УДК 539.3

О. В. Максимович[1], С. В. Лавренчук[1], Т. Я. Соляр[2]

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ АНІЗОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ З ТРІЩИНАМИ

Запропоновано підхід до розв'язування контактної задачі для анізотропної півплощини, що взаємодіє з плоским гладким штампом, з урахуванням контакту берегів тріщин. Розрахунок напружень біля тріщин в анізотропній півплощині виконано на основі методу інтегральних рівнянь. Ядра рівнянь побудовано так, щоб умови на прямолінійній межі півплощини, в тому числі під штампом, задовольнялися тотожно. Досліджено вплив анізотропії і контакту берегів тріщин на коефіцієнти інтенсивності напружень.

Вступ. У пружному тілі в околі штампа виникають стискувальні напруження, які спричинюють контакт берегів тріщин, розміщених біля штампа. Тому контактні задачі для тіл з тріщинами є достатньо складними в математичному відношенні. У літературі для спрощення таких задач, які в основному розглядались для ізотропних матеріалів, найчастіше наближено приймають, що контактні напруження під штампом описуються за розподілом Герца [3, 4]. У строгій постановці контактну задачу для ізотропної пластинки та плоского гладкого штампа розглянуто в [9, 10]. Контактну задачу для ізотропної півплощини та штампа з основою криволінійної форми без урахування контакту берегів тріщин розглянуто в [10, 11]. Огляд досліджень щодо контактних задач для ізотропних матеріалів наведено в [3].

Тут цю задачу розв'язано для анізотропного матеріалу з використанням модифікованих інтегральних рівнянь, за яких умови на межі півплощини, в тому числі під штампом, задоволено тотожно. Аналогічний спосіб використано при дослідженні плоских контактних задач теорії пружності для ізотропних пластинок з отворами на основі методу рядів [5] та для анізотропних пластинок на основі методу інтегральних рівнянь [7]. Такий підхід спрощує алгоритм розв'язування контактної задачі для пластинок з тріщинами, оскільки інтегральні рівняння записано лише на кривих, на яких розміщені тріщини. Крім цього є можливість безпосереднього використання методів розрахунку контактних напружень на берегах тріщин [8].

1. Постановка задачі. Розглянемо анізотропну півплощину $y < 0$, послаблену тріщинами, які лежать на кривих L_j, $j = 1,\ldots,J$. Вважаємо, що півплощина вздовж межі $y = 0$ при $a < x < b$ (область L_u) взаємодіє зі штампом, основа якого $y = f(x)$. Межа поза штампом (область L_σ) є вільною від навантаження, а дотичні напруження під штампом відсутні. Головний вектор Y_s і момент M сил, прикладених до штампа, є заданими. Береги тріщин контактують без тертя, а прикладені до протилежних берегів зусилля поза ділянками контакту є однаковими й дорівнюють (X_T, Y_T) на лівому березі відносно вибраного обходу.

2. Основні співвідношення. Виходимо з комплексних потенціалів Лехницького $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$, де $z_j = x + s_j y$, s_j, $j = 1,2$, – корені характеристичного рівняння $\Delta(s) = 0$ з додатною уявною частиною [6], де

$$\Delta(s) = \alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22},$$

α_{ij} – пружні сталі матеріалу, які входять у закон Гука [6].

Розглянемо довільний контур Γ, який належить області D, зайнятої пластинкою, та виберемо на ньому напрямок обходу. Вектори напружень (X, Y) і переміщень (u, v) на цьому контурі, який розглядаємо як межу області, розміщеної зліва відносно вибраного обходу, запишемо як [1, 6]

$$X = 2\,\mathrm{Re}\left[s_1\Phi(z_1)z_1' + s_2\Psi(z_2)z_2'\right],$$

$$Y = -2\,\mathrm{Re}\left[\Phi(z_1)z_1' + \Psi(z_2)z_2'\right],$$

$$u' = 2\,\mathrm{Re}\left[p_1\Phi(z_1)z_1' + p_2\Psi(z_2)z_2'\right],$$

$$v' = 2\,\mathrm{Re}\left[q_1\Phi(z_1)z_1' + q_2\Psi(z_2)z_2'\right], \qquad (1)$$

де

$$u' = \frac{du}{ds}, \quad v' = \frac{dv}{ds}, \quad p_j = \alpha_{11}s_j^2 - \alpha_{16}s_j + \alpha_{12}, \quad q_j = \alpha_{12}s_j - \alpha_{26} + \alpha_{22}\frac{1}{s_j},$$

$z_j' = \dfrac{dx}{ds} + s_j\dfrac{dy}{ds}$, ds – диференціал дуги на Γ.

