

**ЭФФЕКТИВНОЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ**

*Предложено решение линейной задачи о поведении упругой трехслойной конической оболочки при совместном действии нескольких внешних силовых факторов (равномерного давления, осевого сжатия и крутящего момента), вызывающих потерю устойчивости конструкции. Задачу сведено к интегрированию разрешающего сингулярного обыкновенного дифференциального уравнение шестого порядка с переменными коэффициентами. Сопоставлены решения с использованием методов фазовых интегралов (метод ВКБ), гибридного ВКБ-Галеркин метода и метода конечных разностей. Показано преимущество асимптотического гибридного подхода для решения данного класса уравнений. Проанализировано рациональное соотношение толщин и модулей упругости слоев трехслойной конической оболочки, когда конструкция наиболее устойчива к заданному виду внешнего нагружения. Обсуждена проблема построения граничных поверхностей, отделяющих области устойчивости и неустойчивости конструкции. Подтверждена эффективность трехслойных оболочек в качестве силовых элементов, работающих на устойчивость.*

**Ключевые слова:** *трехслойная коническая оболочка, комбинированное нагружение, устойчивость оболочки, гибридный ВКБ-Галеркин метод, граничная поверхность.*

**Введение.** Современные инженерные конструкции должны обладать высокой прочностью и жесткостью при минимальной материалоемкости. Такие свойства присущи многослойным конструкциям, среди которых особое место занимают трехслойные оболочки, состоящие из двух тонкостенных достаточно жестких несущих слоев и слоя-заполнителя малых плотности и жесткости.

Существенный вклад в решение задач устойчивости однородных и многослойных оболочек внесли многие отечественные и зарубежные ученые. Здесь сошлемся лишь на работы [4, 10, 11, 16, 22] и исследования устойчивости трехслойных оболочек Г. В. Закирова [9], С. А. Амбарцумяна [2], Э. И. Григолюка, П. П. Чулкова [5], Я. М. Григоренко [6], А. Н. Андреева [3], С. Н. Сухина [12], E. Tertel, P. Kuryło [23], M. A., Boorboor Ajdari, S. Jalili, M. Jafari, J. Zamani and M. Shariyat [14] и др.

Следует отметить, что задача устойчивости трехслойных конических оболочек при совместном действии трех нагрузок даже в линейной постановке изучена недостаточно и представляет научный и практический интерес, особенно при построении приближенных аналитических решений и аппроксимации граничной поверхности, отделяющей области устойчивости и неустойчивости исследуемой системы.

Очень важно здесь свести полную систему уравнений устойчивости трехслойной оболочки, приведенную в монографии Э. И. Григолюка, П. П. Чулкова [5, с. 142], к разрешающему сингулярному обыкновенному дифференциальному уравнению шестого порядка относительно функции перемещений с переменными коэффициентами. Аналоги такого разрешающего уравнения известны лишь для однослойных оболочек [4, 10].

Для построения эффективного приближенного аналитического решения задачи использовали три способа. Первый основан на асимптотическом подходе на базе метода фазовых интегралов (в литературе именуемый приближением Лиувилля–Грина, методом ВКБ (Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна)

---

\* grk@znu.edu.ua

и др.) [13], эффективность которого для расчета устойчивости конических оболочек с различными структурными характеристиками продемонстрирована в монографии [10]. Второй включает гибридный ВКБ-Галеркин метод, идея которого берет начало с работ J. F. Geer, C. M. Andersen [15], сочетающий метод возмущений и принцип ортогонализации по Галеркину. Гибридный метод усовершенствовали [7, 8, 17–20] для решения прикладных задач математической физики, которые свели к сингулярным линейным и, в сочетании с методом возмущений – с нелинейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, в том числе, к решению задачи устойчивости однородной конической оболочки [8, 17]. Третий реализует численный метод конечных разностей. Сравнивая решения, полученные указанными методами, выявили наиболее эффективный.

Ниже проанализировано влияние геометрических и жесткостных параметров оболочки на её устойчивость при совместном действии трех нагрузок, вызывающих потерю устойчивости, а также найдено рациональное соотношение толщин слоев и их жесткостей.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим устойчивость тонкой упругой трехслойной усеченной конической оболочки кругового сечения при совместном действии равномерного внешнего давления, осевого сжатия и кручения. Стенки оболочки состоят из изотропных несущих слоев и трансверсально изотропного заполнителя. В крайевых условиях предполагаем, что торцы оболочки свободно оперты, а также имеется диафрагма бесконечной жесткости, препятствующая относительному сдвигу несущих слоев вдоль края оболочки [5, с. 63].

Следуя работе [5], для несущих слоев используем гипотезу Кирхгофа–Лява прямой нормали, а для заполнителя – гипотезу о несжимаемости материала в поперечном направлении. Дополнительно предполагаем, что деформация поперечного сдвига по толщине заполнителя распределена по некоторому известному закону  $\phi(z)$ . Для оболочки принимаем приведенные коэффициент Пуассона и модуль упругости.

**2. Физические характеристики трехслойной оболочки.** Несущий слой оболочки, расположенный со стороны внешней нормали, именуем первым, со стороны внутренней – вторым, а заполнитель – третьим. Введем обозначения [5, с. 50]:  $h$  – толщина стенки оболочки;  $h_j$  – толщины слоев;

$t_j = h_j h^{-1}$  – безразмерные толщины слоев;  $E_j$  и  $\nu_j$  – модули упругости и

коэффициенты Пуассона слоев;  $\rho_j = \frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2} \right)^{-1}$ ,  $j = 1, 2, 3$  – без-

размерные жесткостные характеристики;  $\nu = \sum_{j=1}^3 \frac{E_j h_j \nu_j}{1 - \nu_j^2} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2} \right)^{-1}$ ,

$E = (1 - \nu^2) h^{-1} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{E_j h_j}{1 - \nu_j^2} \right)$  – приведенные коэффициент Пуассона и модуль упругости оболочки;  $G$  – модуль сдвига оболочки;

$$\phi_1'(z) = 1 \text{ и } \phi_2'(z) = \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right). \quad (1)$$

Здесь используем первый закон распределения  $\phi(z)$ , который отвечает ситуации, когда нормаль к исходной поверхности в заполнителе при деформации оболочки поворачивается, но не искривляется, не деформируется в поперечном направлении. При этом основные параметры, соответствующие первому закону (1), определяют формулы [5, с. 67]

$$\theta_1 = \Theta_1, \quad \theta_2 = \Theta_1 + \Theta_2, \quad \theta_3 = \Theta_1 + 2\Theta_2 + \Theta_3 = \Theta,$$

$$\vartheta = \frac{\theta_1 \theta_3 - \theta_2^2}{\theta_1 \theta_3} = \frac{\Theta_1 \Theta_3 - \Theta_2^2}{\Theta_1 \Theta}, \quad (2)$$

