтегральних рівнянь [29], який ґрунтується на використанні методу безпосереднього інтегрування, запропонованого В. М. Вігаком [28]. У роботі [32] цей метод застосовано до побудови розв'язку осесиметричної задачі теорії пружності для поперечно неоднорідного шару. Вихідну задачу в напруженнях зведено до розв'язання ключових рівнянь суцільності для визначальних функцій, за які вибрано поперечні та сумарні напруження. З використанням інтегрального перетворення Ганкеля отримані рівняння зведено до інтегрального рівняння другого роду, аналітичний розв'язок якого знайдено за допомогою резольвентного ядра [1]. Нижче цей метод поширено щодо побудови аналітичних розв'язків осесиметричних задач теорії пружності та термопружності для неоднорідних простору та півпростору.

1. Постановка задачі. Розглянемо задачі про визначення напруженого стану пружних півпростору $\Pi_1 = \{0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le z < \infty\}$ та простору $\Pi_0 = \{0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < \infty\}$ внаслідок дії осесиметричного зовнішнього силового навантаження на обмежуючій площині півпростору $z = 0$ і заданого розподілу температури $T(\rho, z)$. У припущенні, що пружні властивості матеріалу для обох розглянутих тіл є довільними неперервно диференційовними функціями координати z, задачі описуються [4] рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial(\rho\sigma_r)}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} = \sigma_\varphi, \qquad \frac{\partial(\rho\sigma_{rz})}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

та рівняннями суцільності в напруженнях [32]

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sigma_\varphi - \nu(z)(\sigma_r + \sigma_z) + \alpha(z)E(z)T\right) + \left(1 + \nu(z)\right)(\sigma_\varphi - \sigma_r) = 0\,,$$

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\sigma_\varphi}{E(z)} - \frac{\nu(z)}{E(z)}(\sigma_r + \sigma_z) + \alpha(z)T\right) - 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1 + \nu(z)}{E(z)}\sigma_{rz}\right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\sigma_z}{E(z)} - \frac{\nu(z)}{E(z)}(\sigma_r + \sigma_\varphi) + \alpha(z)T\right) = 0\,. \tag{2}$$

Тут σ_ℓ, σ_{rz} – компоненти тензора напружень, $\ell = \{r, \varphi, z\}$; $\nu(z)$, $\alpha(z)$ – відповідно коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного розширення, $E(z)$, $G(z)$ – модулі пружності і зсуву, пов'язані формулою $G = E/(2 + 2\nu)$. У випадку задачі для півпростору Π_1 на поверхні $z = 0$ задано нормальні та дотичні зовнішні зусилля

$$\sigma_r(\rho, 0) = -p(\rho), \qquad \sigma_{rz}(\rho, 0) = q(\rho)\,. \tag{3}$$

Ставимо задачі відшукання компонентів тензора напружень, які задовольняють рівняння (1), (2), згасають у безмежно віддалених точках, а у випадку задачі для півпростору Π_1 задовольняють крайові умови (3).

2. Методика розв'язування. У роботі [32] рівняння (2) з використанням (1) зведено до такої системи ключових рівнянь:

$$\Delta\sigma_z = \frac{1}{(1 + \nu(z))\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}(\sigma + \alpha(z)E(z)T)\right), \tag{4}$$

$$\Delta\left(\frac{1-\nu(z)}{E(z)}\sigma + 2\alpha(z)T\right) = \frac{\sigma_z}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{G(z)}\right) \tag{5}$$