Введемо в розгляд вектор напружень $q_\Gamma(z) = X + iY$ на кривій Γ, який з використанням співвідношень (1) визначаємо за формулою

$$q_\Gamma = (s_1 - i)z_1'\,\Phi(z_1) + (\overline{s}_1 - i)\overline{z}_1'\,\overline{\Phi}(z_1) +$$
$$+ (s_2 - i)z_2'\,\Psi(z_2) + (\overline{s}_2 - i)\overline{z}_2'\,\overline{\Psi}(z_2).$$

Приймемо, що вектори (X, Y) і (u, v) на кривій Γ є відомими. Тоді зі співвідношень (1) на Γ маємо [12]

$$\Phi(z_1) = \frac{-v' + s_1u' + p_1X + q_1Y}{\Delta_1 z_1'}, \quad \Psi(z_2) = \frac{-v' + s_2u' + p_2X + q_2Y}{\Delta_2 z_2'}, \qquad (2)$$

де $\Delta_j = \Delta'(s_j)$, $j = 1,2$.

3. Інтегральні рівняння задачі відносно стрибків переміщень. Для побудови загального розв'язку задачі спочатку розглянемо нескінченну область, що містить тріщини, береги яких не контактують. На основі (2) і теореми Коші для аналітичних функцій у цьому випадку маємо такі інтегральні зображення для потенціалів Лехницького [8, 12]

$$\Phi(z_1) = \int_L \left[g_1'\Phi_1^S(z_1,t_1) + g_2'\Phi_2^S(z_1,t_1)\right]ds + \Phi_S(z_1),$$

$$\Psi(z_2) = \int_L \left[g_1'\Psi_1^S(z_2,t_2) + g_2'\Psi_2^S(z_2,t_2)\right]ds + \Psi_S(z_2),$$

де

$$L = L_1 + \ldots + L_J, \qquad g_1' = \frac{d}{ds}(u^+ - u^-), \qquad g_2' = \frac{d}{ds}(v^+ - v^-),$$

$$\Phi_j^S(z_1,t_1) = \frac{A_j}{t_1 - z_1}, \quad \Psi_j^S(z_2,t_2) = \frac{B_j}{t_2 - z_2}, \qquad j = 1,2,$$

$$A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}, \quad B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2}.$$

Тут $u^\pm$, $v^\pm$ – граничні значення переміщень при підході до тріщини зліва і справа відносно вибраного напрямку інтегрування, $t_j = \xi + s_j\eta$ – точка, за якою проводиться інтегрування, $(\xi,\eta) \in L$, ds – диференціал дуги на кривій L, $\Phi_S(z_1)$, $\Psi_S(z_2)$ – потенціали для суцільної пластинки, які відповідають прикладеним на нескінченності зусиллям і внутрішнім зосередженим силам.

4. Модифіковане інтегральне зображення. Якщо пружна анізотропна пластинка з тріщинами займає задану область D з вільною від навантаження межею або за однорідних граничних умов (наприклад, на частині межі задано нульові переміщення, а решта межі вільна від навантаження).

