УДК 517.956

І. Д. Пукальський, Б. О. Яшан

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИРОДЖЕННЯМ

Розглянуто багатоточкову за часом крайову задачу з умовою Діріхле для параболічного рівняння другого порядку зі степеневими особливостями і виродженнями довільного порядку в коефіцієнтах за просторовими змінними на деякій множині точок. Знайдено умови існування і єдиності розв'язку поставленої задачі в гельдерових просторах із степеневою вагою.

Важливим напрямком сучасної теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними є вивчення задач з нелокальними умовами для некласичних рівнянь математичної фізики. У роботах Б. Й. Пташника і його учнів [1, 4, 6, 13] вивчалися задачі з багатоточковими нелокальними умовами типу Діріхле за часовою змінною для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом високого порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами і умовами періодичності за просторовими змінними.

Класичним розв'язкам крайових задач з імпульсною дією для параболічних рівнянь з виродженням присвячено праці [3, 7, 11]. Крайовим задачам з нелокальними та інтегральними умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь з виродженням в коефіцієнтах за часовою і просторовими змінними присвячено статті [2, 8, 9, 12].

У цій роботі дослідимо багатоточкову за часовою змінною крайову задачу з умовою Діріхле для параболічного рівняння другого порядку зі степеневими особливостями і виродженнями довільного порядку в коефіцієнтах за просторовими змінними на деякій множині точок. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку цієї задачі в гельдерових просторах зі степеневою вагою, порядок якої залежить від виродження і степеневих особливостей коефіцієнтів рівняння.

1. Постановка задачі та основні обмеження. Нехай t_0, t_1, …, t_{N+1} – фіксовані числа, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, Ω – деяка обмежена область, $\Omega \subset \subset \mathbb{R}^{n-1}$, D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $Q_k = [t_k, t_{k+1}) \times D$, $k \in \{0,1,\ldots,N\}$, $Q^{(0)} = \{(t,x) \mid t \in [t_0, t_{N+1}),\ x \in \Omega\}$.

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу про знаходження функції $u(t,x)$, яка при $(t,x) \in Q \backslash (Q^{(0)} \bigcup\limits_{k=0}^{N} (Q_k \bigcap (t = t_k))$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} + A_0(t,x)\right] u(t,x) = f(t,x)\,, \tag{1}$$

багатоточкові умови за часовою змінною

$$u(t_k + 0, x) = \psi_k(x), \qquad x \in D \backslash \bar{\Omega}, \quad k \in \{0,1,\ldots,N\}, \tag{2}$$

і крайову умову

$$u|_{\Gamma} = g(t,x), \qquad \Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D\,. \tag{3}$$

Виродження коефіцієнтів рівняння (1) у точці $P(t,x) \in Q \backslash Q^{(0)}$ буде характеризувати функція $s(\beta_i, x) = \begin{cases} \rho^{\beta_i}(x), & \rho(x) \le 1, \\ 1, & \rho(x) \ge 1, \end{cases}$ де $\rho(x)$ – відстань від точки $x \in D \backslash \bar{\Omega}$ до $\bar{\Omega}$, β_i – дійсні числа, $\beta_i \in (-\infty, \infty)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Позначимо через ℓ, γ, μ_j, α дійсні числа: $\ell > 0$, $[\ell]$ − ціла частина ℓ, $\gamma \ge 0$, $\mu_j \ge 0$, $j \in \{0,1,\dots,n\}$, $\alpha \in (0,1)$, $(x_1^{(1)},\dots,x_\nu^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$ − координати точки $x^{(1)}$ в області $\bar{D}$, $(x_1^{(1)},\dots,x_{\nu-1}^{(1)},x_\nu^{(2)},x_{\nu+1}^{(1)},\dots,x_n^{(1)})$ − координати точки $x^{(2)}$ в $\bar{D}$, $\nu \in \{1,2\}$, $P_k^{(1)}(t^{(1)},x^{(1)})$, $H_k(t^{(1)},x^{(2)})$, $P_k^{(2)}(t^{(2)},x^{(2)})$ − довільні точки області $\bar{Q}_k$.

Означимо функціональні простори, в яких будемо розглядати задачу (1)−(3).