а цилиндрическую жесткость составной оболочки – формула

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \Theta, \quad (3)$$

где  $\Theta_1 = t_3^2 (1 + 2(\rho_1 + \rho_2) - 3(\rho_1 - \rho_2)^2)$ ,  $\Theta_2 = 3 t_3 \rho_3 (t_1 \rho_1 + t_2 \rho_2) + 6 \rho_1 \rho_2 t_3 (t_1 + t_2)$ ,  $\Theta_3 = 4(\rho_1 t_1^2 + \rho_2 t_2^2) - 3 t_3^2 (\rho_1 t_1 - \rho_2 t_2)^2$ . Введем сдвиговой параметр, который для первого закона (1) имеет вид [5, с. 69]

$$\beta = \frac{12G t_3(1-\nu^2)}{E\Theta_1}. \quad (4)$$

**3. Разрешающее дифференциальное уравнение.** Систему уравнений устойчивости трехслойной конической оболочки берем в форме [5, с. 142]

$$\begin{cases} D \left( 1 - \frac{\vartheta h^2}{\beta} \Delta \right) \Delta^2 \psi + \frac{\text{tg } \alpha}{s} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2} F = g, \\ \Delta^4 F = E h \frac{\text{tg } \alpha}{s} \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( 1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \psi, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\alpha$  – угол у основания конуса;  $s$  – расстояние по образующей конуса от вершины до точки срединной поверхности;  $l_0$  и  $l_1$  – расстояния до меньшего и большего оснований соответственно;  $x = s/l_1$ ;  $\varphi$  – полярный угол;  $n$  – число волн в окружном направлении при выпучивании оболочки;  $w$  – нормальное перемещение точек срединной поверхности;  $F$  – функция усилий;  $q$  – внешнее нормальное давление, действующее как на боковую поверхность, так и на основания оболочки;  $T$  – осевая сила, перпендикулярная основаниям;  $M$  – крутящий момент;  $w = \left( 1 - \frac{h^2}{\beta} \Delta \right) \psi$  – зависимость между функциями  $w$  и  $\psi$ ;  $g$  – фиктивна поперечная нагрузка, равная

$$g = -(N_1 \kappa_1 + N_2 \kappa_2 + 2 T_{12} \kappa_{12}), \quad (6)$$

$N_1, N_2, T_{12}$  – погонные нормальные и касательные усилия в основном состоянии,

$$N_1 = \frac{q}{2 \text{tg } \alpha} \left( \frac{l_0^2}{l_1 x} - x l_1 \right) - \frac{T}{\pi l_1 x \sin 2\alpha}, \quad N_2 = -\frac{q l_1 x}{\text{tg } \alpha}; \quad T_{12} = \frac{M}{\pi x^2 l_1^2 \cos^2 \alpha}, \quad (7)$$

$$\kappa_1 = -\frac{1}{l_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{l_1^2} \cdot \left( \frac{1}{x^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\kappa_{12} = -\frac{1}{l_1^2 x \cos \alpha} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right); \quad (8)$$

$\Delta$  – оператор, который определяет формула

$$\Delta = \frac{1}{l_1^2} \left( \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right). \quad (9)$$

Следуя работам [4, с. 629] и [10, с. 55], для получения решения системы (5) функции  $\psi$  и  $F$  представим в виде

$$\psi(x, \varphi) = \Psi(x) \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos(\gamma(1-x) + n\varphi), \quad (10)$$

$$F(x, \varphi) = \Phi(x) \varepsilon^2 l_1 E h \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos(\gamma(1-x) + n\varphi), \quad (11)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{h \operatorname{ctg} \alpha}{l_1 \sqrt{12(1-v^2)}}}, \quad \gamma = \frac{n}{\cos \alpha} \gamma_1, \quad (12)$$

$\gamma_1$  – тангенс угла наклона гребня волны к образующей.

Предполагаем, что в комбинации внешних нагрузок превалирует давление. В этом случае волнообразование по длине оболочки выражено намного слабее, чем в окружном направлении. При этом для оболочек средней длины число волн в последнем случае таково, что  $n^2 \gg 1$ , а в продольном направлении образуется одна полуволна.

Как и в работах [10] и [4], введем безразмерные параметры  $\delta = n^2 / \cos^2 \alpha$ ,  $\rho = \varepsilon \delta$  и безразмерные усилия

$$\chi = \frac{q l_1}{E h \varepsilon^3 \operatorname{tg}^3 \alpha}, \quad \eta = \frac{T \cos \alpha}{2\pi E h \varepsilon^2 l_1 \sin^3 \alpha}, \quad \lambda = \frac{M}{2\pi l_1^2 E h \varepsilon^{5/2} \sin^2 \alpha}, \quad (13)$$

а также параметр сдвига [9]

$$K = \frac{h^2}{\beta l_1^2}. \quad (14)$$

Систему уравнений (5) с учетом соотношений (3), (6)–(14) интегрируем по координате  $\varphi$  методом Бубнова–Галеркина, т.е. обе части каждого из уравнений системы умножаем на  $\cos(\gamma(1-x) + n\varphi)$  и интегрируем от 0 до  $2\pi$ , избавляясь от переменной  $\varphi$ . После преобразований, осуществленных с помощью пакета компьютерной алгебры MAPLE, учитывая, что  $\varepsilon = 1$ , приходим к системе, где удерживаются слагаемые порядка  $\varepsilon$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{\varepsilon \gamma^2}{K} \Phi + \frac{\varepsilon}{K} \Phi' + \left\{ \frac{\rho^3 \vartheta \Theta}{x^5} + \left( -\frac{20\vartheta}{x^2} + \frac{1}{K} + 3\vartheta \gamma^2 \right) \frac{\Theta \varepsilon \rho^2}{x^3} - \frac{\chi \rho^2}{x^2} - \frac{\lambda \gamma \rho^{3/2}}{x^4} + \right. \\ & + \left( -\gamma^2 + \frac{6}{x^2} \right) \frac{\eta \rho}{x^2} + \left( -\frac{3\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^2 l_0^2}{2l_1^2 x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{K} - \frac{3l_0^2}{l_1^2 x^4} \right) \chi \varepsilon \rho + \\ & + \left( -\frac{2}{x^2} - 1 - \gamma^2 \right) \frac{\gamma \lambda \rho^{1/2}}{x^2} + \left( -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{K} - \gamma^2 \right) \gamma^2 \eta \varepsilon \left. \right\} \Psi + \\ & + \left\{ \frac{9\varepsilon \rho^2 \vartheta \Theta}{x^4} + \left( \frac{2\varepsilon \chi l_0^2}{l_1^2} - 4\eta \right) \frac{\rho}{x^3} + \left( 3\gamma^2 - \frac{2}{x^2} \right) \frac{\eta \varepsilon}{x} \right\} \Psi' + \\ & + \left\{ -\frac{3\rho^2 \vartheta \Theta}{x^3} + \left( \frac{3}{2} - \frac{l_0^2}{2l_1^2 x^2} \right) \chi \rho + \eta \rho + \frac{3\lambda \gamma \rho^{1/2}}{x^2} + \left( 6\gamma^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{K} \right) \eta \right\} \varepsilon \Psi'' - \\ & - \frac{\eta \varepsilon}{x} \Psi''' - \eta \varepsilon \Psi^{IV} = 0; \\ & \frac{\varepsilon \rho^2}{x^3} \Phi + \left\{ \left( \frac{\gamma^2}{x^2} - \frac{6}{x^4} \right) \rho + \left( \gamma^4 + \frac{\gamma^2}{K} + \frac{2\gamma^2}{x^2} \right) \varepsilon \right\} \Psi + \left\{ \frac{4\rho}{x^3} + \left( \frac{2}{x^3} - \frac{3\gamma^2}{x} \right) \varepsilon \right\} \Psi' + \\ & + \left\{ -\frac{\rho}{x^2} + \left( -\frac{1}{K} - 6\gamma^2 - \frac{2}{x^2} \right) \varepsilon \right\} \Psi'' + \frac{\varepsilon}{x} \Psi''' + \varepsilon \Psi^{IV} = 0. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Исключив из системы (15) функции  $\Phi(x)$ , получим разрешающее дифференциальное уравнение шестого порядка относительно функции перемещения  $\Psi(x)$  с переменными коэффициентами:

$$Q_0(x)\Psi + Q_1(x)\Psi' + Q_2(x)\Psi'' + Q_3(x)\Psi''' + Q_4(x)\Psi^{IV} + Q_5(x)\Psi^V + Q_6(x)\Psi^{VI} = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{\rho^5 \vartheta \Theta}{x^5} + \left( -\frac{20\vartheta}{x^2} + \frac{1}{K} + 3\vartheta\gamma^2 \right) \frac{\Theta \epsilon \rho^4}{x^3} - \frac{\chi \rho^4}{x^2} - \frac{\lambda \gamma \rho^{7/2}}{x^4} + \\ &+ \left( -\gamma^2 + \frac{6}{x^2} \right) \frac{\eta \rho^3}{x^2} + \left( -\frac{3\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^2 l_0^2}{2l_1^2 x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{K} - \frac{3l_0^2}{l_1^2 x^4} \right) \chi \epsilon \rho^3 + \\ &+ \left( -\frac{2}{x^2} - 1 - \gamma^2 \right) \frac{\gamma \lambda \rho^{5/2}}{x^2} + \left( -\frac{2}{x^2} - \frac{1}{K} - \gamma^2 \right) \gamma^2 \eta \epsilon \rho^2 + \\ &+ \left( -\frac{6\gamma^2}{x} + \frac{12}{x^3} + x\gamma^4 \right) \rho + \left( x^3 \gamma^6 - 4x\gamma^4 + \frac{x^3 \gamma^4}{K} - \frac{6x\gamma^2}{K} \right) \epsilon, \\ Q_1(x) &= \frac{9\epsilon \rho^4 \vartheta \Theta}{x^4} + \left( \frac{2\epsilon \chi l_0^2}{l_1^2} - 4\eta \right) \frac{\rho^3}{x^3} + \left( 3\gamma^2 - \frac{2}{x^2} \right) \frac{\eta \epsilon \rho^2}{x} + \left( 2\gamma^2 - \frac{12}{x^2} \right) \rho + \\ &+ \left( 4\gamma^2 - 9x^2 \gamma^4 - \frac{6x^2 \gamma^2}{K} \right) \epsilon, \\ Q_2(x) &= -\frac{3\rho^4 \vartheta \Theta \epsilon}{x^3} + \left( \frac{3}{2} - \frac{l_0^2}{2l_1^2 x^2} \right) \chi \epsilon \rho^3 + \eta \epsilon \rho^3 + \frac{3\epsilon \lambda \gamma \rho^{5/2}}{x^2} + \left( \frac{6}{x} - 2x\gamma^2 \right) \rho + \\ &+ \left( 6\gamma^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{K} \right) \epsilon \eta \rho^2 + \left( -7x^3 \gamma^4 - \frac{2x^3 \gamma^2}{K} + 44x\gamma^2 + \frac{6x}{K} \right) \epsilon, \\ Q_3(x) &= -\frac{\eta \epsilon \rho^2}{x} - 2\rho + \left( 40\gamma^2 x^2 + \frac{6x^2}{K} \right) \epsilon, \\ Q_4(x) &= -\eta \epsilon \rho^2 + \rho x + \left( -8x + 7x^3 \gamma^2 + \frac{x^3}{K} \right) \epsilon, \quad Q_5(x) = -7x^2 \epsilon, \quad Q_6(x) = -x^3 \epsilon. \end{aligned}$$

В краевых условиях предполагаем, что торцы свободно оперты, а также имеется диафрагма бесконечной жесткости, препятствующая относительно сдвигу несущих слоев вдоль края оболочки:

$$\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} = 0 \quad \text{при } x = \frac{l_0}{l_1} \text{ и } x = 1. \quad (17)$$

**4. Применение ВКБ метода для решения уравнения (16).** Такое решение строим, используя результаты работ [10, 13]. Поскольку  $n^2 \gg 1$ , то параметр  $\delta = n^2 / \cos^2 \alpha$  является большим. Указанный метод предполагает представление решения уравнения (16) в виде

$$\Psi(x) = \exp \left( \int_{l_0/l_1}^x \varphi(t) dt \right), \quad (18)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \delta^{1-k}. \quad (19)$$

После подстановки (18) и (19) в уравнение (16) и деления полученного выражения на функцию  $\exp\left(\int_{l_0/l_1}^x \varphi(t) dt\right)$  преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} & \delta^6 \left[ -x^3 \varepsilon (\varphi_0(x))^6 - \eta \varepsilon^3 (\varphi_0(x))^4 - \frac{3\varepsilon^5 \vartheta \Theta}{x^2} (\varphi_0(x))^2 \right] + Q_0(x) + \\ & + \delta^5 f_5(x, \varphi_0, \varphi_1) + \delta^4 f_4(x, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2) + \dots + \delta f_1(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_5) + \\ & + \bar{f}_1(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_6) + \delta^{-1} \bar{f}_{-1}(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_7) + \dots + \\ & + \delta^{4,5} f_{4,5}(x, \varphi_0) + \delta^{3,5} f_{3,5}(x, \varphi_0, \varphi_1) + \dots + \delta^{0,5} f_{0,5}(x, \varphi_0, \dots, \varphi_4) + \\ & + \delta^{-0,5} \bar{f}_{-0,5}(x, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_5) + \dots = 0. \end{aligned}$$

В нулевом приближении получаем алгебраическое уравнение шестой степени относительно функции  $\varphi_0(x)$ :

$$\delta^6 \left[ -x^3 \varepsilon (\varphi_0(x))^6 - \eta \varepsilon^3 (\varphi_0(x))^4 - \frac{3\varepsilon^5 \vartheta \Theta}{x^2} (\varphi_0(x))^2 \right] + Q_0(x) = 0. \quad (20)$$

После замены  $\bar{\varphi}(x) = (\varphi_0(x))^2$  порядок уравнения (20) понижается до третьего. В данном случае уравнение третьей степени имеет отрицательно определенный дискриминант на отрезке  $[l_0/l_1, 1]$ , обладает одним вещественным и двумя комплексно сопряженными корнями. Функция, являющаяся его вещественным корнем, меняет знак при переходе через некоторую точку  $x_1 \in [l_0/l_1, 1]$ . Поэтому обратная замена приводит к корням уравнения (20):

$$\begin{aligned} \varphi_{0,k_1}(x) &= \begin{cases} \pm F_1(x), & x \in [x_0, x_1], \\ \pm i F_1(x), & x \in [x_1, 1] \end{cases} \quad (k_1 = 1, 2); \\ \varphi_{0,k_2}(x) &= \pm F_2(x) \pm i F_3(x) \quad (k_2 = \overline{3, 6}). \end{aligned} \quad (21)$$