для напружень σ_z і сумарних напружень

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z . \tag{6}$$

Тут $\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Застосуємо до рівнянь (1), (4)–(6) перетворення Ганкеля [19]

$$\begin{Bmatrix}\sigma_z(\rho,z)\\ \sigma(\rho,z)\\ T(\rho,z)\end{Bmatrix} = \int_0^\infty s\begin{Bmatrix}\bar\sigma_z(z)\\ \bar\sigma(z)\\ \bar T(z)\end{Bmatrix} J_0(\rho s)\,ds, \qquad \sigma_{rz}(\rho,z) = \int_0^\infty s\bar\sigma_{rz}(\eta,z)J_1(\rho s)\,ds ,$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r(\rho,z)\\ \sigma_\varphi(\rho,z)\end{Bmatrix} = \int_0^\infty s\left(\begin{Bmatrix}\bar\sigma_r(z)\\ \bar\sigma_\varphi(z)\end{Bmatrix}\left(J_0(\rho s) - \frac{J_1(\rho s)}{s\rho}\right) + \begin{Bmatrix}\bar\sigma_\varphi(z)\\ \bar\sigma_r(z)\end{Bmatrix}\frac{J_1(\rho s)}{s\rho}\right)ds , \tag{7}$$

де $J_0(\rho s)$, $J_1(\rho s)$ – функції Бесселя першого роду нульового та першого порядку; s – параметр перетворення, а рискою зверху над величиною позначено відповідні функції у просторі інтегрального перетворення. В результаті отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\bar\Delta\bar\sigma_z = -\frac{s^2}{1+\nu(z)}\left(\bar\sigma + \alpha(z)E(z)\bar T\right), \tag{8}$$

$$\bar\Delta\left(\frac{1-\nu(z)}{E(z)}\bar\sigma + 2\alpha(z)\bar T\right) = \frac{\bar\sigma_z}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{G(z)}\right) \tag{9}$$

та співвідношень

$$\bar\sigma_{rz} = -\frac{1}{s}\frac{d\bar\sigma_z}{dz}, \qquad \bar\sigma_r = \frac{1}{s}\frac{d\bar\sigma_{rz}}{dz}, \qquad \bar\sigma = \bar\sigma_r + \bar\sigma_\varphi + \bar\sigma_z . \tag{10}$$

Тут $\bar\Delta = \frac{d^2}{dz^2} - s^2$. Розв'язавши рівняння (8), (9) відносно визначальних напружень $\bar\sigma_z$ і $\bar\sigma$ у випадку задачі для простору Π_0, решту напружень нескладно знайти зі співвідношень (10). У випадку задачі для півпростору Π_1 методика розв'язання є такою ж, з тією відмінністю, що розв'язки рівнянь (8), (9) повинні задовольняти умови

$$\bar\sigma_z = -\bar p, \qquad \frac{d\bar\sigma_z}{dz} = -s\bar q, \qquad z = 0 ,$$

$$\{\bar p, \bar q\} = \int_0^\infty \rho\{p(\rho)J_0(\rho s), q(\rho)J_1(\rho s)\}\,d\rho , \tag{11}$$

які отримано із застосуванням (7) до (3) і першого рівняння (10).

Нижче наведено методику побудови розв'язків задач (8)–(11) для півпростору та (8)–(10) для простору окремо.

3. Розв'язок задачі теорії пружності та термопружності у випадку неоднорідного півпростору. У випадку задачі для Π_1 розв'язок рівняння (8) з урахуванням першої з умов (11) знаходимо у вигляді

$$\bar\sigma_z(z) = -\bar p e^{-sz} + \frac{s}{2}\int_0^\infty\left(\frac{\bar\sigma(\zeta)}{1+\nu(\zeta)} + 2\alpha(\zeta)G(\zeta)\bar T(\zeta)\right)\times$$

$$\times\left(e^{-s|z-\zeta|} - e^{-s(z+\zeta)}\right)d\zeta . \tag{12}$$

Підставивши у (12) другу з умов (11), отримуємо інтегральну умову

$$s\int_0^\infty\left(\frac{\bar\sigma(z)}{1+\nu(z)}+2\alpha(z)G(z)\bar T(z)\right)e^{-sz}\,dz=-\bar p-\bar q\,,\tag{13}$$

