УДК 533.6.013.42

Ю. М. Кононов, В. П. Шевченко, Ю. О. Джуха

ОСЕСИМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ КІЛЬЦЕВИХ ОСНОВ І ДВОШАРОВОЇ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ В ЖОРСТКОМУ КІЛЬЦЕВОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ РЕЗЕРВУАРІ

Виведено частотне рівняння власних сумісних осесиметричних коливань пружних основ у вигляді кільцевих пластин і важкої двошарової ідеальної нестисливої рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі. Розглянуто різні граничні випадки: виродження кільцевих пластин у мембрани, абсолютно жорсткі чи кругові пластини, відсутності верхньої пластини (рідина з вільною поверхнею). Для широкого кола параметрів розглянутої механічної системи досліджено частотні спектри та отримано ряд механічних ефектів у задачі гідропружності.

Вступ. Задача про коливання ідеальної нестисливої рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з двома пружними основами є узагальненням задачі про коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружною мембраною або пластиною на вільній поверхні. Останню задачу почали інтенсивно досліджувати понад 35 років тому [6, гл. 5], і на сьогодні з цієї тематики є достатньо велика кількість публікацій (див., зокрема, [2, 15]). Задачу про коливання ідеальної рідини в жорсткому циліндричному резервуарі з пружними основами мабуть уперше було розглянуто з позиції функціонального аналізу в [1, 13 (с. 167−178)], а потім − у [5, 7−9, 11 та ін.]. Велику кількість робіт присвячено коливанням рідини з вільною поверхнею в жорсткому циліндричному резервуарі з пружним дном (див. огляди літератури в [9−11]). Інтерес до задачі про осесиметричні коливання пружного дна та рідини в циліндричному резервуарі пов’язаний із необхідністю враховувати статичний прогин дна й поздовжні коливання рідини як цілого. В [11] досліджено осесиметричні коливання пружних основ та одношарової ідеальної рідини в жорсткому циліндричному резервуарі. В [9] узагальнено результати [11] на випадок коаксіального циліндричного резервуару. У відносно недавно опублікованих статтях [3, 4, 14] розглянуто осесиметричні коливання двошарової рідини стосовно проблеми капілярних фазороздільників. Серед англомовних праць виділимо статті [15−18].

У цій статті узагальнено розглянуту в [9] задачу для випадку двошарової ідеальної рідини, коли контури пластин закріплені. Метою роботи є отримання частотного рівняння й аналіз частотного спектру досліджуваної механічної системи. Розглянуто випадки виродження пластин в мембрани, абсолютно жорсткі пластини, кругові пластини, а також випадок рідини з вільною поверхнею. Виконано чисельні дослідження для широкого кола параметрів механічної системи: пружних характеристик пластин, густин, глибин заповнення, а також для випадку невагомості. Результати можуть бути застосовані при визначенні власних форм коливань, а також у задачах про вимушені коливання системи тверде тіло − рідина − пружні пластини.

1. Постановка задачі. Розглянемо сумісні осесиметричні коливання пружних основ та важкої двошарової ідеальної нестисливої рідини з густинами ρ_1 і ρ_2, що повністю заповнює прямий кільцевий циліндричний резервуар з жорсткою боковою поверхнею зовнішнього радіуса a і внутрішнього $a\varepsilon$, $0 \le \varepsilon < 1$. Основи кільцевого циліндричного резервуару є кільцевими ізотропними пластинами зі згинальними жорсткостями D_i, на які впливають розтягуючі зусилля T_i у серединній площині, $i = 1, 2$. Індекс $i = 1$ відповідає верхній основі та верхній рідині з густиною ρ_1, а $i = 2$ − нижній основі та нижній рідині з густиною ρ_2. Циліндричну систему координат $Or\theta z$ розмістимо так, щоб площина $Or\theta$ була на поверхні розділу рідин, а вісь Oz була спрямована вздовж осі циліндра у напрямку, протилежному до вектора прискорення сили тяжіння $\mathbf{g}$. Задачу розглядаємо в лінійній постановці, вважаючи рух рідини потенціальним, а сумісні коливання пластин і рідини − безвідривними.

Рівняння руху розглянутої механічної системи мають вигляд [9, 11, 12]

$$k_{01}\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1\Delta_2^2 W_1 - T_1\Delta_2 W_1 + \rho_1 g W_1 = \\ = \rho_1\left(Q_1 - \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right|_{z=h_1} - g h_1 \right), \tag{1}$$

$$k_{02}\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2\Delta_2^2 W_2 - T_2\Delta_2 W_2 - \rho_2 g W_2 = \\ = -\rho_2\left(Q_2 - \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right|_{z=-h_2} + g h_2 \right), \tag{2}$$

$$\Delta\Phi_1 = 0, \qquad \Delta\Phi_2 = 0.$$

Рівняння (1), (2) будемо розв'язувати з урахуванням граничних умов

$$\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right|_{r=a,\, r=a\varepsilon} = \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right|_{r=a,\, r=a\varepsilon} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right|_{z=h_1} = \frac{\partial W_1}{\partial t}, \qquad \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right|_{z=-h_2} = \frac{\partial W_2}{\partial t},$$

$$\rho_1\left(Q_1 - \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right|_{z=0} - g\zeta \right) = \rho_2\left(Q_2 - \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right|_{z=0} - g\zeta \right),$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\int_S W_1\, dS = \int_S \zeta\, dS = \int_S W_2\, dS, \tag{4}$$

$$W_i\big|_{\gamma_j} = 0, \qquad \left.\frac{\partial W_i}{\partial r}\right|_{\gamma_j} = 0, \qquad i, j = 1, 2. \tag{5}$$

Тут $k_{0i} = \rho_{0i}\delta_{0i}$; W_i, ρ_{0i} і δ_{0i} − відповідно прогин, густина і товщина i-ї пластини; Φ_i − потенціал швидкостей i-ї рідини; $z = \zeta(r,t)$ − рівняння поверхні розділу рідин (внутрішня поверхня); Q_i − довільні функції часу; $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ і $\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ − дво- та тривимірний осесиметричні оператори Лапласа; S − кільцева область. Тут для зручності запису введено додатковий індекс j та позначення контурів. Індекс $j = 1$ відповідає зовнішньому контуру γ_1, а $j = 2$ − внутрішньому контуру γ_2.