Если в разложении (19) удерживать только нулевое приближение, то асимптотическим ВКБ-решением уравнения (16) будет функция

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^6 C_k \omega_k(x); \quad (22)$$

$$\omega_1(x) = \begin{cases} \text{sh } S_1(x), & x < x_1, \\ \sin S_1(x), & x \geq x_1, \end{cases} \quad \omega_2(x) = \begin{cases} \text{ch } S_1(x), & x < x_1, \\ \cos S_1(x), & x \geq x_1, \end{cases}$$

$$\omega_3(x) = e^{S_2(x)} \sin S_3(x), \quad \omega_4(x) = e^{S_2(x)} \cos S_3(x),$$

$$\omega_5(x) = e^{-S_2(x)} \sin S_3(x), \quad \omega_6(x) = e^{-S_2(x)} \cos S_3(x),$$

где

$$S_1(x) = \delta \int_{x_1}^x F_1(t) dt, \quad S_k(x) = \delta \int_{l_0/l_1}^x F_k(t) dt \quad (k = 2, 3).$$

Подставляя в граничные условия (17) функцию (22), приходим к системе шести линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $C_k$ ,  $k = \overline{1, 6}$ . Приравнивая ее определитель к нулю, получаем характеристическое уравнение для определения критических комбинаций нагузков.

**5. Использование гибридного ВКБ-Галеркин метода для решения уравнения (16).** Первый шаг гибридного асимптотического подхода пред-

полагает применение метода ВКБ, результатом которого является нахождение конечного числа функций  $\varphi_k(x)$  разложения (19). На втором шаге эти функции используем как координатные для метода Галеркина. В данном случае в качестве координатной  $\varphi_0(x)$  рассматриваем функцию  $F_1(x)$  из равенств (21). Решение уравнения (16) представляем в виде

$$\Psi(x) = \exp \left( \int_{b/h}^x \Lambda(\delta) \varphi_0(t) dt \right), \quad (23)$$

где  $\Lambda(\delta)$  – неизвестная функция параметра  $\delta$ . После подстановки функции  $\Psi(x)$  в виде (23) в уравнение (16) левая часть уравнения (16) имеет вид

$$\exp \left( \int_{b/h}^x \Lambda(\delta) \varphi_0(t) dt \right) R(x, \varphi_0, \varphi_0', \dots, \varphi_0^{(5)}, \Lambda, \delta),$$

где

$$R(x, \varphi_0, \varphi_0', \dots, \varphi_0^{(5)}, \Lambda, \delta) = \sum_{k=1}^6 \Lambda^k Y_k(x, \varphi_0, \dots, \varphi_0^{(6-k)}) + Y_0(x), \quad (24)$$

$$Y_0(x) = Q_0(x).$$

В общем случае функция (23) не удовлетворяет уравнению (16), а функция  $R$  вида (24) не обращается в нуль. В соответствии с методом Галеркина значения  $\Lambda(\delta)$  находим из условия ортогональности функций  $R$  и  $\varphi_0$ , т. е.

$$\int_{b/h}^1 \varphi_0(x) R(x, \varphi_0, \varphi_0', \dots, \varphi_0^{(5)}, \Lambda, \delta) dx = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) преобразуем к виду

$$\Lambda^6 a_6 + \dots + \Lambda a_1 + a_0 = 0, \quad (26)$$

$$a_s = \int_{b/h}^1 \varphi_0(x) Y_s dx \quad (s = \overline{0, 6}).$$

Алгебраическое уравнение (26) имеет два вещественных корня  $\Lambda_1, \Lambda_2$  и две пары комплексно сопряженных корней  $\Lambda_{3,4} = \xi_1 \pm i\zeta_1$ ,  $\Lambda_{5,6} = \xi_2 \pm i\zeta_2$ .

Таким образом, решение гибридного ВКБ-Галеркин метода имеет вид

$$\Psi(x) = C_1 e^{\Lambda_1 \psi(x)} + C_2 e^{\Lambda_2 \psi(x)} + e^{\xi_1 \psi(x)} (C_3 \sin \zeta_1 \psi(x) + C_4 \cos \zeta_1 \psi(x)) + e^{\xi_2 \psi(x)} (C_5 \sin \zeta_2 \psi(x) + C_6 \cos \zeta_2 \psi(x)), \quad (27)$$

где  $\psi(x) = \int_{b/h}^x \varphi_0(t) dt$ . Учитывая краевые условия (17) для функции  $\Psi(x)$

вида (27), приходим к характеристическому уравнению.

**6. Применение метода конечных разностей для решения уравнения (16).** Метод конечных разностей (МКР) используем для сравнения результатов, полученных аналитическим и численными методами. Для обыкновенного дифференциального уравнения шестого порядка МКР предполагает использование центральных конечных разностей третьего порядка во внутренних точках разбиения отрезка  $[b/h; 1]$ :

$$\Psi'(x_k) \approx \frac{1}{60H} (\Psi_{k+3} - 9\Psi_{k+2} + 45\Psi_{k+1} - 45\Psi_{k-1} + 9\Psi_{k-2} - \Psi_{k-3}),$$

$$\begin{aligned}
\Psi''(x_k) &\approx \frac{1}{180H^2} (2\Psi_{k+3} - 27\Psi_{k+2} + 270\Psi_{k+1} - 490\Psi_k + \\
&\quad + 270\Psi_{k-1} - 27\Psi_{k-2} + 2\Psi_{k-3}), \\
\Psi'''(x_k) &\approx \frac{1}{8H^3} (-\Psi_{k+3} + 8\Psi_{k+2} - 13\Psi_{k+1} + 13\Psi_{k-1} - 8\Psi_{k-2} + \Psi_{k-3}), \\
\Psi^{(4)}(x_k) &\approx \frac{1}{6H^4} (-\Psi_{k+3} + 12\Psi_{k+2} - 39\Psi_{k+1} + 56\Psi_k - 39\Psi_{k-1} + 12\Psi_{k-2} - \Psi_{k+3}), \\
\Psi^{(5)}(x_k) &\approx \frac{1}{2H^5} (\Psi_{k+3} - 4\Psi_{k+2} + 5\Psi_{k+1} - 5\Psi_{k-1} + 4\Psi_{k-2} - \Psi_{k-3}), \\
\Psi^{(6)}(x_k) &\approx \frac{1}{H^6} (\Psi_{k+3} - 6\Psi_{k+2} + 15\Psi_{k+1} - 20\Psi_k + 15\Psi_{k-1} - 6\Psi_{k-2} + \Psi_{k+3}), \quad (28)
\end{aligned}$$

где  $\Psi(x_k) = \Psi_k$ ,  $x_k = a + kH$ ,  $k = \overline{1, N-1}$ ,  $H = L/N$ ,  $L = 1 - l_0/l_1$ . Из представления краевого условия (17) конечными разностями второго порядка следуют соотношения

$$\Psi_0 = 0, \quad \Psi_{-2} = -\Psi_2, \quad \Psi_{-1} = -\Psi_1, \quad (29)$$

$$\Psi_N = 0, \quad \Psi_{N+2} = -\Psi_{N-2}, \quad \Psi_{N+1} = -\Psi_{N-1}. \quad (30)$$

После подстановки конечных разностей (28) в уравнение (16) и исключения из них с помощью (29), (30) переменных  $\Psi_s$  с номерами  $s = -2, -1, 0, N, N+1, N+2$  получаем систему однородных линейных алгебраических уравнений  $N-1$  порядка. Приравнявая определители этой системы к нулю, приходим к характеристическому уравнению относительно параметров волнообразования  $\eta, \lambda, \chi, n, \gamma_1$ .