із використанням якої (12) спрощується до вигляду

$$\bar\sigma_z(z)=\frac{\bar q-\bar p}{2}e^{-sz}+\frac{s}{2}\int_0^\infty\left(\frac{\bar\sigma(\zeta)}{1+\nu(\zeta)}+2\alpha(\zeta)G(\zeta)\bar T(\zeta)\right)e^{-s|z-\zeta|}\,d\zeta\,.\tag{14}$$

Підставивши вираз (14) у рівняння (9) і розв'язавши його відносно сумарних напружень $\bar\sigma$, одержимо інтегральне рівняння

$$\bar\sigma(z)=A\frac{E(z)e^{-sz}}{1-\nu(z)}+(\bar p-\bar q)\Phi(z)+\Theta(z)+\int_0^\infty\bar\sigma(\zeta)\mathcal{K}(z,\zeta)\,d\zeta\,.\tag{15}$$

Тут

$$\Phi(z)=\frac{E(z)}{8s(1-\nu(z))}\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{G(\xi)}\right)e^{-s(\xi+|z-\xi|)}\,d\xi\,,$$

$$\mathcal{K}(z,\zeta)=\frac{E(z)}{8(\nu(z)-1)(\nu(\zeta)+1)}\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{G(\xi)}\right)e^{-s(|z-\xi|+|\xi-\zeta|)}\,d\xi\,,$$

$$\Theta(z)=\frac{2E(z)}{\nu(z)-1}\Bigg(\alpha(z)\bar T(z)+$$

$$+\frac{1}{8}\int_0^\infty\alpha(\zeta)G(\zeta)\bar T(\zeta)\int_0^\infty\frac{d^2}{d\xi^2}\left(\frac{1}{G(\xi)}\right)e^{-s(|z-\xi|+|\xi-\zeta|)}\,d\xi\,d\zeta\Bigg),\tag{16}$$

A − стала інтегрування.

Розв'язок інтегрального рівняння (15) знаходимо з використанням методу резольвентного ядра [1] у явному вигляді:

$$\bar\sigma(z)=A\psi(z)+(\bar p-\bar q)\varphi(z)+\theta(z)\,,\tag{17}$$

де

$$\{\psi(z),\varphi(z),\theta(z)\}=\left\{\frac{E(z)e^{-sz}}{1-\nu(z)},\Phi(z),\Theta(z)\right\}+$$

$$+\int_0^\infty\left\{\frac{E(\zeta)e^{-s\zeta}}{1-\nu(\zeta)},\Phi(\zeta),\Theta(\zeta)\right\}\mathcal{R}(z,\zeta)\,d\zeta\,,$$

$$\mathcal{R}(z,\zeta)=\sum_{n=0}^\infty\mathcal{R}_{n+1}(z,\zeta),\qquad\mathcal{R}_1(z,\zeta)=\mathcal{K}(z,\zeta),$$

$$\mathcal{R}_{n+1}(z,\zeta)=\int_0^\infty\mathcal{R}_1(z,t)\mathcal{R}_n(t,\zeta)\,dt\,.\tag{18}$$

Сталу A визначаємо підстановкою виразу (17) в інтегральну умову (13), в результаті чого отримуємо остаточний вираз для сумарних напружень

$$\bar\sigma(z)=\bar p\left(\varphi(z)-\frac{1+b}{a}\psi(z)\right)-\bar q\left(\varphi(z)+\frac{1-b}{a}\psi(z)\right)+\theta(z)-\frac{c}{a}\psi(z)\,,\tag{19}$$

де

$$\{a,b,c\}=s\int_0^\infty\left\{\frac{\psi(z)}{1+\nu(z)},\frac{\varphi(z)}{1+\nu(z)},\frac{\theta(z)}{1+\nu(z)}+2\alpha(z)G(z)\bar T(z)\right\}e^{-sz}\,d\zeta\,.$$