$C^\ell(\gamma,\beta,a;Q)$ − лінійний простір визначених в $\bar{Q}$ функцій $u(t,x)$, які в Q_k, $k \in \{0,1,\dots,N\}$, мають частинні похідні вигляду $\partial_t^j \partial_x^r u$ (тут $2j + |r| \le [\ell]$, $|r| = r_1 + \dots + r_n$, $\partial_x^r = \partial_{x_1}^{r_1}\partial_{x_2}^{r_2}\dots\partial_{x_n}^{r_n}$), і скінченне значення норми

$$\|u;\gamma,\beta,a;Q\|_\ell = \sup_{k\in\{0,\dots,N\}} \{\|u;\gamma,\beta,a;Q_k\|_{[\ell]} + \langle u;\gamma,\beta,\alpha;Q_k\rangle_\ell\},$$

де, наприклад,

$$\|u;\gamma,\beta,0;Q_k\|_0 = \sup_{Q_k}|u| \equiv \|u;Q_k\|_0,$$

$$\|u;\gamma,\beta,a;Q_k\|_{[\ell]} = \sum_{2j+|r|\le[\ell]} \sup_{P\in\bar{Q}_k} s(a+2j\gamma,\tilde{x})\prod_{\nu=1}^n s(r_\nu(\gamma-\beta_\nu),\tilde{x})\left|\partial_t^i\partial_x^r u(P^{(k)})\right|,$$

$$\langle u;\gamma,\beta,a;Q_k\rangle_\ell = \sum_{2j+|r|=[\ell]} \Bigg\{ \sum_{\nu=1}^n \sup_{(P_k^{(1)},H_k)\subset\bar{Q}_k} \left|x_\nu^{(1)} - x_\nu^{(2)}\right|^{-\{\ell\}} s(a+\ell\gamma,\tilde{x}) \times$$

$$\times s(-\{\ell\}\beta_\nu,\tilde{x})\prod_{i=1}^n s(-r_i\beta_i,\tilde{x})\left|\partial_t^j\partial_x^r u(P_k^{(1)}) - \partial_t^j\partial_x^r u(H_k)\right| +$$

$$+ \sup_{(H_k,P_k^{(2)})\subset\bar{Q}_k} \left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{\{\ell/2\}} s(a+\ell\gamma,x^{(2)}) \times$$

$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^r u(H_k) - \partial_t^j\partial_x^r u(P_k^{(2)})\right|\prod_{i=1}^n s(-r_i\beta_i,x^{(2)}) \Bigg\}.$$

Тут $s(a,\tilde{x}) = \min\{s(a,x^{(1)}),s(a,x^{(2)})\}$.

Дослідження задачі (1)−(3) будемо проводити за таких обмежень.

1°. Для довільного вектора $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t,x)s(\beta_i,x)s(\beta_j,x)\xi_i\xi_j \le \pi_2|\xi|,$$

π_1, π_2 − фіксовані додатні сталі, $s(\beta_i,x)s(\beta_j,x)A_{ij}(P)\in C^\alpha(\gamma,\beta,0;Q)$, $s(\mu_i,x)A_i \in C^\alpha(\gamma,\beta,0;Q)$, $s(\mu_0,x)A_0 \in C^\alpha(\gamma,\beta,0;Q)$, $A_0 \ge -b$, $b \ge 0$,

$$\gamma = \max\{\max_i(1+\beta_i),\max_i(\mu_i+\beta_i),\mu_0/2\}.$$

2°. $f \in C^\alpha(\gamma,\beta,\mu_0;Q)$, $\varphi_k(x) \in C^{2+\alpha}(\gamma,\beta,0;Q\cap(t=t_k))$, $k\in\{0,1,\dots,N\}$,

$\varphi_k(x)\big|_{\Gamma_k} = g(t_k,x)\big|_{\Gamma_k}$, $g(t,x)\in C^{2+\alpha}(\gamma,\beta,0;\Gamma_k)$, $\Gamma_k = [t_k,t_{k+1})\times D$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$.