Результатом применения каждого из подходов является получение характеристического трансцендентного уравнения для отыскания критической комбинации нагрузок при минимизации волнового числа в окружном направлении.

## 7. Числовые результаты.

### 7.1. Сравнение результатов, полученных разными методами.

Численному анализу подвергали оболочки с характеристиками  $\alpha = 60^\circ$ ,  $E_1 = E_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu = 0.3$ ,  $l_1 = 182$  см,  $l_0/l_1 = 0.65$ ,  $h = 0.5$  см,  $h_1 = h_2$  с учетом уравнений (2), (4).

В таблице приведены значения безразмерного критического давления  $\chi$ , полученные тремя методами, при разных значениях безразмерных крутящего момента  $\lambda$  и осевого усилия  $\eta$ . Выявили, что из двух аналитических методов (ВКБ и ВКБ-Галеркин) наиболее удовлетворительно согласуются результаты, полученные численным МКР и ВКБ-Галеркин методами.

**Сравнение результатов, полученных разными методами**

$\lambda$	$\eta$	$n$	$\chi$		
			ВКБ-Галеркин метод	МКР	ВКБ-метод
0.1	0	9	35.63027	35.61124	35.40195
	0.5	9	29.92725	29.92626	29.42852
1	0	9	35.32516	35.29868	34.90313
	0.5	9	29.5125	29.4943	29.17819
2	0	9	34.41797	34.37352	33.76563
	0.5	9	28.28516	28.2568	27.88398



**7.2. Граничная поверхность, отделяющая области устойчивости и неустойчивости.** Из краевых условий (3) для функции  $\Psi(x)$ , представленной в виде (4), можно получить характеристическое трансцендентное уравнение

$$\Delta_1(\eta, \lambda, \chi, n, \gamma_1) = 0. \quad (31)$$

Для отыскания критической комбинации нагрузок (13), удовлетворяющих (31), необходимо найти то количество волн  $n = n^*$  в окружном направлении и тангенс угла наклона  $\gamma_1 = \gamma_1^*$  гребня выпученной волны к образующей, которые соответствуют наименьшему значению безразмерного давления  $\chi = \chi_0$  при фиксированных значениях безразмерных крутящего момента  $\lambda = \lambda_0$  и сжимающего усилия  $\eta = \eta_0$ . Множество точек, подчиняющихся уравнению

$$\Delta_2(\eta_0, \lambda_0, \chi_0) = 0, \quad (32)$$

где  $\Delta_2(\eta_0, \lambda_0, \chi_0) = \Delta_1(\eta_0, \lambda_0, \chi_0, n^*, \gamma_1^*)$ , образует граничную поверхность (поверхность устойчивости), которая отделяет область устойчивости от области неустойчивости конической трехслойной оболочки.

На рис. 1 изображены граничная поверхность (32) оболочки (рис 1а) где  $h_1 = h_2$ ,  $h_3/h = 0.6$ ,  $E_3/E_1 = 0.01$ ,  $l_0/l = 0.65$ , ее линии уровня (рис. 1б, в), а также зависимости тангенса угла наклона гребня волны к образующей  $\gamma_1$  от безразмерной осевой силы (рис. 1г).

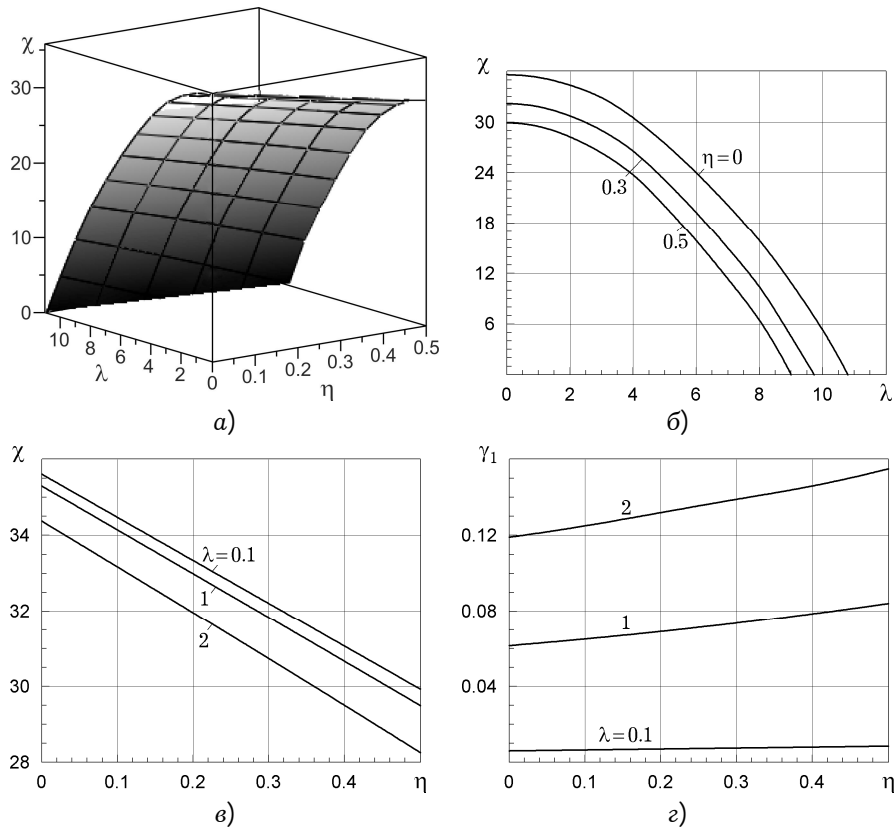


Рис. 1. Граничная поверхность (а), ее линии уровня (б, в) и зависимости тангенса угла наклона гребня выпученной волны к образующей оболочки  $\gamma_1$  (г) от безразмерной осевой силы

Анализируя результаты, пришли к выводу, что с увеличением крутящего момента снижается устойчивость и увеличивается угол наклона выпущенной волны к образующей при заданных значениях осевого усилия.