2. Метод розв'язування. З огляду на осьову симетрію функції Φ_i, W_i і ζ подамо у вигляді узагальнених рядів Фур'є за власними функціями $\psi_n(r)$ таким чином [9, 11, 12]:

$$\Phi_i(r,z,t) = a_{0i}(t) + a_{1i}(t)z + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{in}(t)e^{k_n z} + B_{in}(t)e^{-k_n z}\right]\psi_n(r), \tag{6}$$

$$W_i(r,t) = W_{i0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} W_{in}(t)\psi_n(r), \tag{7}$$

$$\zeta(r,t)=\zeta_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n(t)\psi_n(r), \tag{8}$$

де

$$W_{i0}=\frac{2}{(1-\varepsilon^2)a^2}\int_{a\varepsilon}^{a} rW_i\,dr, \quad W_{in}=\frac{1}{N_n^2}\int_{a\varepsilon}^{a} rW_i\psi_n\,dr,$$

$$\zeta_0=\frac{2}{(1-\varepsilon^2)a^2}\int_{a\varepsilon}^{a} r\zeta\,dr, \quad \zeta_n=\frac{1}{N_n^2}\int_{a\varepsilon}^{a} r\zeta\psi_n\,dr, \quad N_n^2=\int_{a\varepsilon}^{a} r\psi_n^2\,dr.$$

При осьовій симетрії власні функції $\psi_n(r)$, які разом з довільною константою утворюють на відрізку $[a,\ a\varepsilon]$ повну ортогональну систему функцій, мають вигляд $\psi_n(r)=J_0(k_n r)+\gamma_n Y_0(k_n r)$, де $\gamma_n=-J_1(\xi_n)/Y_1(\xi_n)$, J_0, J_1 і Y_0, Y_1 – функції Бесселя першого та другого роду нульового та першого порядків, $k_n=\xi_n/a$ – власні числа, а ξ_n – корені рівнянь $J_1(\xi_n)Y_1(\xi_n\varepsilon)-J_1(\xi_n\varepsilon)Y_1(\xi_n)=0$ при $\varepsilon\neq 0$ та $J_1(\xi_n)=0$ при $\varepsilon=0$.

Підставивши вирази (6)–(8) у граничні умови (3) і скориставшись ортогональністю функцій $\psi_n(r)$, отримаємо

$$A_{1n}=\frac{\dot W_{1n}-\dot\zeta_n e^{-æ_{1n}}}{2k_n\,\mathrm{sh}\,æ_{1n}}, \qquad B_{1n}=\frac{\dot W_{1n}-\dot\zeta_n e^{æ_{1n}}}{2k_n\,\mathrm{sh}\,æ_{1n}},$$

$$A_{2n}=-\frac{\dot W_{2n}-\dot\zeta_n e^{æ_{2n}}}{2k_n\,\mathrm{sh}\,æ_{2n}}, \qquad B_{2n}=-\frac{\dot W_{2n}-\dot\zeta_n e^{-æ_{2n}}}{2k_n\,\mathrm{sh}\,æ_{2n}}, \qquad æ_{in}=k_n h_i,$$

$$a_{11}=a_{12}=\dot W_{10}=\dot W_{20}=\dot\zeta_0, \quad \rho_1(Q_1-\dot a_{01}-g\zeta_0)=\rho_2(Q_2-\dot a_{02}-g\zeta_0).$$

Рівняння (1), (2) і рівняння поверхні розділу рідин (внутрішньої поверхні) матимуть вигляд

$$k_{01}\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}+D_1\Delta_2^2 W_1-T_1\Delta_2 W_1+\rho_1 g W_1=$$

$$=\rho_1\left(Q_1-\dot a_{01}-h_1(\ddot\zeta_0+g)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ddot W_{1n}\,\mathrm{ch}\,æ_{1n}-\ddot\zeta_n}{k_n\,\mathrm{sh}\,æ_{1n}}\psi_n\right), \tag{9}$$

$$k_{02}\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}+D_2\Delta_2^2 W_2-T_2\Delta_2 W_2-\rho_2 g W_2=$$

$$=-\rho_2\left(Q_2-\dot a_{02}+h_2(\ddot\zeta_0+g)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ddot W_{2n}\,\mathrm{ch}\,æ_{2n}-\ddot\zeta_n}{k_n\,\mathrm{sh}\,æ_{2n}}\psi_n\right), \tag{10}$$

$$\ddot\zeta_n+\sigma_n^2\zeta_n-\frac{1}{a_n}(b_{1n}\ddot W_{1n}+b_{2n}\ddot W_{2n})=0, \tag{11}$$

де $\sigma_n^2=gk_n\Delta\rho/a_n$ – квадрат частоти коливань внутрішньої поверхні при жорстких основах; $a_n=\rho_1\,\mathrm{cth}\,æ_{1n}+\rho_2\,\mathrm{cth}\,æ_{2n}$, $\Delta\rho=\rho_2-\rho_1$, $b_{in}=\rho_i/\mathrm{sh}\,æ_{in}$.