Побудуємо інтегральні рівняння цієї задачі таким чином, щоб умови на межі області D виконувались автоматично. Спочатку побудуємо комплексні потенціали Лехницького Φ_j^D, Ψ_j^D, $j = 1,2$, які є розв'язком задачі теорії пружності для області D з вибраними однорідними умовами на межі і мають такі особливості в точці $T(x_0, y_0) \in D$:

$$\Phi_j^D \sim -\frac{A_j}{z_1 - z_{10}}, \qquad \Psi_j^D \sim -\frac{B_j}{z_2 - z_{20}},$$

де $z_{k0} = x_0 + s_k y_0$, $k = 1,2$. Позначимо ці потенціали через $\Phi_j^D(z_1, T)$, $\Psi_j^D(z_2, T)$. Тоді загальний розв'язок задачі теорії пружності (потенціали Лехницького) для області D з тріщинами набуде вигляду [8, 12]

$$\Phi(z_1) = \int_L \left[\Phi_1^D(z_1, T) g_1'(s) + \Phi_2^D(z_1, T) g_2'(s)\right] ds + \Phi_D(z_1),$$

$$\Psi(z_2) = \int_L \left[\Psi_1^D(z_2, T) g_1'(s) + \Psi_2^D(z_2, T) g_2'(s)\right] ds + \Psi_D(z_2), \tag{3}$$

де $\Phi_D(z_1) = \Phi_D^P(z_1) + \Phi_D^\infty(z_1)$, $\Psi_D(z_2) = \Psi_D^P(z_2) + \Psi_D^\infty(z_2)$, T – точка (ξ, η), за якою проводиться інтегрування. Тут потенціали Φ_D^∞, Ψ_D^∞ та Φ_D^P, Ψ_D^P – розв'язки задач теорії пружності для області D з однорідними граничними умовами за дії прикладених до пластинки на нескінченності зусиль або зосереджених сил, відповідно.

За побудовою, потенціали (3) тотожно задовольняють задані умови на межі області D при довільних функціях g_1', g_2'.

Підставивши співвідношення (3) у граничні умови, отримуємо інтегральні рівняння для знаходження $g_1'(s)$, $g_2'(s)$ у випадку тріщин, береги яких не контактують:

$$\int_\Gamma \left[\, g_1'(s) Q_1(Z, T) + g_2'(s) Q_2(Z, T)\right] ds = Q(Z), \qquad Z \in L. \tag{4}$$

Тут $Q(Z) = Q_T(Z) - Q_D(Z)$; $Q_j(Z, T)$ – вектор напружень q_L у точці $Z(x, y) \in L$, який визначається за формулою (3) через комплексні потенціали $\left(\Phi_j^D(z_1, T), \Psi_j^D(z_2, T)\right)$, $j = 1,2;$ $Q_D(Z)$ – вектор напружень, що відповідає потенціалам $\left(\Phi_D(z_1), \Psi_D(z_2)\right)$, $Q_T = X_T + iY_T$. Наприклад,

$$Q_j(Z, T) = (s_1 + i) z_1' \, \Phi_j^D(z_1, T) + (\overline{s}_1 + i)\overline{z}_1' \, \overline{\Phi}_j^D(z_1, T) +$$

$$+ (s_2 + i) z_2' \, \Psi_j^D(z_2, T) + (\overline{s}_2 + i)\overline{z}_2' \, \overline{\Psi}_j^D(z_2, T), \quad j = 1,2.$$

5. Побудова допоміжних розв'язків Φ_j^D, Ψ_j^D, $j = 1,2$. Для визначення допоміжних функцій знайдемо потенціали Лехницького $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$ для суцільної півплощини $y < 0$, які мають полюси:

$$\Phi(z_1) \sim \frac{A}{z_1 - z_{10}}, \qquad \Psi(z_2) \sim \frac{B}{z_2 - z_{20}},$$

де A, B – довільні комплексні сталі, $z_{k0} = x_0 + s_k y_0$, $k = 1,2$, (x_0, y_0) – довільна точка, яка належить півплощині.

Приймаємо, що межа півплощини контактує в області L_u, $a < x < b$, з гладким плоским штампом. Головний вектор і момент прикладених до штампа сил дорівнюють нулеві, а поза штампом межа ненавантажена. Зазначимо, що в розглянутій допоміжній задачі напруження під штампом можуть бути знакозмінні, тобто ця задача не має фізичного змісту.

Розв'язок задачі зобразимо у вигляді суми

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_\Delta(z), \qquad \Psi(z) = \Psi_1(z) + \Psi_\Delta(z),$$

де Φ_1, Ψ_1 – потенціали для суцільної півплощини з вільною межею, що мають задані особливості, Φ_Δ, Ψ_Δ – коригувальний розв'язок.