**7.3. Сравнение полученных решений с результатами других авторов.** Гибридным ВКБ-Галеркин методом и по формулам, приведенным ранее [5, с. 148], получили зависимости безразмерного критического давления  $\chi$  от  $h_3/h_1$ . Поскольку в работе [5] изучали воздействие всестороннего внешнего давления без учета влияния других нагрузок, то гибридный метод применяли при  $\lambda=0$ ,  $\eta=0$  (рис. 2). Как следует из сравнительного анализа, результаты, полученные в данной работе, удовлетворительно качественно и количественно согласуются с литературными [9], что свидетельствует о их достоверности.

**7.4. Влияние параметров конической трехслойной оболочки на устойчивость** изучали при совместном воздействии на нее всестороннего внешнего давления, крутящего момента и осевого сжатия, в зависимости от  $h_3/h_1$  (рис. 3–7). На рис. 3 и 5–7 безразмерное значение крутящего момента  $\lambda=1$ , при этом для линий 1, 4 безразмерное осевое усилие  $\eta=0$ , для линий 2, 5 –  $\eta=0,3$ , для линий 3, 6 –  $\eta=0,5$ . Результаты, приведенные на рис. 3–5, соответствуют оболочкам с внешними слоями одинаковой толщины, где  $h_1=h_2$ , а линиям 4–6 на рис. 6, 7 – разной толщины, где  $h_1=2h_2$ . На рис. 3–6  $l_1/h=364$ , а на рис. 7 для линий 4–6 составляет 182.

Каждая зависимость на рис. 2–7 имеет точку локального максимума, которая соответствует наиболее рациональной устойчивой конструкции оболочки. Также ей соответствует наименьшее значение тангенса угла наклона гребня волны выпучивания к образующей. Это означает, что оболочка соответствующей конструкции способна больше сопротивляться сдвигу.

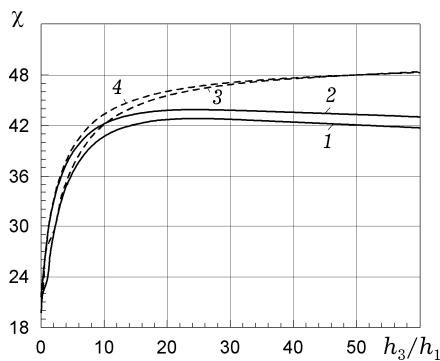


Рис. 2. Сравнительный анализ результатов, полученных гибридным ВКБ-Галеркин методом (линии 2, 4) и по известным формулам [5] (линии 1, 3), при  $E_3/E_1=10^{-2}$  (линии 1, 2) и  $10^{-4}$  (линии 3, 4), где  $l_0/l_1=0.65$

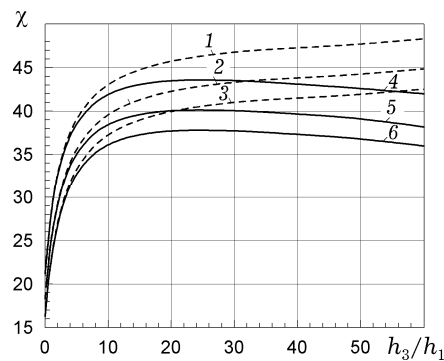


Рис. 3. Влияние относительных жесткости ( $E_3/E_1=10^{-4}$  (линии 1–3) и  $10^{-2}$  (линии 4–6)) и толщины внутреннего слоя  $h_3/h_1$  на критическое давление при  $l_0/l_1=0.65$

Выявили (рис. 3), что трехслойная оболочка более устойчива в случае меньшего относительного модуля упругости  $E_3/E_1$ . При  $E_3/E_1=10^{-2}$  наиболее устойчива оболочка с толщиной заполнителя, составляющей около 93% от общей ее толщины, при заданных значениях  $\lambda$ ,  $\eta$ ,  $\alpha$ ,  $l_0/l_1$ ,  $l_1/h$ ,  $h_2/h_1$  (рис. 2–7); при  $E_3/E_1=10^{-4}$  – около 99% (рис. 3).

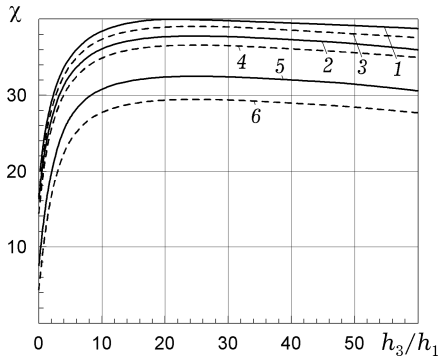


Рис. 4. Влияние безразмерного крутящего момента (1, 2 –  $\lambda = 1$ ; 3, 4 –  $\lambda = 2$ ; 5, 6 –  $\lambda = 5$ ) и осевого усилия (1, 3, 5 –  $\eta = 0,3$ ; 2, 4, 6 –  $\eta = 0,5$ ) на критическое давление оболочки с характеристиками  $E_3/E_1 = 10^{-2}$ ,  $l_0/l_1 = 0,65$

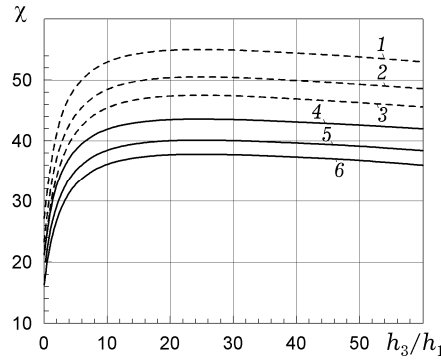


Рис. 5. Влияние относительной длины образующей конической оболочки на критическое давление (1–3 –  $L = 1 - l_0/l_1 = 0,25$ ; 4–6 –  $0,35$ ) для оболочки с параметром  $E_3/E_1 = 10^{-2}$

На рациональную толщину заполнителя наиболее ощутимо влияют физические свойства слоев оболочки (соотношения их модулей упругости) и меньше – значения  $\lambda$ ,  $\eta$ ,  $\alpha$ ,  $l_0/l_1$ ,  $l_1/h$ ,  $h_2/h_1$  (рис. 2–7). Среди оболочек с достаточно относительно толстым заполнителем ( $h_3/h_1 > 5$ ) более устойчива с внешними слоями одинаковой толщины (рис. 6). Для оболочек с заполнителем аналогичной толщины с увеличением общей толщины оболочки, отнесенной к расстоянию от ее мнимой вершины до нижнего основания  $l_1$  (рис. 7), повышается ее устойчивость и увеличивается количество волн в окружном направлении. Для исследованных геометрических и жесткостных параметров конструкций, оболочка с меньшей длиной образующей более устойчива (рис. 5).