3. Виведення частотного рівняння. Розглянемо задачу про власні сумісні коливання пружних пластин і рідини. Для цього покладемо $W_i(r,t)=e^{i\omega t}w_i(r)+W_i^{st}(r)$, $\rho_1(Q_1-\dot a_{01})=\tilde Q e^{i\omega t}$, $\zeta_0=we^{i\omega t}$. Тут W_i^{st} – статичний прогин пластин, який було розглянуто в [13]. У цьому випадку рівняння (9), (10) з урахуванням (11) набудуть вигляду

$$D_i \Delta_2^2 w_i - T_i \Delta_2 w_i - \left[k_{0i}\omega^2 + (-1)^i \rho_i g\right] w_i = (-1)^{i+1}\tilde{Q} +$$

$$+\left[\rho_i h_i \omega^2 + (\delta_{i1} - 1) g \Delta\rho\right] w + \rho_i \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_{in} \psi_n, \quad i = 1, 2, \qquad (12)$$

де з використанням (4)

$$\tilde{w}_{1n} = \frac{w_{1n}(\operatorname{ch} \text{æ}_{1n} - \omega^2 \tilde{b}_{1n}) - \omega^2 \tilde{b}_{2n} w_{2n}}{k_n \operatorname{sh} \text{æ}_{1n}},$$

$$\tilde{w}_{2n} = \frac{w_{2n}(\operatorname{ch} \text{æ}_{2n} - \omega^2 \tilde{b}_{2n}) - \omega^2 \tilde{b}_{1n} w_{1n}}{k_n \operatorname{sh} \text{æ}_{2n}}, \quad \tilde{b}_{in} = \frac{b_{in}}{a_n(\omega^2 - \sigma_n^2)},$$

$$w_{in} = \frac{1}{N_n^2} \int_{a\varepsilon}^{a} r w_i \psi_n dr, \qquad (13)$$

$$w = \frac{2}{a^2(1-\varepsilon^2)} \int_{a\varepsilon}^{a} r w_1 dr = \frac{2}{a^2(1-\varepsilon^2)} \int_{a\varepsilon}^{a} r w_2 dr, \qquad (14)$$

δ_{i1} – символ Кронекера.

Розв'язок кожного з рівнянь (12) шукаємо як суму загального розв'язку однорідного рівняння і часткового розв'язку неоднорідного [6, 7, 9–11]:

$$w_i = \sum_{k=1}^{4} w_{ik}^0 A_{ik}^0 + \rho_i \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{w}_{in}}{d_{in}} \psi_n +$$

$$+ \tilde{k}_{0i}\left\{(-1)^{i+1}\tilde{Q} + \left[\rho_i h_i \omega^2 + (\delta_{i1} - 1) g \Delta\rho\right] w\right\}, \quad i = 1, 2. \qquad (15)$$

Тут $\tilde{k}_{0i} = -1 / (k_{0i}\omega^2 + (-1)^i \rho_i g)$; $d_{in} = (D_i k_n^2 + T_i) k_n^2 - \left[k_{0i}\omega^2 + (-1)^i \rho_i g\right]$; A_{ik}^0, w_{in}, $\tilde{Q}$ і w – невідомі константи, $i = 1, 2$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Підставивши (15) в (14), отримаємо два рівняння для A_{ik}^0, $\tilde{Q}$ і $\tilde{w}$:

$$\sum_{k=1}^{4} (\tilde{w}_{1k}^0 A_{1k}^0 - \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0) + (\tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02})\tilde{Q} +$$

$$+\left[(\rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} - \rho_2 h_2 \tilde{k}_{02})\omega^2 + \tilde{k}_{02} g \Delta\rho\right] w = 0, \qquad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{4} \tilde{w}_{2k}^0 A_{2k}^0 - \tilde{k}_{02}\tilde{Q} + \tilde{k}_2 w = 0, \qquad (17)$$

де $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_{02}(\rho_2 h_2 \omega^2 - g\Delta\rho) - 1$, $\tilde{w}_{ik}^0 = \dfrac{2}{(1-\varepsilon^2)a^2} \displaystyle\int_{a\varepsilon}^{a} r w_{ik}^0 dr$.

Підставивши (15) в (13) та розв'язавши систему двох лінійних рівнянь відносно w_{1n} і w_{2n}, отримаємо остаточні вирази для прогинів пластин:

$$w_1 = \sum_{k=1}^{4} \left[\left(w_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 \psi_n \right) A_{1k}^0 + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 \right] + \tilde{k}_{01}(\tilde{Q} + \rho_1 h_1 \omega^2 w),$$

$$w_2 = \sum_{k=1}^{4} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 \psi_n \right) A_{1k}^0 + \left(w_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n \right) A_{2k}^0 \right] +$$

$$+ \tilde{k}_{02}\left[-\tilde{Q} + (\rho_2 h_2 \omega^2 - g\Delta\rho) w\right]. \qquad (18)$$

Тут

$$a_{11n} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_n}\,\omega^2 b_{1n}(a_{1n}d_{2n} + \omega^2 b_{2n}c_n), \qquad a_{12n} = -\frac{1}{\tilde{\Delta}_n}\,\omega^4 k_n b_{1n} b_{2n} d_{2n},$$

$$a_{21n} = -\frac{1}{\tilde{\Delta}_n}\,\omega^4 k_n b_{1n} b_{2n} d_{1n}, \qquad a_{22n} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_n}\,\omega^2 b_{2n}(a_{2n}d_{1n} + \omega^2 b_{1n}c_n),$$

$$\tilde{a}_n = a_n(\omega^2 - \sigma_n^2), \qquad b_n = b_{1n}\operatorname{ch}æ_{2n} + b_{2n}\operatorname{ch}æ_{1n},$$

$$c_n = \omega^2\, b_n - \tilde{a}_n \operatorname{ch}æ_{1n}\operatorname{ch}æ_{2n},$$

$$\tilde{\Delta}_n = k_n^2 \tilde{a}_n d_{1n} d_{2n} - \omega^2\left(a_{1n}b_{1n}d_{2n} + a_{2n}b_{2n}d_{1n} + \omega^2 b_{1n}b_{2n}c_n\right),$$

$$a_{in} = k_n\left(\tilde{a}_n \operatorname{ch}æ_{in} - \omega^2 b_{in}\right), \qquad E_{ikn}^0 = \frac{1}{N_n^2}\int\limits_{a\varepsilon}^{a} r w_{ik}^0 \psi_n\, dr. \tag{19}$$

З умов закріплення пластин (5), виразів для прогинів пластин (18) і додаткових рівнянь (16), (17) випливає таке частотне рівняння власних сумісних осесиметричних коливань пружних основ і двошарової рідини:

$$\left|\, \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^{10} \right| = 0, \tag{20}$$