Підставивши сумарні напруження (19) у вираз (14), знайдемо

$$\bar{\sigma}_z(z) = \frac{\bar{p}}{2}\left(-e^{-sz} + \frac{s}{a}\int_0^\infty \frac{a\varphi(\zeta) - (1+b)\psi(\zeta)}{1+\nu(\zeta)} e^{-s|z-\zeta|}\,d\zeta\right) +$$

$$+ \frac{\bar{q}}{2}\left(e^{-sz} - \frac{s}{a}\int_0^\infty \frac{a\varphi(\zeta) + (1-b)\psi(\zeta)}{1+\nu(\zeta)} e^{-s|z-\zeta|}\,d\zeta\right) +$$

$$+ s\int_0^\infty \left(\alpha(\zeta)G(\zeta)\bar{T}(\zeta) + \frac{a\theta(\zeta) - c\psi(\zeta)}{2a(1+\nu(\zeta))}\right) e^{-s|z-\zeta|}\,d\zeta\,. \tag{20}$$

Дотичні напруження знаходимо з використанням першого зі співвідношень (10), в яке підставляємо вираз (20). З урахуванням формули $\frac{d}{dz}e^{-s|z-\zeta|} = -se^{-s|z-\zeta|}\operatorname{sgn}(z-\zeta)$ нескладно переконатися, що вираз для напружень $\bar{\sigma}_{rz}$ отримується із (20) заміною $e^{-s|z-\zeta|}$ на $e^{-s|z-\zeta|}\operatorname{sgn}(z-\zeta)$.

Знайшовши $\bar{\sigma}_{rz}$, визначаємо радіальні напруження за допомогою другого із виразів (10):

$$\bar{\sigma}_r(z) = \frac{\bar{p}}{a}\left(\frac{a\varphi(z) - (1+b)\psi(z)}{1+\nu(z)} + \frac{ae^{-sz}}{2} -\right.$$

$$\left. - \frac{s}{2}\int_0^\infty \frac{a\varphi(\zeta) - (1+b)\psi(\zeta)}{1+\nu(\zeta)} e^{-s|z-\zeta|}\,d\zeta\right) -$$

$$- \frac{\bar{q}}{a}\left(\frac{a\varphi(z) + (1-b)\psi(z)}{1+\nu(z)} + \frac{ae^{-sz}}{2} -\right.$$

$$\left. - \frac{s}{2}\int_0^\infty \frac{a\varphi(\zeta) + (1-b)\psi(\zeta)}{1+\nu(\zeta)} e^{-s|z-\zeta|}\,d\zeta\right) -$$

$$- s\int_0^\infty \left(\alpha(\zeta)G(\zeta)\bar{T}(\zeta) + \frac{a\theta(\zeta) - c\psi(\zeta)}{2a(1+\nu(\zeta))}\right) e^{-s|z-\zeta|}\,d\zeta +$$

$$+ 2\alpha(z)G(z)\bar{T}(z) + \frac{a\theta(z) - c\psi(z)}{a(1+\nu(z))}\,. \tag{21}$$

Колові напруження знайдемо з використанням останньої формули (10) і виразів (19)–(21).

Зауважимо, що для практичних обчислень напруженого стану з використанням резольвентного ядра у вигляді безмежного ряду (18) застосовують отриману на його основі скінченну суму перших N доданків. Величину N можна знайти за допомогою числового експерименту або з використанням аналітичних оцінок [18].