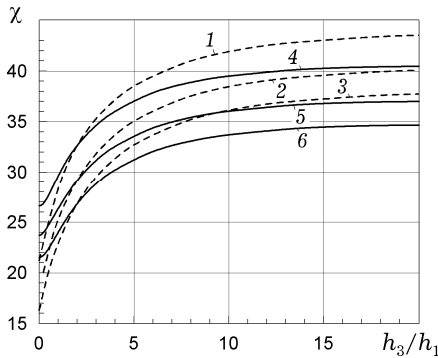


Рис. 6. Влияние толщин внешних слоев трехслойной оболочки на критическое давление (1–3 –  $h_1 = h_2$ ; 4–6 –  $h_1 = 2h_2$ ) оболочки с характеристиками  $E_3/E_1 = 10^{-2}$ ,  $l_0/l_1 = 0,65$

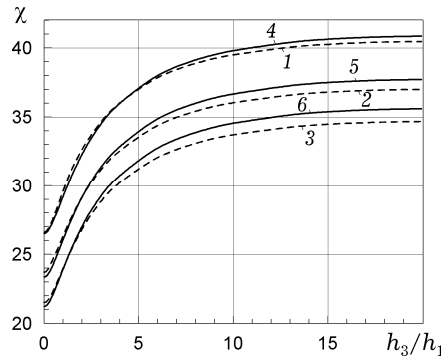


Рис. 7. Влияние толщины трехслойной оболочки  $h$  относительно  $l_1$  на критическое давление (1–3 –  $l_1/h = 364$ ; 4–6 –  $182$ ) оболочки с параметрами  $h_1 = 2h_2$ ,  $E_3/E_1 = 10^{-2}$ ,  $l_0/l_1 = 0,65$

**7.5. Связь волновых характеристик конической трехслойной и однослойной оболочек.** Рассмотрим оболочку с достаточно малой относительной толщиной заполнителя ( $t_3 = h_3/h \rightarrow 0$ ). Предполагаем, что она

имеет симметричную структуру:  $E_1 = E_2$ ,  $\nu_1 = \nu_2$ ,  $h_1 = h_2$ . Из определения параметров сдвига следует, что при  $t_3 \rightarrow 0$  коэффициент сдвига  $K \rightarrow 0$ . Если такая оболочка с достаточно тонким заполнителем имеет диафрагму бесконечной жесткости, препятствующую относительному сдвигу слоев вдоль края оболочки, то при нагружении ее поведение близко к таковому однослойной. Если обе части уравнения (16) умножить на  $K/\varepsilon$ , а затем  $K$  устремить к нулю, то в результате получим уравнение

$$\Psi^{IV} + \frac{6}{x} \Psi''' + \left( \frac{6}{x^2} - 2\gamma^2 + \frac{\eta \rho^2}{x^3} \right) \Psi'' - \frac{6\gamma^2}{x} \Psi' - \bar{Q}_0(x) \Psi = 0, \quad (33)$$

где

$$\bar{Q}_0(x) = \frac{\eta \rho^2 \gamma^2}{x^3} + \frac{\chi \rho^3}{x^3} + \frac{\lambda \gamma \rho^{5/2}}{x^5} - \frac{\rho^4}{x^6} + 6 \frac{\gamma^2}{x^2} - \gamma^4.$$

Абсолютно такое же уравнение получили авторы работы [8], исходя из полной системы уравнений устойчивости однослойной конической оболочки, приведенной А. С. Вольмиром [4, с. 624]. Частные случаи уравнения (33), соответствующие одиночному или парному воздействию нагрузок на однородную оболочку, приведены ранее [4, 5, 10].

Решение задачи устойчивости однородной свободно опертой оболочки можно получить из разрешающего уравнения (33) любым из методов, применяемых к решению уравнения (16), где наиболее эффективный гибридный ВКБ-Галеркин метод.

На рис. 8 построены зависимости, характеризующие связь между волновыми характеристиками однослойной и трехслойной оболочек. Расчеты выполняли для оболочек с параметрами  $\nu = 0.3$ ,  $h = 0.5$  см,  $l_1 = 182$  см,  $l_0/l_1 = 0.65$ ,  $\alpha = 60^\circ$  при  $\lambda = 1$ . Трехслойная оболочка имела симметричную структуру, причем  $E_3/E_1 = 10^{-2}$ , а для однослойной  $E = E_1$ .

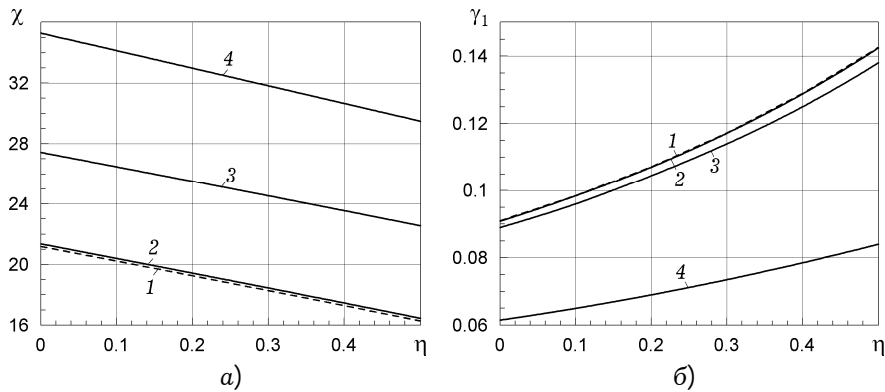


Рис. 8. Зависимости безразмерных критических давлений  $\chi$  (а) и тангенса угла наклона гребня выпученной волны к образующей оболочки  $\gamma_1$  (б) от безразмерного осевого усилия  $\eta$ , построенные для однослойных (линия 1) и трехслойных оболочек с относительными толщинами срединных слоев  $t_3 = h_3/h = 0.01$  (линия 2), 0,3 (линия 3) и 0,6 (линия 4)

Анализ результатов (рис. 2–5, 8) подтверждает возможность предельного перехода при  $t_3 \rightarrow 0$  как в разрешающем уравнении, так и в волновых характеристиках, что свидетельствует о их достоверности.

Кроме того, из результатов, представленных на рис. 8, приходим к выводу, что трехслойная оболочка более эффективна, нежели однослойная.

При этом (рис. 2–7) ее устойчивость возрастает с увеличением относительной толщины заполнителя до определенного значения.

**Выводы.** Исследована задача устойчивости упругой трехслойной оболочки в форме усеченного кругового конуса при совместном воздействии всестороннего внешнего давления, осевого сжатия и крутящего момента. Впервые получено разрешающее сингулярное дифференциальное уравнение шестого порядка с переменными коэффициентами поставленной задачи устойчивости. Для интегрирования разрешающего уравнения устойчивости применены два аналитических метода: метод ВКБ, гибридный ВКБ-Галеркин метод и численный МКР. Сравнены результаты, полученные на их основе. Выявлено преимущество гибридного аналитического ВКБ-Галеркин метода для решения указанного класса задач.

Определено влияние геометрических и физических параметров на устойчивость оболочки. При фиксированном отношении модулей упругости материала срединного и внешнего слоев существуют рациональные значения относительных толщин слоев трехслойной оболочки, когда она наиболее устойчива к заданному виду нагружения. На рациональную толщину срединного слоя наиболее существенно влияют физические свойства внешних слоев. Рациональное значение относительной толщины срединного слоя слабо зависит от крутящего момента и осевого сжатия, действующих на оболочку, а также изменения длины образующей оболочки в рассматриваемой постановке задачи.