Справджується така

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)−(3) *виконуються умови* ***1°, 2°***. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)−(3) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ *і є правильною така оцінка*:

$$\|u;\gamma,\beta,0;Q\|_{2+\alpha} \le c \sup_{k\in\{0,1,\dots,N\}} (\|\psi_k;\gamma,\beta,0;Q\cap(t=t_k)\|_{2+\alpha} +$$

$$+\|f;\gamma,\beta,\mu_0;Q_k\|_\alpha + \|g;\gamma,\beta,0;\Gamma_k\|_{2+\alpha}). \qquad (4)$$

Для дослідження задачі (1)−(3) побудуємо послідовність розв'язків задач з гладкими коефіцієнтами, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)−(3).

2. Оцінка розв'язків задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_k^{(m)} = Q_k \cap \{(t,x)\in Q_k \mid s(1,x) \ge m^{-1}, t\in[t_k,t_{k+1})\}$, $m>1$, − послідовність областей, яка при $m\to\infty$ збігається до $Q_k\backslash Q^{(0)}$.

Розглянемо в області Q_k задачу про знаходження функції $u_m(t,x)$, яка задовольняє рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\Big] u_m(t,x) =$$

$$= f_m(t,x), \quad t\in(t_k,t_{k+1}), \quad x\in D, \qquad (5)$$

умову за часовою змінною

$$u_m(t_k+0,x) = \psi_{(m)}^k(x), \quad x\in Q_k\cap(t=t_k), \qquad (6)$$

і крайову умову

$$u_m|_{\Gamma_k} = g_m(t,x). \qquad (7)$$

Тут коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0 і функції f_m, $\varphi_k^{(m)}$, g_m при $(t,x)\in Q_k^{(m)}$ співпадають з A_{ij}, A_i, A_0 і f, φ_k, g відповідно.

При $(t,x)\in Q_k\backslash Q_k^{(m)}$ коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, функції f_m, $\varphi_k^{(m)}$, g_m є неперервними продовженнями коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0 і функцій f, φ_k, g із області $Q_k^{(m)}$ в область $Q_k\backslash Q_k^{(m)}$ [10, с. 83].

У задачі (5)−(7) виконаємо заміну

$$u_m(t,x) = \tilde g_m(t,x) + v_m(t,x)e^{\mu t}, \qquad (8)$$

де $\tilde g_m(t,x)$ є неперервним продовженням функції $g_m(t,x)$ із Γ_k в область Q_k, μ задовольняє умову $\mu > b$. Тоді $v_m(t,x)$ в області Q_k задовольняє рівняння

$$(L_1 v_m)(t,x) \equiv$$

$$\equiv \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\partial_{x_i} + (a_0(t,x)+\mu)\Big] v_m(t,x) =$$

$$= e^{-\mu t}(f_m(t,x) - (L_1\tilde g_m)(t,x)) \equiv F_m(t,x), \qquad (9)$$

умови за часовою змінною і крайову умову:

$$v_m(t_k+0,x) = (\psi_k^{(m)}(x) - \tilde g_m(t_k,x))e^{-\mu t_k} \equiv \psi_k^{(m)}(t_k,x),$$

$$v_m|_{\Gamma_k} = 0. \qquad (10)$$

Знайдемо оцінку розв'язку $v_m(t,x)$ в області Q_k. У просторі $C^{2+\alpha}(Q_k)$ введемо норму $\|v_m;\gamma,\beta,a;Q_k\|_\ell$, еквівалентну при кожному m гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і норма $\|u;\gamma,\beta,a;Q_k\|_\ell$, тільки замість функції $s(\beta_i,x)$ беремо $d(\beta_i,x)$, де

$$d(\beta_i,x)=\begin{cases}\max(s(\beta_i,x),m^{-\beta_i}), & \beta_i\ge 0,\\ \min(s(\beta_i,x),m^{-\beta_i}), & \beta_i<0.\end{cases}$$

Теорема 2. *Нехай* v_m *– класичний розв'язок задачі* (9), (10) *в області* $\bar{Q}_k$ *і виконуються умови* **1°**, **2°**. *Тоді для* $v_m(t,x)$ *справджується оцінка*

$$\|v_m;Q_k\|_0\le\left\|\psi_m^{(k)};Q_k\cap(t=t_k)\right\|_0+\left\|F_m(a_0+\mu)^{-1};Q_k\right\|. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я нерівності (11) проводиться за схемою доведення теореми 2.1 із [5, с. 22], тобто аналізуються усі можливі значення додатного максимуму і від'ємного мінімуму розв'язку $v_m(t,x)$ в області Q_k. ♦