4. Розв'язок задачі термопружності для неоднорідного простору. У випадку задачі для простору Π_0 розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$\bar{\sigma}_z(z) = \frac{s}{2}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\bar{\sigma}(\zeta)}{1+\nu(\zeta)} + 2\alpha(\zeta)G(\zeta)\bar{T}(\zeta)\right) e^{-s|z-\zeta|}\,d\zeta\,. \tag{22}$$

Розв'язавши (9) з урахуванням (22), отримаємо інтегральне рівняння

$$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\theta}(z) + \int_{-\infty}^\infty \bar{\sigma}(\zeta)\tilde{\mathcal{K}}(z,\zeta)\,d\zeta\,, \tag{23}$$

де вирази для $\tilde{\theta}(z)$ і $\tilde{\mathcal{K}}(z,\zeta)$ мають вигляд (16) для $\Theta(z)$ і $\mathcal{K}(z,\zeta)$ з нижньою межею інтегрування $-\infty$. Резольвентний розв'язок (23) має вигляд

$$\overline{\sigma}(z) = \tilde{\theta}(z) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}(\zeta)\tilde{\mathcal{R}}(z,\zeta)\,d\zeta\,, \tag{24}$$

де

$$\tilde{\mathcal{R}}(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathcal{R}}_{n+1}(z,\zeta), \qquad \tilde{\mathcal{R}}_1(z,\zeta) = \tilde{\mathcal{K}}(z,\zeta)\,,$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{n+1}(z,\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{R}}_1(z,t)\tilde{\mathcal{R}}_n(t,\zeta)\,dt\,.$$

Підстановкою (24) у вираз (22) знаходимо

$$\overline{\sigma}_z(z) = \frac{s}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\tilde{\theta}(\zeta)\left(\frac{e^{-s|z-\xi|}}{1+\nu(\zeta)} + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{\mathcal{R}}(\xi,\zeta)e^{-s|z-\xi|}}{1+\nu(\xi)}\,d\xi\right) + \right.$$

$$\left. + 2\alpha(\zeta)G(\zeta)\overline{T}(\zeta)e^{-s|z-\zeta|}\right)d\zeta\,. \tag{25}$$

Як і у випадку задачі для півпростору, вираз для дотичних напружень отримуємо із (25) заміною $e^{-s|z-x|}$ на $e^{-s|z-x|}\,\mathrm{sgn}(z-x)$, де $x = \{\zeta,\xi\}$. Тоді з використанням другого зі співвідношень (10) маємо

$$\overline{\sigma}_r(z) = \frac{\tilde{\theta}(z)}{1+\nu(z)} + 2\alpha(z)G(z)\overline{T}(z) -$$

$$-\frac{s}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\tilde{\theta}(\zeta)\left(\frac{e^{-s|z-\zeta|}}{1+\nu(\zeta)} - \frac{2}{s}\frac{\tilde{\mathcal{R}}(z,\zeta)}{1+\nu(z)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{\mathcal{R}}(\xi,\zeta)e^{-s|z-\xi|}}{1+\nu(\xi)}\,d\xi\right) + 2\alpha(\zeta)G(\zeta)\overline{T}(\zeta)e^{-s|z-\zeta|}\right)d\zeta\,. \tag{26}$$

Колові напруження визначаємо за формулами (10), (24)–(26).

Для практичних обчислень у виразі для резольвенти обмежуються скінченною кількістю перших членів ряду.

5. Числовий приклад та обговорення. Розглянемо приклад розрахунку напруженого стану неоднорідного півпростору, пружні характеристики якого мають вигляд

$$\{E(z),G(z)\} = \{E_0,G_0\}\times\left(1+\mu e^{-\lambda z}\right),$$

$$G_0 = E_0/(2+2\nu), \quad \nu = 0.3\,. \tag{27}$$

Тут μ, λ – безрозмірні числові параметри, які задовольняють нерівності $\mu > -1$, $\lambda \ge 0$ для забезпечення модельних обмежень для пружних модулів. Подання (27) відповідає випадку, коли у віддаленому від межі масиві півпростору модулі пружності та зсуву наближено дорівнюють сталим значенням відповідно E_0 і G_0. При наближенні до межі для $\mu > 0$ пружні модулі зростають, досягаючи на ній максимального значення; для $\mu < 0$ вони спадають, приймаючи мінімальне значення на межі. Параметр λ характеризує швидкість зростання (спадання) і ширину примежової зони зміни пружних модулів. У випадку $\mu = 0$ або $\lambda = 0$ півпростір є однорідним. Півпростір навантажено зусиллям $p = \begin{cases} p_0, & \rho \le 1, \\ 0, & \rho > 1, \end{cases}$ де p_0 – стала розмірності напружень, коли $q = 0$, $T = 0$. Обчислення здійснено з урахуванням трьох доданків у виразі для резольвенти (18), що забезпечує точність задоволення рівняння (15) виразом (17) у межах $0.1\,\%$.