Приведены результаты численного анализа устойчивости трехслойной конической оболочки с заданными жесткостными и геометрическими параметрами в предположении о превалирующем влиянии окружающей деформации. Построена граничная поверхность, отделяющая область устойчивости от области неустойчивости конструкции. Приближенные аналитические решения и численный анализ могут служить основой для создания рациональных многослойных неоднородных и анизотропных оболочечных конструкций, подверженных комбинированному внешнему нагружению, и базой для изучения поведения слоистых оболочечных конструкций сложной конфигурации при использовании численных методов конечных и граничных элементов [1].

Результаты исследования могут использовать потребители облачных технологий (cloud computing) [21], применяя свойства вычислительной эластичности (elastic computing) облачных структур.

1. Акимов Д. В., Грицак В. З., Гоменюк С. И., Ларионов И. Ф., Клименко Д. В., Сиренко В. Н. Конечноэлементный анализ и экспериментальное исследование прочности трехслойной сотовой конструкции переходного отсека космического летательного аппарата // Проблемы прочности. – 2016. – № 3. – С. 52–57.
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 448 с.
3. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебание. – Новосибирск: Наука, 2001. – 288 с.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.
5. Григolloк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – Москва: Машиностроение, 1973. – 172 с.
6. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наук. думка, 1973. – 228 с.
7. Грицак В. З. Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування. – Запоріжжя: ЗНУ, 2009. – 226 с.
8. Грицак В. З., Дьяченко Н. Н. Определение областей устойчивости конической оболочки при комбинированном нагружении на базе гибридного асимптотичес-

- кого підхода // Вісник Запорізьк. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2017. – № 2. – С. 33–46.
9. Закиров Г. В. Некоторые задачи устойчивости трехслойных конических оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1967. – Вып. 5. – С. 257–270.
  10. Преображенский И. Н., Грицак В. З. Устойчивость и колебания конических оболочек. – Москва: Машиностроение, 1986. – 240 с.
  11. Саченков А. В. Об устойчивости круговой конической оболочки при совместном действии загрузок // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1964. – № 2. – С. 57–70.
  12. Сухинин С. Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. – Москва: Физматлит, 2010. – 248 с.
  13. Фрёман Н., Фрёман П. У. ВКБ-приближение. – Москва: Мир, 1967. – 166 с.
  14. Boorboor Ajdari M. A., Jalili S., Jafari M., Zamani J. and Shariyat M. The analytical solution of the buckling of composite truncated conical shells under combined external pressure and axial compression // J. of Mech. Sci. and Tech. – 2012. – No. 26 (9). – P. 2783–2791.
  15. Geer J. F., Andersen C. M. A hybrid perturbation – Galerkin technique with application to slender body theory // SIAM J. Appl. Mech. – 1989. – 49. – P. 344–361.
  16. Ghanbari Ghazijahania T. and Showkati H. Locally Imperfect Conical Shells under Uniform External Pressure // Проблемы прочности. – 2013. – No. 3. – С. 157–168.
  17. Gristchak V. Z., Dimitrijeva E. M. A Hybrid WRB-Galerkin Method and its Using to Applied Mechanics Problems // The scientific journal FACTA UNIVERSITATIS. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics. – 1998. – 2, No. 8. – P. 709–713.
  18. Gristchak V. Z., Ganilova O. A. Application of a Hybrid WKB-Galerkin Method in Control of the Dynamic Instability of a Piezolaminated Imperfect Column // Technische Mechanik. – 2006. – No. 26(2). – P. 106–116.
  19. Gristchak V. Z., Gristchak D. D., Fatieieva Yu. A. Hybrid asymptotic methods. Theory and applications. – Zaporizhzhya: Zaporizhzhya National University, 2016. – 108 p.
  20. Gristchak V. Z., Pogrebetskaya A. M. On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems // Technische Mechanik. – 2011. – 31, No. 2. – P. 112–120.
  21. Mylara Reddy Chimaiah, Nalini Niranjana. Fault tolerant software systems using software configurations for cloud computing // J. of Clouding Adv., Systems and Appls. – 2018. – 7: 3.  
<https://journalofcloudcomputing.springeropen.com/articles/10.1186/s13677-018-0104-9>
  22. Seide P. A. A survey of buckling theory and experiment for circular conical shells of constant thickness // NASSA Technical Note, D-1510. – 1962. – P. 401–426.
  23. Tertel E., Kurylo P. The stability of the sandwich conical shell panel – the stress state analysis // Tehnicki vjesnik. – 2017. – 24, No. Suppl. 1. – P. 55–60.

#### **ЕФЕКТИВНИЙ НАБЛИЖЕНИЙ АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ ТРИШАРОВОЇ КОНІЧНОЇ ОБОЛОЧКИ ЗА КОМБІНОВАНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

Запропоновано розв'язок лінійної задачі про поведінку пружної тришарової конічної оболонки під дією декількох зовнішніх силових чинників (рівномірного тиску, осьового стиску і крутного моменту), здатних зумовити втрату стійкості конструкції. Задачу зведено до інтегрування розв'язувального сингулярного диференціального рівняння шостого порядку зі змінними коефіцієнтами. Зіставлено розв'язки з використанням методів фазових інтегралів (метод ВКБ), гібридного ВКБ-Гальоркін методу і методу кінцевих різниць. Доведено перевагу асимптотичного гібридного підходу для розв'язання таких рівнянь. Проаналізовано раціональне співвідношення товщини і модулів пружності шарів тришарової конічної оболонки, за яких конструкція найстійкіша до заданого виду зовнішнього навантаження. У граничних випадках розв'язки порівняно з відомими результатами. Обговорено проблему побудови граничних поверхонь, що відокремлюють область стійкості від області нестійкості конструкції. Підтверджено

ефективність тришарових оболонок як силових елементів, що працюють на стійкість.

**Ключові слова:** тришарова конічна оболонка, комбіноване навантаження, стійкість оболонки, гібридний ВКБ-Галеркін метод, гранична поверхня.

#### **AN EFFECTIVE APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTION TO THE STABILITY PROBLEM OF A THREE-LAYER CONICAL SHELL UNDER COMBINED LOADING**

*The solution is proposed for the linear problem of an elastic three-layer conical shell behavior under the combined action of several external force factors (uniform pressure, axial compression and torque) that can cause the structural instability. The problem reduces to the necessity for integration of a resulting singular differential sextic equation with variable coefficients. The comparison of solutions is given using the methods of phase integrals (WKB method), the hybrid WKB-Galerkin method and the finite difference method. The advantage of the asymptotic hybrid approach to solve the equations of the given class is shown. The analysis of the rational correlation of the thicknesses and elasticity moduli of three-layer conical shell layers is made under which the construction is most resistant to the specified type of external loading. The comparison is made with known results in the limiting cases. The constructing problem of boundary surfaces separating the stability region from the instability one of the studied/investigated construction is discussed. The effectiveness of three-layer shells as strength members working for stability has been confirmed.*

*Key words:* three-layer conical shell, combined loading, shell stability, hybrid WKB-Galerkin method, boundary surface.

<sup>1</sup>Запорожский нац. ун-т, Запорожье;

<sup>2</sup>Центральный НИИ вооружения  
и военной техники Вооруженных Сил Украины

Получено  
28.06.18