Теорема 3. *Якщо виконуються умови теореми 1, то для розв'язку задачі* (9), (10) *справджується нерівність*

$$\|v_m;\gamma,\beta,0;Q_k\|_{2+\alpha}\le c\big(\|f;\gamma,\beta,\mu_0;Q_k\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|\psi_k;\gamma,\beta,0;Q_k\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+\|g;\gamma,\beta,0;\Gamma_k\|_{2+\alpha}\big). \tag{12}$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення норми $v_m(t,x)$ у просторі $C^{2+\alpha}(Q_k)$ та інтерполяційні нерівності із [8, 10], маємо

$$\|v_m;\gamma,\beta,0;Q_k\|_{2+\alpha}\le(1+\varepsilon^\alpha)\langle v_m;\gamma,\beta,0;Q_k\rangle_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\|v_m;Q_k\|_0,$$

де ε – довільне дійсне число, $\varepsilon\in(0,1)$. Тому достатньо оцінити півнорму $\langle v_m;\gamma,\beta,0;Q_k\rangle_{2+\alpha}$. З означення півнорми випливає існування в Q_k точок $P_k^{(1)}$, H_k, $P_k^{(2)}$, для яких виконується одна з нерівностей

$$\frac{1}{2}\|v_m;\gamma,\beta,0;Q_k\|_{2+\alpha}\le E_\delta,\qquad \delta\in\{1,2\}, \tag{13}$$

де

$$E_1=\sum_{2j+|r|=2}\sum_{\nu=1}^{n}\left|x_\nu^{(1)}-x_\nu^{(2)}\right|^{-\alpha}d((2+\alpha)\gamma;\tilde{x})\,d(-\alpha\beta_\nu,\tilde{x})\times$$

$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^r v_m(H_k)-\partial_t^j\partial_x^r v_m(P_k^{(1)})\right|\prod_{i=1}^{n}d(-r_i\beta_i,\tilde{x}),$$

$$E_2=\sum_{2j+|r|=2}\sum_{\nu=1}^{n}\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\alpha/2}d((2+\alpha)\gamma,x^{(2)})\times$$

$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^r v_m(H_k)-\partial_t^j\partial_x^r v_m(P_k^{(2)})\right|\prod_{i=1}^{n}d(-r_i\beta_i,x^{(2)}),$$

$$d(\gamma,\tilde{x})=\min\{d(\gamma,x^{(1)}),d(\gamma,x^{(2)})\}.$$

Нехай $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|\le n^{-1}d(\gamma-\beta_i,\tilde{x})\dfrac{\varepsilon_1}{4}\equiv T_2$ і $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\le d(2\gamma,\tilde{x})\dfrac{\varepsilon_1^2}{16}\equiv T_1$, ε_1 – довільне дійсне число, $\varepsilon_1\in(0,1)$. Будемо вважати, що $d(\gamma,\tilde{x})=d(\gamma,x^{(1)})$, $P_k^{(1)}(t^{(1)},x^{(1)})\in Q_k$, $k\in\{0,1,\ldots,N\}$.

В області Q_k задачу (9), (10) запишемо у вигляді

$$(L_3 v_m)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_k^{(1)})\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Big] v_m = F_m^{(1)}(t,x,v_m),$$

$$v_m(t_k+0,x) = \psi_k^{(m)}(t_k,x),$$

$$v_m\big|_{\Gamma_k} = 0, \tag{14}$$

де

$$F_m^{(1)}(t,x,v_m) = \sum_{i,j=1}^{n}\Big[a_{ij}(t,x) - a_{ij}(P_k^{(1)})\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Big] v_m - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} v_m -$$