де

$$C_{i+j-1,k} = B_{ijk} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n}E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \qquad C_{i+j-1,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n}E_{2kn}^0 B_{jn}^*,$$

$$C_{i+j-1,9} = \tilde{k}_{01}, \qquad C_{i+j-1,10} = \tilde{k}_{01}\rho_1 h_1 \omega^2, \qquad C_{i+j,k} = C_{ijk},$$

$$C_{i+j,k+4} = 0, \qquad C_{i+j,10} = 0, \qquad i = 1, \qquad j = 1, \qquad k = 1,2,3,4,$$

$$C_{i+j,k} = B_{ijk} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n}E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \qquad C_{i+j,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n}E_{2kn}^0 B_{jn}^*,$$

$$C_{i+j,9} = \tilde{k}_{01}, \qquad C_{i+j,10} = \tilde{k}_{01}\rho_1 h_1 \omega^2, \qquad C_{i+j+1,k} = C_{ijk}, \qquad C_{i+j+1,k+4} = 0,$$

$$C_{i+j+1,9} = 0, \qquad C_{i+j+1,10} = 0, \qquad i = 1, \qquad j = 2, \qquad k = 1,2,3,4,$$

$$C_{i+j+2,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n}E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \qquad C_{i+j+2,k+4} = B_{ijk} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n}E_{2kn}^0 B_{jn}^*,$$

$$C_{i+j+2,9} = -\tilde{k}_{02}, \qquad C_{i+j+2,10} = \tilde{k}_{02}(\rho_2 h_2 \omega^2 - g\Delta\rho),$$

$$C_{i+j+3,k} = 0, \qquad C_{i+j+3,k+4} = C_{ijk}, \qquad C_{i+j+3,9} = 0,$$

$$C_{i+j+3,10} = 0, \qquad i = 2, \qquad j = 1, \qquad k = 1,2,3,4,$$

$$C_{i+j+3,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n}E_{1kn}^0 B_{jn}^*, \qquad C_{i+j+3,k+4} = B_{ijk} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n}E_{2kn}^0 B_{jn}^*,$$

$$C_{i+j+3,9} = -\tilde{k}_{02}, \qquad C_{i+j+3,10} = \tilde{k}_{02}(\rho_2 h_2 \omega^2 - g\Delta\rho),$$

$$C_{i+j+4,k} = 0, \qquad C_{i+j+4,k+4} = C_{ijk},$$

$$C_{i+j+4,9} = 0, \qquad C_{i+j+4,10} = 0, \qquad i = 2, \qquad j = 2, \qquad k = 1,2,3,4,$$

$$C_{9,k} = \tilde{w}_{1k}^0, \qquad C_{9,k+4} = -\tilde{w}_{2k}^0, \qquad C_{9,9} = \tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02},$$

$$C_{9,10} = (\rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} - \rho_2 h_2 \tilde{k}_{02})\omega^2 + \tilde{k}_{02} g \Delta\rho, \quad C_{10,k} = 0,$$

$$C_{10,k+4} = \tilde{w}_{2k}^0, \quad C_{10,9} = -\tilde{k}_{02}, \quad C_{10,10} = \tilde{k}_2, \quad k = 1,2,3,4. \tag{21}$$

Тут $B_{ijk} = w_{ik}^0\big|_{\gamma_j}$, $C_{ijk} = \left.\dfrac{dw_{ik}^0}{dr}\right|_{\gamma_j}$, $B_{jn}^* = Z_0\left(\dfrac{r}{a}\right)\Big|_{\gamma_j}$, $Z_m(x) = J_m(\xi_n x) + \gamma_n Y_m(\xi_n x)$.

Рівняння (20) описує власні сумісні коливання пружних кільцевих пластин і двошарової ідеальної рідини в кільцевому циліндрі за умов жорсткого закріплення зовнішнього та внутрішнього контурів пластин. Слід очікувати, що частотний спектр буде складатися з чотирьох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої і нижньої пружних основ, стовпа рідини як одного цілого та внутрішньої поверхні розділу рідин. Для одношарової рідини частотний спектр буде складатися з трьох наборів частот.

4. Окремі випадки частотного рівняння власних сумісних коливань пружних основ і рідини. Отримане рівняння (20) є досить загальним і охоплює ряд окремих випадків, які становлять самостійний інтерес.

Верхня пластина вироджується в мембрану. В цьому випадку у визначнику рівняння (20) потрібно викреслити другий і четвертий рядки та другий і четвертий стовпці, а в співвідношеннях (19) покласти $D_1 = 0$.

Нижня пластина вироджується в мембрану. Як і в попередньому випадку, у визначнику рівняння (20) потрібно викреслити шостий і восьмий рядки та шостий і восьмий стовпці, а в (19) покласти $D_2 = 0$. Тоді рівняння (20) матиме вигляд

$$\left| \, \| C_{qr} \|_{q,r=5,7,9,10}^{5,7,9,10} \right| = 0,$$

де

$$C_{5,5} = B_{211} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{21n}^0 B_{1n}^*, \quad C_{5,7} = B_{212} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{22n}^0 B_{1n}^*,$$

$$C_{5,9} = -\tilde{k}_{02}, \quad C_{5,10} = \tilde{k}_{02}(\rho_2 h_2 \omega^2 - g\Delta\rho),$$

$$C_{7,5} = B_{221} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{21n}^0 B_{2n}^*, \quad C_{7,7} = B_{222} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{22n}^0 B_{2n}^*,$$

$$C_{7,9} = -\tilde{k}_{02}, \quad C_{7,10} = \tilde{k}_{02}(\rho_2 h_2 \omega^2 - g\Delta\rho),$$

$$C_{9,5} = -\tilde{w}_{21}^0, \quad C_{9,7} = -\tilde{w}_{22}^0, \quad C_{9,9} = \tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02},$$

$$C_{9,10} = (\rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} - \rho_2 h_2 \tilde{k}_{02})\omega^2 + \tilde{k}_{02} g\Delta\rho, \quad C_{10,5} = \tilde{w}_{21}^0,$$

$$C_{10,7} = \tilde{w}_{22}^0, \quad C_{10,9} = -\tilde{k}_{02}, \quad C_{10,10} = \tilde{k}_2.$$

Нижня і верхня пластини вироджуються в мембрани. У цьому випадку у визначнику рівняння (20) потрібно викреслити другий, четвертий, шостий і восьмий рядки та другий, четвертий, шостий і восьмий стовпці, а в співвідношеннях (19) покласти $D_1 = D_2 = 0$.