На основі [1] маємо

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z) + \alpha_1\bar{\Phi}_0(z) + \beta_1\bar{\Psi}_0(z),$$

$$\Psi_1(z) = \Psi_0(z) + \alpha_2\bar{\Phi}_0(z) + \beta_2\bar{\Psi}_0(z),$$

де

$$\Phi_0(z_1) = \frac{A}{z_1 - z_{10}}, \quad \Psi_0(z_2) = \frac{B}{z_2 - z_{20}},$$

$$\alpha_1 = \frac{\bar{s}_1 - s_2}{\delta}, \quad \beta_1 = \frac{\bar{s}_2 - s_2}{\delta}, \quad \alpha_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_1}{\delta}, \quad \beta_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_2}{\delta}, \quad \delta = s_2 - s_1 .$$

Коригувальний розв'язок для випадку, коли центр штампа розміщено в початку координат (тобто при $a = -\ell$, $b = \ell$), з використанням результатів роботи [7] подамо у вигляді

$$\Phi_\Delta(z) = \frac{s_2}{s_2 - s_1}\left[F_\Delta(z) + F_\varepsilon(z)\right],$$

$$\Psi_\Delta(z) = -\frac{s_1}{s_2 - s_1}\left[F_\Delta(z) + F_\varepsilon(z)\right],$$

де

$$F_\Delta(z) = \frac{1}{\bar{\lambda}X(z)}\left[A'W(z,z_{10}) + B'W(z,z_{20}) + \bar{A}'W(z,\bar{z}_{10}) + \bar{B}'W(z,\bar{z}_{20})\right],$$

$$W(z,c) = \frac{1}{1-g}\left[\frac{X(z) - X(c)}{z - c} - 1\right], \quad \lambda = \frac{s_2 q_1 - s_1 q_2}{\delta}, \quad g = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}},$$

$$A' = \alpha A, \quad B' = \beta B, \quad \alpha = -\frac{1}{\delta}\Delta_1 s_2, \quad \beta = \frac{1}{\delta}\Delta_2 s_1,$$

$$F_\varepsilon(z) = -\frac{\varepsilon}{\bar{\lambda}(1-g)}\left(1 - \frac{z - c_1\ell}{X(z)}\right), \quad X(z) = (z-a)^\rho (z-b)^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{\ln g}{2\pi i},$$

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{Im}(\lambda) M_\Delta}{\pi\ell^2(c_2 - c_1^2)}, \quad M_\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_2}\mathrm{Re}\left[A_1' H(z_{10}) + A_2' H(z_{20})\right],$$

$$H(c) = X(c) - c + \ell c_1, \quad c_2 = 1 - 2\rho + 2\rho^2, \quad c_1 = 1 - 2\rho .$$

Допоміжні потенціали визначаються через введені функції Φ, Ψ як

$$\Phi_j^D = \Phi\big|_{A=A_j, B=B_j}, \quad \Psi_j^D = \Psi_{A=A_j, B=B_j}, \quad j = 1,2 .$$

Інтегральні рівняння (4) розв'язано методом механічних квадратур [1]. Урахування контакту берегів проведено на основі розгляду відповідної задачі квадратичного програмування [8].

6. Результати розрахунків. Розглянемо півплощину $y < 0$ з тріщиною, в яку при $y = 0$, $-\ell < x < \ell$ втискається без тертя плоский штамп. Приймемо, що головні вектор і момент прикладених до штампа сил дорівнюють $S_y = -P$ і $M = 0$. Розглянемо детально випадок, коли прямолінійна тріщина півдовжини a з вершинами A, B і координатами центру $(x_c, -y_c)$ нахилена під кутом α до осі Ox. При знаходженні коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) враховуємо контакт берегів тріщин. Потенціали $\Phi_D(z_1)$, $\Psi_D(z_2)$, які входять у (3) і є розв'язком контактної задачі для суцільної півплощини, визначаються за формулами [2, 7].