$$-(a_0(t,x)+\mu)v_m + F_m(t,x).$$

Нехай $V_{\varepsilon_2}^{(k)}$ – область із Q_k, $V_{\varepsilon_2}^{(k)} = \{(t,x)\in Q_k,\ \left|t - t^{(1)}\right| \le \varepsilon_2^2 T_1,\ \left|x_i - x_i^{(1)}\right| \le \le \varepsilon_2 T_2,\ i\in\{1,\ldots,n\}\}$. Виконавши у задачі (14) заміну $v_m(t,x) = \omega_m(t,y)$, $y_j = d(\beta_i, x^{(1)})x_i$, одержимо таку задачу:

$$(L_4\omega_m)(t,y) =$$

$$= \Big[\partial_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_k^{(1)}) d(\beta_i, x^{(1)}) d(\beta_j, x^{(1)})\partial_{y_i}\partial_{y_j}\Big]\omega_m = F_m^{(1)}(t,\tilde{y},\omega_m),$$

$$\omega_m(t_k+0,y) = \psi_k^{(m)}(t_k,\tilde{y}),$$

$$\omega_m\big|_{\Gamma_k} = 0, \tag{15}$$

де $\tilde{y} = \left(d(-\beta_1, x^{(1)})y_1,\ldots,d(-\beta_n, x^{(1)})y_n\right)$. Позначимо $y_i^{(1)} = d(\beta_i, x^{(1)})x_i^{(1)}$, $W_{\varepsilon_2}^{(k)} = = \{(t,y),\ \left|t-t^{(1)}\right| \le \varepsilon_2^2 T_1,\ \left|y_i - y_i^{(1)}\right| \le \varepsilon_2 T_1^{1/2}\}$ і візьмемо тричі диференційовну функцію $\eta(t,y)$, яка задовольняє умови

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y)\in W_{1/2}^{(k)}, \quad 0 \le \eta(t,y) \le 1, \\ 0, & (t,y) \not\in W_{3/4}^{(k)}, \quad \left|\partial_t^i \partial_y^r \eta\right| \le c_{ik} d(-(2i+|r|)\gamma, x^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $Z_m(t,y) = \omega_m(t,y)\eta(t,y)$ буде розв'язком крайової задачі

$$(L_4 Z_m)(t,y) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(P_1^{(k)}) d(\beta_i, x^{(1)}) d(\beta_j, x^{(1)}) [\partial_{y_i}\eta\partial_{y_j}\omega_m + \partial_{y_j}\eta\partial_{y_i}\omega_m +$$

$$+ \omega_m\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta] - \omega_m\partial_t\eta + \eta F_m^{(1)}(t,\tilde{y},\omega_m) \equiv F_m^{(2)}(t,y,\omega_m,\eta),$$

$$Z_m(t_k+0,y) = \eta\psi_k^{(m)}(t_k,\tilde{y}),$$

$$Z_m\big|_{\Gamma_k} = 0. \tag{16}$$

На підставі теореми 5.1 із [5, с. 364] для розв'язку задачі (16) справджуються нерівності

$$\left|y^{(1)} - y^{(2)}\right|\left|\partial_t^j\partial_y^r Z_m(t,y^{(1)}) - \partial_t^j\partial_y^r Z_m(t,y^{(2)})\right| \le$$

$$\le c\Big(\left\|F_m^{(2)}\right\|_{C^\alpha(W_{3/4}^{(k)})} + \left\|\eta\psi_k^{(m)}\right\|_{C^{2+\alpha}(W_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k))}\Big) \equiv B_m,$$

$$\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\alpha/2}\left|\partial_t^j\partial_y^r Z_m(t^{(1)},y)-\partial_t^j\partial_y^r Z_m(t^{(2)},y)\right|\le c_1 B_m, \tag{17}$$

де $\{(t,y^{(1)}),(t,y^{(2)}),(t^{(1)},y),(t^{(2)},y)\}\subset W_{1/4}^{(k)}$, $2j+|r|=2$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,y)$, знаходимо

$$\left\|F_m^{(2)}\right\|_{C^\alpha(W_{3/4}^{(k)})}\le cd(-(2+\alpha)\gamma,x^{(1)})\Big(\left\|\omega_m;\gamma,0,0;W_{3/4}^{(k)}\right\|_2+$$

$$+\left\|\omega_m;W_{3/4}^{(k)}\right\|_0+\left\|F_m^{(1)};\gamma,0,2\gamma;W_{3/4}^{(k)}\right\|_\alpha\Big),$$

$$\left\|\eta\psi_k^{(m)}\right\|_{C^{2+\alpha}(W_{3/4}^{(k)})\cap(t=t_k)}\le cd(-(2+\alpha)\gamma,x^{(1)})\times$$

$$\times\left\|\psi_k^{(m)};\gamma,0,0;W_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}\Big). \tag{18}$$