Випадок наявності вільної поверхні в рідини. Цей випадок реалізується, коли відсутня верхня пластина. У визначнику рівняння (20) потрібно викреслити перший, другий, третій і четвертий рядки та перший, другий, третій і четвертий стовпці, а в співвідношеннях (19) прийняти, що $k_{01} = 0$, $T_1 = 0$, $D_1 = 0$.

Нижня або верхня пластина абсолютно жорстка. Якщо верхня або нижня пластина стає абсолютно жорсткою, то $w_1 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{1k}^0 \equiv 0$) або $w_2 \equiv 0$ ($\tilde{w}_{2k}^0 \equiv 0$). Переходячи до границі в рівнянні (20) при $T_1 \to \infty$ ($a_{11n} \to 0$, $a_{12n} \to 0$, $w_{1k}^0 = 0$) або при $T_2 \to \infty$ ($a_{21n} \to 0$, $a_{22n} \to 0$, $w_{2k}^0 = 0$), отримаємо такі частотні рівняння:

– у першому випадку (при $T_1 \to \infty$)

$$\left| \, \| C_{qr} \|_{q,r=5}^{10} \right| = 0 ,$$

– у другому випадку (при $T_2 \to \infty$)

$$\left| \, \| C_{qr} \|_{q,r=1,2,3,4,9,10}^{1,2,3,4,9,10} \right| = 0 .$$

Коефіцієнти C_{qr} обчислюємо за формулами (21).

Виродження кільцевого циліндра в круговий ($\varepsilon = 0$). У цьому випадку частотне рівняння (20) має вигляд

$$\left| \, \| C_{qr} \|_{q,r=1}^{6} \right| = 0 , \tag{22}$$

де

$$C_{i,k} = B_{ik} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_n^* , \quad C_{i,k+2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_n^* ,$$

$$C_{i,5} = \tilde{k}_{01}, \quad C_{i,6} = \tilde{k}_{01} \rho_1 h_1 \omega^2 , \quad C_{i+1,\mathrm{k}} = C_{ik} ,$$

$$C_{i+1,k+2} = 0, \quad C_{i+1,5} = 0, \quad C_{i+1,6} = 0, \quad i = 1, \quad k = 1,2 ,$$

$$C_{i+1,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E_{1kn}^0 B_n^* , \quad C_{i+1,k+2} = B_{ik} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E_{2kn}^0 B_n^* ,$$

$$C_{i+1,5} = -\tilde{k}_{02}, \quad C_{i+1,6} = \tilde{k}_{02} (\rho_2 h_2 \omega^2 - g \Delta\rho), \quad C_{i+2,k} = 0 ,$$

$$C_{i+2,k+2} = C_{ik}, \quad C_{i+2,5} = 0, \quad C_{i+2,6} = 0, \quad i = 2, \quad k = 1,2 ,$$

$$C_{5,k} = \tilde{w}_{1k}^0, \quad C_{5,k+2} = -\tilde{w}_{2k}^0, \quad C_{5,5} = \tilde{k}_{01} + \tilde{k}_{02} ,$$

$$C_{5,6} = (\rho_1 h_1 \tilde{k}_{01} - \rho_2 h_2 \tilde{k}_{02}) \omega^2 + \tilde{k}_{02} g \Delta\rho, \quad C_{6,k} = 0, \quad C_{6,k+2} = \tilde{w}_{2k}^0 ,$$

$$C_{6,5} = -\tilde{k}_{02}, \quad C_{6,6} = \tilde{k}_2, \quad k = 1,2 ,$$

$$B_{ik} = w_{ik}^0 \Big|_{r=a} , \quad C_{ik} = \frac{dw_{ik}^0}{dr} \bigg|_{r=a} , \quad B_n^* = J_0(\xi_n) .$$

Для нестратифікованої рідини ($\rho_1 = \rho_2$) цей випадок докладно досліджено в статті [11]. Варто відмітити різницю між рівнянням (20) при $\varepsilon \to 0$ та рівнянням (22), яке описує коливання розглянутої механічної системи, у випадку нерухомих (закріплених) центрів. Це нова задача про осесиметричні коливання рідини та пружних кругових пластин з нерухомими центрами, яка випливає з розглянутої.

Нехай верхня та нижня основи є абсолютно пружними ($T_1 = T_2 = 0$) і $k_{0i} \omega^2 + (-1)^i \rho_i g > 0$. У цьому випадку маємо

$$w_{i1}^0 = J_0(\mu_i r), \quad w_{i2}^0 = Y_0(\mu_i r), \quad w_{i3}^0 = I_0(\mu_i r), \quad w_{i4}^0 = K_0(\mu_i r) ,$$

$$\tilde{w}_{i1}^0 = 2\frac{J_1(\tilde{\mu}_i) - \varepsilon J_1(\varepsilon\tilde{\mu}_i)}{\tilde{\mu}_i(1-\varepsilon^2)}, \quad \tilde{w}_{i2}^0 = 2\frac{Y_1(\tilde{\mu}_i) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\tilde{\mu}_i)}{\tilde{\mu}_i(1-\varepsilon^2)},$$

$$\tilde{w}_{i3}^0 = 2\frac{I_1(\tilde{\mu}_i) - \varepsilon I_1(\varepsilon\tilde{\mu}_i)}{\tilde{\mu}_i(1-\varepsilon^2)}, \quad \tilde{w}_{i4}^0 = -2\frac{K_1(\tilde{\mu}_i) - \varepsilon K_1(\varepsilon\tilde{\mu}_i)}{\tilde{\mu}_i(1-\varepsilon^2)},$$

$$E_{i1n}^0 = 2\tilde{\mu}_i \frac{J_1(\tilde{\mu}_i)Z_0(1) - \varepsilon J_1(\varepsilon\tilde{\mu}_i)Z_0(\varepsilon)}{(\tilde{\mu}_i^2 - \xi_n^2)\tilde{N}_n^2},$$