Розрахунки виконано для випадку, коли тріщина є горизонтальною та симетричною відносно центру штампа, при відносних довжинах тріщин $a/\ell = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ для ізотропного матеріалу та вуглепластику LU, для якого відношення максимального модуля пружності до мінімального дорівнює 8.9 [1]. Результати розрахунків відносної величини $F_{II}(B)/F_{II\max}$ для матеріалу LU з максимальною жорсткістю у вертикальному напрямку залежно від відносних відстаней від центру тріщин до межі y_c/ℓ зображено на рис. 1***а***. Тут $F_{I,II}(B) = K_{I,II}(B)\sqrt{\ell}\,/(P\sqrt{\pi})$, $F_{II\max}$ – найбільше значення $|F_{II}(B)|$ залежно від y_c/ℓ (значення a/ℓ фіксовані). Значення $F_{II\max}$ наведено у табл. 1.

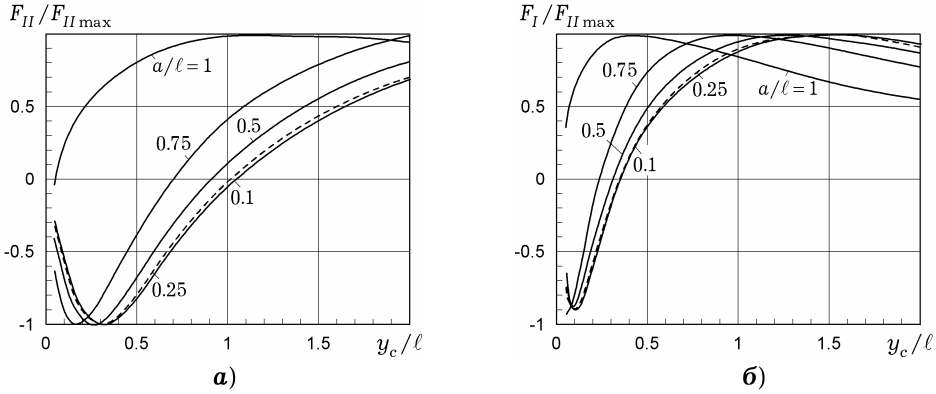


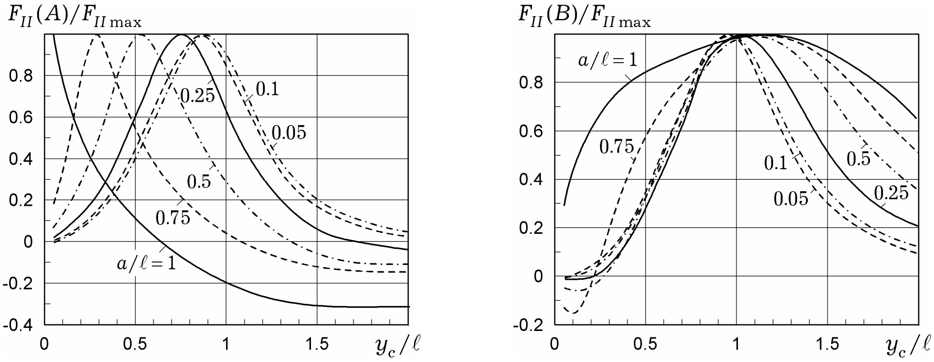
Рис. 1. Відносні КІН для горизонтальної тріщини у пластинці з матеріалу LU.

Обчислені для ізотропного матеріалу КІН при $a/\ell = 0.05, 0.25$ збігаються з результатами роботи [10], отриманими іншим методом. Аналогічні результати для матеріалу LU, коли максимальною є жорсткість у напрямку осі Ox (такий матеріал позначено через LU-90), наведено на рис. 1***б***.

Таблиця 1. Значення $F_{II\max}$ для горизонтальної тріщини.