Підставляючи (18) у (17) і повертаючись до змінних (t,x), одержимо

$$E_\delta\le c_2\Big(\left\|F_m^{(1)};\gamma,\beta,2\gamma;V_{3/4}^{k}\right\|_\alpha+\left\|\psi_k^{(m)};\gamma,\beta,0;V_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}+$$

$$+\left\|v_m;\gamma,\beta,0;V_{3/4}^{(k)}\right\|_2+\left\|v_m;V_{3/4}^{(k)}\right\|_0\Big). \tag{19}$$

Враховуючи оцінку кожного доданка виразу $F_m^{(1)}$ та інтерполяційні нерівності, маємо

$$E_\delta\le\left(\varepsilon_1^\alpha(n+2)+\varepsilon^2 n^2\right)\left\|v_m;\gamma,\beta,0;V_{3/4}^{(k)}\right\|_{2+\alpha}+$$

$$+c_3\left\|v_m;V_{3/4}^{(k)}\right\|_0+c_4\Big(\left\|F_m;\gamma,\beta,2\gamma;V_{3/4}^{(k)}\right\|_\alpha+$$

$$+\left\|\psi_k^{(m)};\gamma,\beta,0;V_{3/4}^{(k)}\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}\Big). \tag{20}$$

У випадку $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\ge T_1$ або $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|\ge T_2$ маємо

$$E_\delta\le 2\varepsilon_1^{-\alpha}\left\|v_m;\gamma,\beta,0;Q_k\right\|_2\le\varepsilon^\alpha\left\|v_m;\gamma,\beta,0;Q_k\right\|_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\left\|v_m;Q^{(k)}\right\|_0. \tag{21}$$

Використовуючи нерівності (11), (13), (20), (21) і вибираючи ε, ε_1 достатньо малими, одержимо оцінку

$$\left\|v_m;\gamma,\beta,0;Q_k\right\|_{2+\alpha}\le c\Big(\left\|F_m;\gamma,\beta,2\gamma;Q_k\right\|_\alpha+$$

$$+\left\|\psi_k^{(m)};\gamma,\beta,0;Q_k\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}+\left\|v_m;Q_k\right\|_0\Big). \tag{22}$$

Враховуючи значення виразів F_m і $\psi_k^{(m)}$, знаходимо

$$\left\|F_m;\gamma,\beta,2\gamma;Q\right\|_\alpha\le c_5\left(\left\|f_m;\gamma,\beta,2\gamma;Q_k\right\|_\alpha+\left\|\tilde g_m;\gamma,\beta,0;Q_k\right\|_{2+\alpha}\right),$$

$$\left\|\psi_k^{(m)};\gamma,\beta,0;Q_k\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}\le c_6\Big(\left\|\psi_m^{(k)};\gamma,\beta,0;Q_k\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}+$$

$$+\left\|\tilde g_m;\gamma,\beta,0;Q_k\right\|_{2+\alpha}\Big). \tag{23}$$

Оскільки

$$\left\|f_m;\gamma,\beta,2\gamma;Q_k\right\|_\alpha\le c_7\left\|f;\gamma,\beta,\mu_0;Q_k\right\|_\alpha,$$

$$\left\|\tilde g_m;\gamma,\beta,0;Q_k\right\|_{2+\alpha}\le c_8\left\|g;\gamma,\beta,0;\Gamma_k\right\|_{2+\alpha},$$

$$\left\|\psi_k^{(m)};\gamma,\beta,0;Q_k\cap(t=t_k)\right\|\le c_9\left\|\psi_k;\gamma,\beta,0;Q_k\cap(t=t_k)\right\|_{2+\alpha}, \tag{24}$$