$$E_{i2n}^0 = 2\tilde{\mu}_i \frac{Y_1(\tilde{\mu}_i)Z_0(1) - \varepsilon Y_1(\varepsilon\tilde{\mu}_i)Z_0(\varepsilon)}{(\tilde{\mu}_i^2 - \xi_n^2)\tilde{N}_n^2},$$

$$E_{i3n}^0 = 2\tilde{\mu}_i \frac{I_1(\tilde{\mu}_i)Z_0(1) - \varepsilon I_1(\varepsilon\tilde{\mu}_i)Z_0(\varepsilon)}{(\tilde{\mu}_i^2 + \xi_n^2)\tilde{N}_n^2},$$

$$E_{i4n}^0 = -2\tilde{\mu}_i \frac{K_1(\tilde{\mu}_i)Z_0(1) - \varepsilon K_1(\varepsilon\tilde{\mu}_i)Z_0(\varepsilon)}{(\tilde{\mu}_i^2 + \xi_n^2)\tilde{N}_n^2}, \tag{23}$$

де $\mu_1^4 = \frac{1}{D_1}(k_{01}\omega^2 - \rho_1 g)$, $\mu_2^4 = \frac{1}{D_2}(k_{02}\omega^2 + \rho_2 g)$, $\tilde{N}_n^2 = Z_0^2(1) - \varepsilon^2 Z_0^2(\varepsilon)$, $\tilde{\mu}_i = a\mu_i$, J_p, Y_p, I_p, K_p – функції Бесселя першого та другого роду від дійсного та уявного аргументів. Введемо безрозмірні змінні

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 a}{g}, \quad \tilde{D}_i = \frac{D_i}{\rho_2 g a^4}, \quad \tilde{T}_i = \frac{T_i}{\rho_2 g a^2},$$

$$k_{0i}^* = \frac{k_{0i}}{\rho_2 a}, \quad \tilde{h}_i = \frac{h_i}{a}, \quad \rho_{12} = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

Безрозмірні величини матимуть такий вигляд:

$$æ_{in} = \xi_n \tilde{h}_i, \quad A_n = \rho_{12}\,\mathrm{cth}\,æ_{1n} + \mathrm{cth}\,æ_{2n},$$

$$\tilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{A_n}\xi_n(1-\rho_{12}), \quad \tilde{b}_{1n} = \rho_{12}\frac{1}{\mathrm{sh}\,æ_{1n}}, \quad \tilde{b}_{2n} = \frac{1}{\mathrm{sh}\,æ_{2n}}$$

$$\tilde{b}_n = b_{1n}\,\mathrm{ch}\,æ_{2n} + b_{2n}\,\mathrm{ch}\,æ_{1n}, \quad \tilde{A}_n = A_n(\Omega^2 - \sigma_n^2),$$

$$\tilde{d}_{1n} = (\tilde{D}_1\xi_n^2 + \tilde{T}_1)\xi_n^2 - (k_{01}^*\Omega^2 - \rho_{12}), \quad \tilde{d}_{2n} = (\tilde{D}_2\xi_n^2 + \tilde{T}_2)\xi_n^2 - (k_{02}^*\Omega^2 + 1),$$

$$\tilde{a}_{in} = \xi_n(\tilde{A}_n\,\mathrm{ch}\,æ_{in} - \Omega^2\tilde{b}_{in}), \quad \tilde{c}_n = \Omega^2\tilde{b}_n - \tilde{A}_n\,\mathrm{ch}\,æ_{1n}\,\mathrm{ch}\,æ_{2n},$$

$$\tilde{\Delta}_n^* = \xi_n^2\tilde{A}_n\tilde{d}_{1n}\tilde{d}_{2n} - \Omega^2(\tilde{a}_{1n}\tilde{b}_{1n}\tilde{d}_{2n} + \tilde{a}_{2n}\tilde{b}_{2n}\tilde{d}_{1n} + \Omega^2\tilde{b}_{1n}\tilde{b}_{2n}\tilde{c}_n),$$

$$\tilde{k}_{01}^* = -(k_{01}^*\Omega^2 - \rho_{12})^{-1}, \quad \tilde{k}_{02}^* = -(k_{02}^*\Omega^2 + 1)^{-1},$$

$$a_{11n} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_n^*}\Omega^2\tilde{b}_{1n}(\tilde{a}_{1n}\tilde{d}_{2n} + \Omega^2\tilde{b}_{2n}\tilde{c}_n), \quad a_{12n} = -\frac{1}{\tilde{\Delta}_n^*}\Omega^4\xi_n\tilde{b}_{1n}\tilde{b}_{2n}\tilde{d}_{2n},$$

$$a_{21n} = -\frac{1}{\tilde{\Delta}_n^*}\Omega^4\xi_n\tilde{b}_{1n}\tilde{b}_{2n}\tilde{d}_{1n}, \quad a_{22n} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_n^*}\Omega^2\tilde{b}_{2n}(\tilde{a}_{2n}\tilde{d}_{1n} + \Omega^2\tilde{b}_{1n}\tilde{c}_n),$$

$$\tilde{k}_2 = \tilde{k}_{02}^*(\Omega^2\tilde{h}_2 - 1 + \rho_{12}) - 1, \quad \tilde{\mu}_1^4 = \frac{k_{01}^*\Omega^2 - \rho_{12}}{\tilde{D}_1}, \quad \tilde{\mu}_2^4 = \frac{k_{02}^*\Omega^2 + 1}{\tilde{D}_2}.$$

При $\varepsilon = 0$ і $\rho_{12} = 1$ вирази (23) набудуть вигляду [11]

$$w_{i1}^0 = J_0\left(\tilde{\mu}_i \frac{r}{a}\right), \quad w_{i2}^0 = I_0\left(\tilde{\mu}_i \frac{r}{a}\right), \quad \tilde{w}_{i1}^0 = \frac{2}{\tilde{\mu}_i}J_1(\tilde{\mu}_i), \quad \tilde{w}_{i2}^0 = \frac{2}{\tilde{\mu}_i}I_1(\tilde{\mu}_i),$$

$$E_{i1n}^0 = \frac{2\tilde{\mu}_i J_1(\tilde{\mu}_i)}{(\tilde{\mu}_i{}^2 - \xi_n^2)J_0(\xi_n)}, \quad E_{i2n}^0 = \frac{2\tilde{\mu}_i I_1(\tilde{\mu}_i)}{(\tilde{\mu}_i{}^2 + \xi_n^2)J_0(\xi_n)}.$$

5. Числові дослідження і висновки. Зважаючи на складність задачі, виконаємо чисельні дослідження для двох найцікавіших випадків: *відсутності верхньої основи* (наявності в рідини вільної поверхні) та *невагомості* ($g = 0$) однорідної рідини ($\rho_1 = \rho_2$). Незважаючи на значну кількість публікацій, ці випадки досліджені недостатньо.