На рис. 1, 2 наведено розподіли безрозмірних напружень σ_z і σ_r за глибиною півпростору у перерізі $\rho = 0$ при $\lambda = 1$ і $\mu = 0, 1, 5, -0.6$. Напруження згасають з віддаленням від поверхні, причому у випадку збільшення параметра $\mu > 0$ напруження σ_z спадають стрімкіше з віддаленням від навантаженої ділянки межі півпростору, ніж у випадку однорідного матеріалу $(\mu = 0)$. Якщо $-1 < \mu < 0$, то напруження σ_z спадають повільніше, ніж в однорідному випадку, залишаючись рівним значенню, заданому на межі у примежовій ділянці півпростору. Радіальні напруження досягають максимального за модулем значення на межі півпростору, причому зі збільшенням параметра μ це значення зростає.

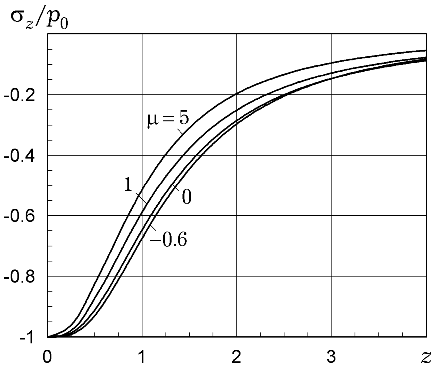

Рис. 1. Розподіл за глибиною півпростору безрозмірних напружень σ_z/p_0 при $\lambda = 1$, $\rho = 0$.

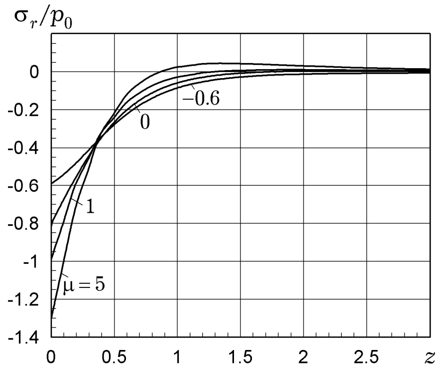

Рис. 2. Розподіл радіальних напружень у перерізі $\rho = 0$ для різних значень μ при $\lambda = 1$.

Висновки. Побудовано розв'язки осесиметричних задач теорії пружності і термопружності для простору і півпростору, пружні властивості яких є довільними функціями від координати z. Задачі зведено до інтегральних рівнянь другого роду, розв'язки яких знайдено в явному вигляді з використанням методу резольвентного ядра. З виразів для ядер інтегральних рівнянь випливає, що у випадку, коли обернена до модуля зсуву функція є лінійною, як розглянуто у прикладі Ґібсона [22], розв'язки сформульованих задач нескладно отримати у точному аналітичному вигляді без застосування резольвент, які перетворюються у тотожний нуль.

Показано, що у випадку пом'якшення матеріалу в примежовому шарі півпростору, порівняно з безмежним за глибиною масивом, поперечні до межі напруження згасають повільніше, ніж у випадку однорідного матеріалу. При цьому радіальні напруження істотно зменшуються.

1. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справ. пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 544 с.
2. *Коган Б. И.* Напряжения и деформации в покрытиях с непрерывно меняющимся модулем упругости // Тр. ХАДИ. – 1957. – № 19. – С. 53–66.
3. *Коган Б. И.* Напряжения и деформации многослойных покрытий // Тр. ХАДИ. – 1953. – № 14. – С. 33–46.
4. *Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. – Москва: Высш. шк., 1975. – 526 с.
5. *Коренев Б. Г.* Штамп, лежащий на упругом полупространстве, модуль упругости которого является степенной функцией глубины // Докл. АН СССР. – 1957. – **112**, № 5. – С. 823–826.
6. *Кульчицький-Жигайло Р. Д.* Пружний півпростір з шаруватим покривом періодичної структури під дією тиску Герца // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 4. – С 92–98.

Те саме: *Kul'chyts'kyi-Zhyhailo R. D.* Elastic half space with laminated coating of periodic structure under the action of Hertz's pressure // Mater. Sci. – 2012. – **47**, No. 4. – P. 527–534.

7. *Кульчицький-Жигайло Р., Роговський Г.* Осесиметрична контактна задача про втискування абсолютно жорсткої кулі в пружний півпростір з неоднорідним покривом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 6. – С. 82–92.
   Те саме: *Kul'chyts'kyi-Zhyhailo R., Rogowski G.* Axially symmetric contact problem of pressing of an absolutely rigid ball into an elastic half space with inhomogeneous coating // Mater. Sci. – 2009. – **45**, No. 6. – P. 845–858.
8. *Лехницкий С. Г.* Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости // Прикл. математика и механика. – 1962. – **26**, № 1. – С. 146–151.
   Те саме: *Lekhnitskii S. G.* Radial distribution of stresses in a wedge and in a half-plane with variable modulus of elasticity // J. Appl. Math. Mech. – 1962. – **26**, No. 1. – P. 199–206.
9. *Молотков И. А., Мухина И. В.* Нестационарное распространение волн в неоднородном полупространстве с минимумом скорости распространения // Краевые задачи математической физики. **4**, Тр. МИАН СССР. – 1966. – **92**. – С. 165–181.
10. *Моссаковский В. И.* Давление круглого штампа на упругое полупространство, модуль упругости которого является степенной функцией глубины // Прикл. математика и механика. – 1958. – **22**, № 1. – С. 123–125.
    Те саме: *Mossakovskii V. I.* Pressure of a circular die [punch] on an elastic half-space, whose modulus of elasticity is an exponential function of depth // J. Appl. Math. Mech. – 1958. – **22**, No. 1. – P. 168–171.
11. *Плевако В. П.* Деформация неоднородного полупространства под действием поверхностной нагрузки // Прикл. механика. – 1973. – **9**, № 6. – С. 16–23.
    Те саме: *Plevako V. P.* The deformation of a nonhomogeneous half-space under the action of a surface load // Sov. Appl. Mech. – 1973. – **9**, No. 6. – P. 593–598.
12. *Плевако В. П.* Задача о действии сдвигающих сил, приложенных к поверхности неоднородного полупространства // Прикл. механика. – 1973. – **9**, № 11. – С. 49–55.
    Те саме: *Plevako V. P.* A problem concerned with the action of shear forces applied to the surface of an inhomogeneous half-space // Sov. Appl. Mech. – 1973. – **9**, No. 11. – P. 1191–1195.
13. *Плевако В. П.* Неоднородный слой, сцепленный с полупространством, под воздействием внутренних и внешних сил // Прикл. математика и механика. – 1974. – **38**, № 5. – С. 864–875.
    Те саме: *Plevako V. P.* Inhomogeneous layer bonded to a half-space under the action of internal and external forces // J. Appl. Math. Mech. – 1974. – **38**, No. 5. – P. 813–823.
14. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А, Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
15. *Попов Г. Я.* К теории изгиба плит на упругом неоднородном полупространстве // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1959. – №11–12. – С. 11–19.
16. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю., Вовк О. М.* Термопружний стан термочутливого простору зі сферичною порожниною за умов конвективно-променевого теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 168–176.
17. *Приварников А. К.* Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований. – Днепропетровск: ДГУ, 1976. – 60 с.
18. *Токова Л. П., Ясінський А. В.* Наближений розв'язок одновимірної задачі теорії пружності для неоднорідного суцільного циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. – С. 107–112.
19. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
20. *Цытович Н. А.* Механика грунтов. – Москва: Госстройиздат, 1963. – 636 с.
21. *Burmister D. M.* The general theory of stresses and displacements in layered systems. I // J. Appl. Phys. – 1945. – **16**, No. 2. – P. 89–94.
22. *Gibson R. E.* Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space // Géotechnique. – 1967. – **17**, No. 1. – C. 58–67.
23. *Gibson R. E., Sills G. C.* On the loaded elastic half-space with a depth varying Poisson's ratio // Z. Angew. Math. Phys. – 1969. – **20**, No. 5. – P. 691–695.
24. *Khan K. A., Hilton H. H.* On inconstant Poisson's ratios in non-homogeneous elastic media // J. Therm. Stresses. – 2010. – **33**, No. 1. – P. 29–36.