то, враховуючи нерівності (22)–(24), одержимо оцінку (12). ♦

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Права частина нерівності (12) не залежить від m. Крім того, послідовності

$$\{U_m^{(0)}\} \equiv \{v_m\},$$
$$\{U_m^{(1)}\} \equiv \{d(\gamma-\beta_i,x)\partial_{x_i} v_m(t,x)\},$$
$$\{U_m^{(2)}\} \equiv \{d(2\gamma,x)\,\partial_t v_m(t,x)\},$$
$$\{U_m^{(3)}\} \equiv \{d(\gamma-\beta_i,x)d(\gamma-\beta_j,x)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j} v_m(t,x)\}$$

рівномірно обмежені і рівностепенево неперервні в області $\bar{Q}_k$. За теоремою Арцела існують підпослідовності $\{U_{m(i)}^{(\nu)}\}$, рівномірно збіжні в Q_k до $\{U_0^{(\nu)}\}$, $\nu \in \{0,1,2,3\}$. Переходячи до границі при $m(i) \to \infty$ у задачі (9), (10) і враховуючи заміну (8), одержимо єдиний розв'язок задачі (1)–(3). ♦

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* ***1°, 2°***, $f \in C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$, $A_0 > 0$. *Тоді єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *у просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta,0;Q)$ *визначається в областях* Q_k, $k \in \{0,1,\dots,N\}$, *інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою*:

$$u(t,x) = u_1^{(k)} + u_2^{(k)} + u_3^{(k)} = \int\limits_{Q_k} G_1^{(k)}(t,x;d\tau,d\xi) f(\tau,\xi) +$$
$$+ \int\limits_{Q_k \cap (t=t_k)} G_2^{(k)}(t,x;d\xi)\varphi_k(\xi) + \int\limits_{\Gamma_k} G_3^{(k)}(t,x;d\tau,d_\xi S) g(\tau,\xi), \tag{25}$$

і компоненти $G_1^{(k)}$, $G_2^{(k)}$, $G_3^{(k)}$ *задовольняють нерівності*

$$0 \le \int\limits_{Q_k} G_1^{(k)}(t,x;d\tau,d\xi) \le \left\| A_0^{-1}; Q_k \right\|_0,$$
$$0 \le \int\limits_{Q_k \cap (t=t_k)} G_2^{(k)}(t,x;d\xi) \le 1, \qquad 0 \le \int\limits_{\Gamma_k} G_3^{(k)}(t,x;d\tau,d_\xi S) \le 1, \tag{26}$$

де $(t,x) \in Q_k$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $C^{\ell}(\gamma,\beta,0;Q_k) \subset C^{\ell}(\gamma,\beta;\mu_0;Q_k)$, то для $f \in C^{\alpha}(\gamma,\beta;0;Q_k)$ виконується нерівність

$$\|f;\gamma,\beta;\mu_0,Q_k\|_{\alpha} \le c\,\|f;\gamma,\beta,0;Q_k\|_{\alpha}.$$

Отже, з урахуванням теореми 1 для розв'язку $u(t,x)$ задачі (1)–(3) в області Q_k маємо оцінку

$$\|u;\gamma,\beta,0;Q_k\|_{2+\alpha} \le c\,(\|f;\gamma,\beta,0;Q_k\|_{\alpha} + \|\psi_k;\gamma,\beta,0;Q_k \cap (t=t_k)\|_{2+\alpha} +$$
$$+ \|g;\gamma,\beta,0;\Gamma_k\|_{2+\alpha}). \tag{27}$$

Розглянемо $u(t,x)$ при фіксованому (t,x) як лінійний неперервний функціонал $\Phi(f,\psi_k,g)$ на нормованому просторі

$$C_{\alpha} = C^{\alpha}(\gamma,\beta,0;Q_k) \times C^{2+\alpha}(\gamma,\beta,0;Q_k \cap (t=t_k)) \times C^{2+\alpha}(\gamma,\beta,0;\Gamma_{\ell})$$

з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (27). Беручи до уваги включення $C_{\alpha} \subset C$ і теорему Рісса, можемо вважати, що $u(t,x)$ породжує борелівську міру $G(t,x,Z)$, яка визначена на σ-алгебрі підмножин Z області $\bar{Q}_k$, включаючи Q_k, і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціонала визначається формулою (25).