За відсутності верхньої основи ($k_{01} = 0$, $T_1 = 0$, $D_1 = 0$) для абсолютно пружного дна ($T_2 = 0$) і введених безрозмірних змінних маємо: $\tilde{d}_{1n} = \rho_{12}$, $\tilde{d}_{2n} = \tilde{D}_2\xi_n^4 - k_{02}^*\Omega^2 - 1$, $\tilde{k}_{01}^* = \dfrac{1}{\rho_{12}}$. Функції w_{2k}^0 і вирази $\tilde{w}_{2k}^0$, E_{2kn}^0 обчислюємо за формулами (23).

У випадку невагомості ($g = 0$) введемо інші безрозмірні змінні:

$$\Omega^2 = \frac{1}{D_2}\omega^2\rho_2 a^5, \qquad D_{12} = \frac{D_1}{D_2}, \qquad \tilde{\mu}_1^4 = \frac{1}{D_{12}}k_{01}^*\Omega^2, \qquad \tilde{\mu}_2^4 = k_{02}^*\Omega^2.$$

При $T_i \neq 0$ і $k_{01} = k_{02} = 0$, тобто у випадку безінерційних пластин матимемо

$$w_{i1}^0 = 1, \quad w_{i2}^0 = I_0(\gamma_{0i}r/a), \quad w_{i2}^0 = \ln(r/a), \quad w_{i2}^0 = K_0(\gamma_{0i}r/a),$$

$$\gamma_{01}^2 = \frac{1}{D_1}T_1a^2, \qquad \gamma_{02}^2 = \frac{1}{D_2}T_2a^2. \tag{24}$$

Зі співвідношень (15)–(17), (24) і чисельних досліджень випливає, що для безінерційних пластин, а також у випадку, коли одна з пластин є абсолютно жорсткою ($T_i \to \infty$), а інша – безінерційною, частотне рівняння не має дійсних коренів. Крім того, частотне рівняння не має дійсних коренів і для інерційних пластин. Отже, у випадку невагомості осесиметричні коливання відсутні, якщо одна з пластин є абсолютно жорсткою.

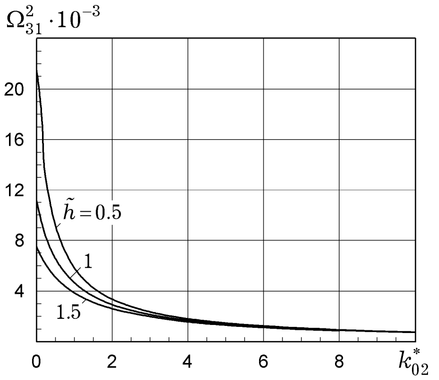

Рис. 1. Графіки залежності Ω_{31}^2 від k_{02}^* для різних $\tilde{h}$.

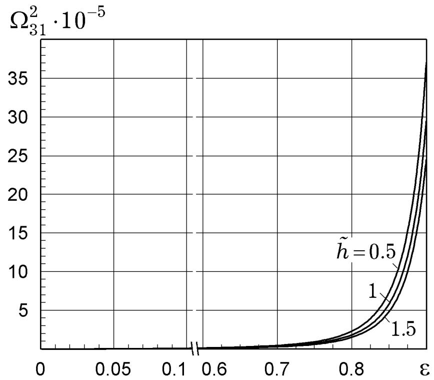

Рис. 2. Графіки залежності Ω_{31}^2 від ε для різних $\tilde{h}$.

Чисельні дослідження частотного рівняння (20) за наявності масових сил виконано для таких значень безрозмірних параметрів: $\varepsilon = 0.001 \div 0.9$, $\tilde{h} = 0.5 \div 1.5$, $k_{02}^* = 0 \div 10$, $\tilde{D}_2 = 1$, $\tilde{T}_2 = 0$, $\rho_{12} = 1$, де $\tilde{h} = \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2$. У цьому випадку залишаються три набори частот, що відповідають коливанням верхньої основи чи вільної поверхні, пружного дна та коливання стовпа рідини. Розрахунки виконано з урахуванням п'яти членів у рядах рівняння (20), $n = 1, 2, \ldots, 5$, для випадку вільної поверхні. На рис. 1 наведено графіки залежності квадрата безрозмірної першої частоти третього набору (частоти коливань стовпа рідини як одного цілого) Ω_{31}^2 від масової характеристики дна $k_{02}^* = 0 \div 10$, а на рис. 2 – від $\varepsilon = 0.001 \div 0.9$.

На основі аналітичних і чисельних досліджень робимо такі висновки:

1. Частотний спектр складається з чотирьох наборів частот, що відповідають коливанням верхньої та нижньої пружних основ, стовпа рідини як одного цілого та внутрішньої поверхні розділу рідин. Для одношарової рідини частотний спектр складається з трьох наборів частот.

2. У невагомості осесиметричні коливання відсутні, якщо одна з пластин є абсолютно жорсткою.

3. За наявності в двошаровій рідині вільної поверхні частотний спектр складається з чотирьох наборів частот, що відповідають коливанням вільної поверхні рідини, пружного дна, стовпа рідини та внутрішньої поверхні. У широкому діапазоні зміни параметрів механічної системи спостерігається слабка зміна частот першого та четвертого наборів й істотна зміна частот другого та третього наборів, а також:

- залежність квадрата першої частоти третього набору від безрозмірної жорсткості в більшості випадків є майже лінійною;
- зі збільшенням глибин заповнення відбувається незначне зменшення частот першого та четвертого наборів і значне – другого і третього наборів;
- значне збільшення частот третього набору відбувається зі зменшенням глибин заповнення.