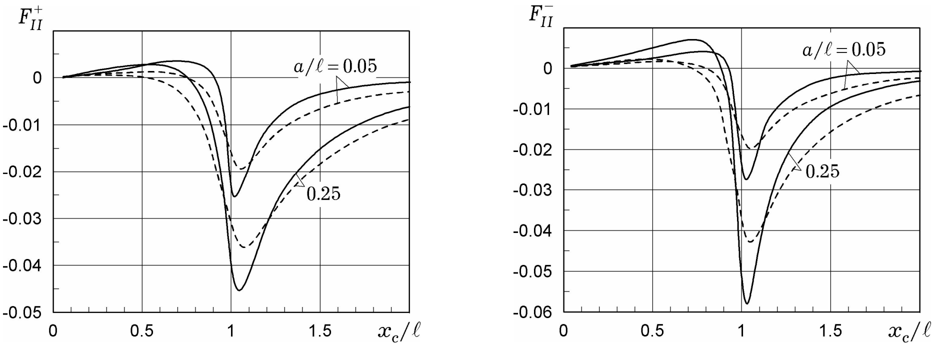
a/ℓ	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	1
Ізотропія	0.00049	0.0014	0.0055	0.016	0.03	0.049.
LU	0.00011	0.0003	0.0012	0.0037	0.0081	0.019
LU-90	0.00036	0.001	0.0041	0.012	0.026	0.055
LU-45 (A)	0.024	0.035	0.055	0.08	0.11	0.079
LU-45 (B)	0.025	0.035	0.057	0.084	0.11	0.13

Виконано розрахунки для матеріалу LU, коли вісь ортотропії з максимальною жорсткістю матеріалу нахилена під кутом 45° до Ox (такий матеріал позначено через LU-45). Результати обчислень відносних КІН F_{II} для лівої (A) і правої (B) вершин тріщини зображено відповідно на рис. 2***а*** і рис. 2***б***. Для цього випадку КІН K_I для анізотропних матеріалів виявились відмінними від нуля (у тому числі за контакту берегів тріщин, що узгоджується з результатами [12]). Максимальні значення величини $\max|F_I|$ для вершини A залежно від відносної відстані тріщини до штампа $0 < y_c/\ell < 2$ при $a/\ell = 0.05, 0.1, 0{,}25, 0.5, 0.75, 1$ відповідно є 0.012, 0.017, 0.027, 0.04, 0.055, 0.039. Для вершини B (правої) відповідні максимальні значення $\max|F_I|$ дорівнюють 0.012, 0.018, 0.028, 0.042, 0.053, 0.063.



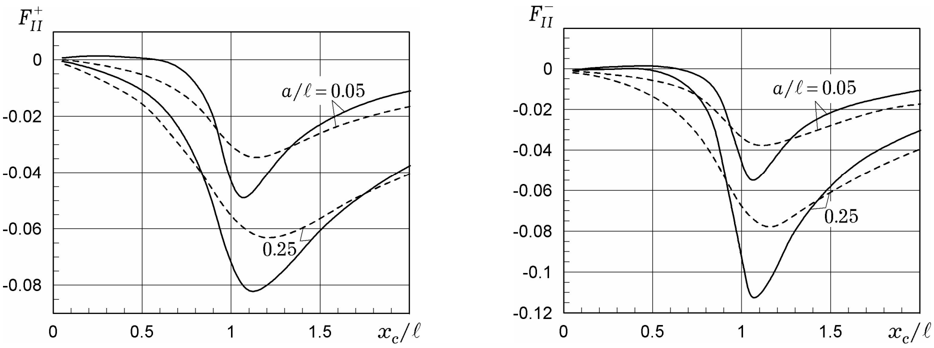
а) *б*)

Рис. 2. Відносні КІН F_{II} для горизонтальної тріщини в пластинці з матеріалу LU-45: .***а***) – для лівої вершини, ***б***) – для правої вершини.



а) *б*)

Рис. 3. Відносні КІН для вертикальної тріщини при $y_b\,/\,\ell = -0.2$ (суцільні лінії) та $y_b\,/\,\ell = -0.5$ (штрихові лінії) у матеріалі LU: ***а***) – для нижньої вершини, ***б***) – для верхньої вершини.