З теорем 1–3 випливає виконання для розв'язків задачі (1)–(3) в області Q_k нерівностей

$$|u_1| \le \left\| f^{-1}(A_0); Q_k \right\|_0 ,$$

$$|u_2| \le \| \varphi_k ; Q_k \cap (t = t_k) \|_0 ,$$

$$|u_3| \le \| g; \Gamma_k \|_0 , \tag{28}$$

де u_1 – розв'язок задачі (1)–(3) при $\psi_k \equiv 0$, $g \equiv 0$; u_2 – розв'язок задачі (1)–(3) при $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ і u_3 – розв'язок крайової задачі (1)–(3) при $f \equiv 0$, $\psi_k \equiv 0$. Підставляючи в нерівності (28) відповідно $f(t,x) \equiv 1$, $\psi_k(x) \equiv 1$, $g(t,x) \equiv 1$, одержимо нерівності (26). ♦

1. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 8. – С. 1022–1034.
   Те саме: *Vlasii O. D., Ptashnyk B. I.* A problem with nonlocal conditions for partial differential equations unsolved with respect to the leading derivative // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, No. 8. – P. 1238–1253.
2. *Исарюк И. М., Пукальский И. Д.* Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным условием и вырождениями // Укр. мат. вісн. – 2014. – **11**, № 4. – С. 480–496.
   Те саме: *Isaryuk I. M., Pukalskyi I. D.* The boundary value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations // J. Math. Sci. – 2015. – **207**, No. 1. – P. 26–38.
3. *Ісарюк І. М., Пукальський І. Д.* Крайова задача з імпульсними умовами і виродженням для параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 10. – С. 1348–1357.
   Те саме: *Isaryuk I. M., Pukal's'kyi I. D.* Boundary-value problem with impulsive conditions and degeneration for parabolic equations // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, No. 10. – P. 1515–1526.
4. *Клюс І. С., Пташник Б. Й.* Багатоточкова задача для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 12. – С. 1604–1613.
   Те саме: *Klyus I. S., Ptashnyk B. I.* A multipoint problem for partial differential equations unresolved with respect to the higher time derivative // Ukr. Math. J. – 1999. – **51**, No. 12. – P. 1813–1823.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
   Те саме: *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. – Transl. Math. Monogr., Vol. 23. – Providence, RI: AMS, 1968. – xi+648 p.
6. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
7. *Пукальський І. Д.* Крайова задача для параболічних рівнянь з імпульсними умовами і виродженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 2. – С. 55–63.
   Те саме: *Pukal's'kyi I. D.* Boundary-value problem for parabolic equations with impulsive conditions and degenerations // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, No. 1. – P. 60–71.
8. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
9. *Пукальський І. Д., Ісарюк І. М.* Нелокальні параболічні крайові задачі з особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 4. – С. 54–66.
   Те саме: *Pukal's'kyi I. D., Isaryuk I. M.* Nonlocal parabolic boundary-value problems with singularities // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 327–343.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
   Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.

11. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: Stability, theory and applications. – New York etc.: Halsted Press, 1989. – 255 p
12. *DiBenedetto E.* Degenerate parabolic equations. – New York: Spinger-Verlag, 1993. – xvi+388 p.
13. *Kuz A. M. Ptashnyk B. Yo.* Problem for hyperbolic system of equations having constant coefficients with integral conditions with respect to the time variable // Карпат. мат. публікації. – 2014. – **6**, № 2. – P. 282–299.

НЕЛОКАЛЬНАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Рассматривается многоточечная по времени краевая задача с условием Дирихле для параболического уравнения второго порядка со степенными особенностями и вырождениями в коэффициентах по пространственным переменным произвольного порядка на некотором множестве точек. Найдены условия существования и единственности решения поставленной задачи в гельдеровых пространствах со степенным весом.

NONLOCAL MULTIPOINT IN TIME PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH DEGENERATION

The multipoint in time boundary-value problem with the Dirichlet's condition, for the second order parabolic equation with power features and degenerations of an arbitrary order in coefficients with respect to spatial variables on some set of points, is considered. The conditions of existence and uniqueness of solution of the stated problem in Hölder's spaces with power weight are found.

Чернів. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
09.03.17