4. Ряди частотних рівнянь збігаються досить швидко. Як правило, достатньо двох-трьох членів у рядах для прийнятної на практиці точності. За урахування масових характеристик пластин значно зростає час розв'язання частотних рівнянь.

Перспективи подальших досліджень вбачаємо в узагальненні розглянутої задачі для різних умов закріплення контурів кільцевих пластин, визначенні власних форм коливань та вивченні вимушених поздовжніх коливань циліндричного резервуару з пружними основами та двошаровою рідиною.

Стаття містить результати досліджень, виконаних за ґрантової підтримки Державного фонду фундаментальних досліджень за конкурсним проектом Ф71/80–2016.

1. *Андронов А. В.* О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде с упругими днищами / Симфероп. ун-т. – Симферополь, 1983. – 26 с. – Рук. деп. в УкрНИИНТИ 30.12.83, № 1478.
2. *Богун Р. І., Троценко В. А.* Власні коливання рідини в циліндричному резервуарі з довільним осесиметричним дном та пружними елементами на вільній поверхні рідини // Нелінійні коливання. – 2010. – **13**, № 4. – С. 461–482.
   Те саме: *Bohun R. I., Trotsenko V. A.* Free oscillations of a fluid in a cylindrical container with arbitrary axisymmetric bottom and elastic elements on the free surface of the fluid // Nonlinear Oscil. – 2011. – **13**, No. 4. – P. 493–514.
3. *Гончаров Д. А.* Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. – № 11.
   – http://technomag.bmstu.ru /doc/619258.html (DOI: 10.7463/1113.0619258)
4. *Гончаров Д. А.* Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. – № 4.
   – http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html.
5. *Дидок Н. К., Кононов Ю. Н.* Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с идеальной жидкостью и упругими основаниями // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2013. – **27**. – С. 122–131.
6. *Докучаев Л. В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – Москва: Машиностроение, 1987. – 232 с.
7. *Карнаух А. Ю.* Колебания упругой пластинки, разделяющей жидкости в цилиндрическом сосуде с упругими основаниями // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2013. – № 2. – С. 33–36.
8. *Кононов Ю., Джуха Ю.* Осесиметричні коливання пружних основ і двошарової ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі // Конф. молодих учених «Підстригачівські читання–2016», 25–27 травня 2016, Львів, Україна. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2016.

– http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Kononov.pdf.
9. *Кононов Ю. Н., Джуха Ю. А.* Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре // Вісн. Запорізьк. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2016. – № 1. – С. 103–115.
10. *Кононов Ю. Н., Дидок Н. К., Джуха Ю. А.* О решении обобщенного неоднородного бигармонического уравнения в задачах гидроупругости // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2014. – № 1. – С. 64–69.
11. *Кононов Ю. Н., Русаков В. Ф., Джуха Ю. А.* Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре // Вісн. Запорізьк. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2015. – № 2. – С. 106–115.
12. *Кононов Ю. Н., Шевченко В. П., Джуха Ю. А.* Осесимметричные колебания двухслойной идеальной жидкости со свободной поверхностью в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругим дном // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2015. – № 1-2. – С. 116–125.
13. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. – Москва: Наука, 1989. – 416 с.
14. *Пожалостин А. А., Гончаров Д. А.* Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инженерный журнал: Наука и инновации. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2013. – № 12.
– http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html.
15. *Bauer H. F., Chiba M.* Axisymmetric oscillation of a viscous liquid covered by an elastic structure // J. Sound Vib. – 2005. – **281**, No. 3-5. – P. 835–847.
16. *Ding Z.* Free bending vibration of annular cylindrical tank partially filled with liquid in consideration of surface wave // Appl. Math. Mech. – 1994. – **15**, No. 9. – P. 831–839.
17. *Jang J.-W., Alaniz A., Yang L., Powers J., Hall C.* Mechanical slosh models for rocket-propelled spacecraft // AIAA Guidance: Navigation and control conference, 19–22 Aug. 2013, Boston, USA. – Reston: Am. Inst. Aeronautics and Astronautics, 2013. – http://ntrs.nasa.gov/ archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20140002967.pdf.
18. *Jhung M. J., Kim W. T., Ryu Y. H.* Dynamic characteristics of cylindrical shells considering fluid-structure interaction // Nuclear Engineering and Technology. – 2009. – **41**, No. 10. – P. 1333–1346.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ КОЛЬЦЕВЫХ ОСНОВАНИЙ И ДВУСЛОЙНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ЖЕСТКОМ КОЛЬЦЕВОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ

Выведено частотное уравнение собственных совместных осесимметричных колебаний упругих оснований в виде кольцевых пластин и тяжелой двухслойной идеальной несжимаемой жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре. Рассмотрены различные предельные случаи: вырождение кольцевых пластин в мембраны, абсолютно жесткие или круговые пластины, отсутствие верхней пластины (жидкость со свободной поверхностью). Для широкого круга параметров рассматриваемой механической системы исследованы частотные спектры и получен ряд механических эффектов в задаче гидроупругости.

AXISYMMETRIC VIBRATIONS OF ANNULAR ELASTIC FOUNDATIONS AND IDEAL TWO-LAYER LIQUID IN A RIGID ANNULAR CYLINDRICAL CONTAINER

A frequency equation for the coupled axisymmetric natural vibrations of elastic annular plates (foundations) and heavy ideal two-layer incompressible liquid in a rigid annular cylindrical container is derived. Some limiting cases are addressed, i.e., when the annular plates degenerate into membranes, absolutely rigid or circular plates, as well as the case when the upper plate is absent (free surface of liquid). The frequency spectrum is analyzed for a wide range of parameters of the considered mechanical system. A number of mechanical effects in the hydroelasticity problem are drawn.

Донецьк. нац. ун-т
ім. Василя Стуса, Вінниця

Одержано
25.11.16