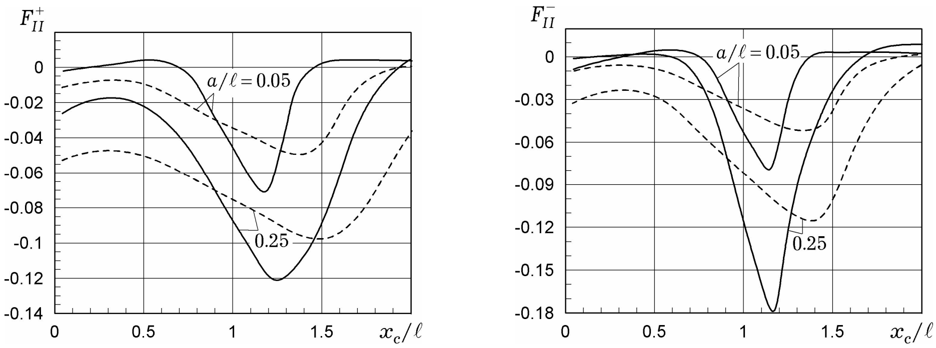


а) *б*)

Рис. 4. Відносні КІН для вертикальної тріщини у матеріалі LU-90: ***а***) – у нижній вершині, ***б***) – у верхній вершині.

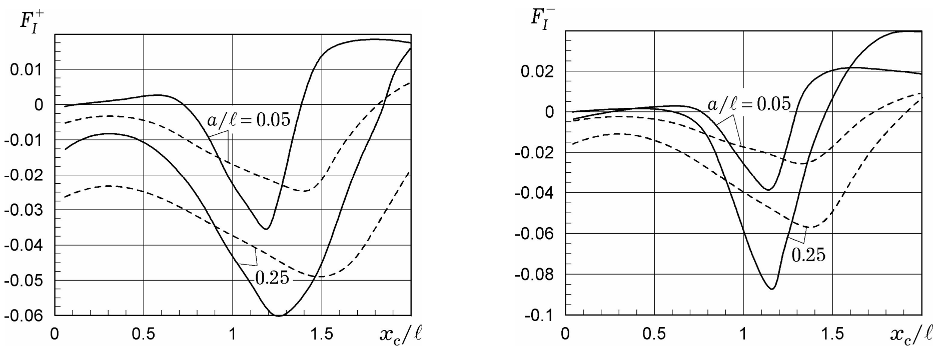
На основі розрахунків для тріщин, паралельних до межі півплощини, можна зробити такі висновки: анізотропія істотно впливає на розподіл напружень біля тріщин; КІН K_{II} є найменшими у випадку, коли жорсткість матеріалу є максимальною у вертикальному напрямку; КІН є найбільшими, коли вісь ортотропії з максимальною жорсткістю матеріалу нахилена під кутом 45° до межі пластинки; для композитних матеріалів при контакті берегів тріщин біля вершин КІН K_I є відмінними від нуля.

Розраховано КІН для вертикальної тріщини при $a/\ell = 0.05,\ 0.25$. Відносні КІН F_{II} для матеріалів LU, LU-90, LU-45 у нижній вершині тріщини наведено на рис. 3***а***–рис. 5***а***, де суцільним кривим відповідає відношення $y_b/\ell = -0.2$, а штриховим – $y_b/\ell = -0.5$ (y_b – координата верхньої вершини тріщини). Аналогічні дані для верхньої вершини наведено на рис. 3***б***–рис. 5***б***. Результати для ізотропного матеріалу практично збігаються з отриманими в роботі [9] для штампа, який не повертається.



а) ***б***)

Рис. 5. Відносні КІН F_{II} для вертикальної тріщини для матеріалу LU-45: ***а***) – у нижній вершині, ***б***) – у верхній вершині.



а) ***б***)

Рис. 6. Відносні КІН F_I для вертикальної тріщини для матеріалу LU-45: ***а***) – у нижній вершині, ***б***) – у верхній вершині.

Значення відносних КІН F_I для матеріалу LU-45 наведено на рис. 6. У цьому випадку береги контактують в околі верхньої вершини тріщини, причому відмінними від нуля виявились також і КІН K_I.

Висновки. Розроблено алгоритм визначення напружень біля тріщин в анізотропній півплощині, яка взаємодіє з плоским гладким штампом, з урахуванням контакту берегів тріщин. Алгоритм базується на методі інтегральних рівнянь, ядра яких побудовано так, щоб умови на межі півплощини, в тому числі й під штампом, задовольнялись тотожно. Виконано дослідження КІН для тріщин з урахуванням контакту їх берегів. Встановлено, що анізотропія істотно впливає на напруження біля тріщин, а найбільші КІН виникають біля тріщин, якщо армувальні елементи розміщені перпендикулярно або нахилені під деяким кутом до межі півплощини.