25. *Krenev L. I., Aizikovich S. M., Tokovyy Yu. V., Wang Y.-C.* Axisymmetric problem on the indentation of a hot circular punch into an arbitrarily nonhomogeneous half-space // Int. J. Solids Struct. – 2015. – **59**. – P. 18–28.
26. *Krenev L. I., Tokovyy Yu. V., Aizikovich S. M., Seleznev N. M., Gorokhov S. V.* A numerical-analytical solution to the mixed boundary-value problem of the heat-conduction theory for arbitrarily inhomogeneous coatings // Int. J. Therm. Sci. – 2016. – **107**. – P. 56–65.
27. *Kushnir R. M., Popovych V. S., Vovk O. M.* The thermoelastic state of a thermo-sensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange // J. Eng. Math. – 2008. – **61**, No. 2-4. – P. 357–369.
28. *Tokovyy Yu. V.* Direct integration method // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 951–960.
29. *Tokovyy Yu. V., Kalynyak B. M., Ma C.-C.* Nonhomogeneous solids: integral equations approach // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 7. – P. 3350–3356.
30. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* An analytical solution to the three-dimensional problem on elastic equilibrium of an exponentially-inhomogeneous layer // J. Mech. – 2015. – **31**, No. 5. – C. 545–555.
31. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* Analytical solutions to the 2D elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous planes and half-planes // Arch. Appl. Mech. – 2009. – **79**, No. 5. – P. 441–456.
32. *Tokovyy Y., Ma C.-C.* Analytical solutions to the axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for an arbitrarily inhomogeneous layer // Int. J. Eng. Sci. – 2015. – **92**. – P. 1–17.

РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВА И ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Развита методика построения решений осесимметричных задач теории упругости и термоупругости в напряжениях для пространства и полупространства, упругие характеристики которых являются произвольными функциями координаты z *. С использованием метода непосредственного интегрирования и интегрального преобразования Ханкеля задачи сводятся к ключевым интегральным уравнениям, которые в случае полупространства сопровождаются локальным граничным и интегральным условиями. Решения этих уравнений получены в явном виде с использованием метода резольвентного ядра.*

SOLUTIONS OF AXISYMMETRIC ELASTICITY AND THERMOELASTICITY PROBLEMS FOR INHOMOGENEOUS SPACE AND HALFSPACE

A technique for the solution of axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems in terms of stresses for a space and a halfspace, whose elastic properties are arbitrary functions of coordinate z *, is developed. By making use of the direct integration method along with the Hankel integral transform, the problems are reduced to the governing integral equations, which are accompanied with a local boundary condition and an integral condition for the case of the halfspace. The solutions of latter equations are constructed in an explicit form by making use of the resolvent-kernel method.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
04.12.16