1. *Божидарнік В. В., Максимович О. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
2. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.

3. *Дацишин О. П., Глазов А. Ю., Левус А. Б.* Особливості контактування берегів крайової тріщини за рухомого герцівського навантаження // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2013. – **49**, № 5. – С. 31–41.
Те саме: *Datsyshyn O. P., Hlazov A. Yu., Levus A. B.* Specific features of contact of the faces of an edge crack under moving Hertzian loads // Mater. Sci. – 2014. – **49**, No. 5. – P. 589–601.
4. *Дацишин О. П., Марченко Г. П.* Напружений стан півплощини з крайовою пологою тріщиною під герцівським навантаженням (огляд) // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 1. – С. 23–34.
Те саме: *Datsyshyn O. P., Marchenko H. P.* Stressed state of a half plane with shallow edge crack under Hertzian loading (a survey) // Mater. Sci. – 2008. – **44**, No. 1. – P. 22–34.
5. *Калоеров С. А., Авдюшина Е. В., Мироненко А. Б.* Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках. – Донецьк: Донецьк. нац. ун-т, 2013. – 438 с.
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – Москва: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
Те саме: *Lekhnitskii S. G.* Anisotropic plates. – New York etc.: Gordon and Breach Sci. Pub., 1968. – 534 p.
7. *Максимович О. В., Лавренчук С. В., Соляр Т.Я.* Концентрація напружень біля отворів та штампу в анізотропній півплощині // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 76–84.
8. *Максимович О.* Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами при врахуванні контакту їхніх берегів // Вісн. Терноп. держ. техн. ун-ту. – 2009. – **14**, № 3. – С. 36–42.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
Те саме: *Muskhelishvili N. I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1977. – 732 p.
10. *Панасюк В. В., Дацишин А. П., Марченко Г. П.* Контактна задача про дію штампа на границю півплощини, послабленої системою криволінійних тріщин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – **31**, № 6. – С. 7–16.
Те саме: *Panasyuk V. V., Datsyshyn O. P., Marchenko H. P.* Contact problem for a half plane with cracks subjected to the action of a rigid punch on its boundary // Mater. Sci. – 1996. – **31**, No. 6. – P. 667–678.
11. *Саврук М. П., Томчик А.* Тиск з тертям абсолютно жорсткого штампа на пружний півпростір з тріщинами // Фіз-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 3. – С. 5–15.
Те саме: *Savruk M. P., Tomczyk A.* Pressure with friction of a perfectly rigid die upon an elastic half space with cracks // Mater. Sci. – 2010. – **46**, No. 3. – P. 283–296.
12. *Maksymovych O., Pasternak Ia., Sulym H., Kutsyk S.* Doubly periodic cracks in the anisotropic medium with the account of contact of their faces // Acta Mech. Automat. – 2014. – **8**, No. 3. – P. 160–164.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНАМИ

Предложен подход к решению контактной задачи для анизотропной полуплоскости, взаимодействующей с плоским гладким штампом, с учетом контакта берегов трещин. Расчет напряжений возле трещин в анизотропной полуплоскости выполнен на основании метода интегральных уравнений. Ядра уравнений построены так, что условия на прямолинейной границе полуплоскости, в том числе и под штампом, удовлетворяются тождественно. Исследовано влияние анизотропии и контакта берегов трещин на значения коэффициентов интенсивности напряжений.

A CONTACT PROBLEM FOR AN ANISOTROPIC HALF-PLANE WITH CRACKS

An approach to the solution of a contact problem for an anisotropic half-plane, which interacts with a plane smooth punch, is proposed with regard for the contact of the crack faces. Calculation of the stresses near the cracks in the anisotropic half-plane is carried out on the basis of integral equations method. The kernels of the equations are constructed so that the conditions on the rectilinear boundary of the half-plane, including the area under the punch, are satisfied identically. The influence of anisotropy and contact of the crack faces on the stress intensity factors is studied.

[1] Луцьк. нац. техн. ун-т, Луцьк,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
26.10.16