УДК 512.64

І. І. Кирчей

ВИЗНАЧНИКОВІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КВАТЕРНІОНОВОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ СИЛЬВЕСТРА

Використовуючи визначникові зображення узагальненої оберненої матриці Мура – Пенроуза, в рамках теорії некомутативних стовпцево-рядкових визначників одержано визначникові зображення розв'язку (аналоги правила Крамера) для кватерніонового узагальненого матричного рівняння Сильвестра $AXB + CYD = E$.

Вступ. Нехай $\mathbb{H}^{m\times n}$ і $\mathbb{H}_r^{m\times n}$ позначають множини всіх $m\times n$ матриць та, відповідно, $m\times n$ матриць з рангом r над тілом кватерніонів $\mathbb{H}$. У цій роботі ми досліджуємо узагальнене двостороннє матричне рівняння Сильвестра над тілом $\mathbb{H}$

$$\mathbf{AXB} + \mathbf{CYD} = \mathbf{E}. \tag{1}$$

Оскільки рівняння типу Сильвестра мають широке застосування в різних прикладних областях (див., напр., [6, 27, 35]), ці рівняння ретельно досліджуються (див., напр., [28, 39, 40]). Liping [24] отримав необхідні та достатні умови існування розв'язків рівняння (1) з однією змінною над тілом кватерніонів. Baksalary і Kala [4] отримали його загальний розв'язок, виражений у термінах узагальнених обернених матриць, що для рівняння над тілом кватерніонів було узагальнено в [36, 38]. Останнім часом відзначається висока інтенсивність досліджень кватерніонових матричних рівнянь типу Сильвестра (див., напр., [7, 9, 10, 26, 29, 37, 41, 42]).

Нехай $\mathbf{A}^*$ – транспонована і кватерніоново-спряжена (ермітово-спряжена) матриця для $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}$. Матриця $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{n\times n}$ називається ермітовою, якщо $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$.

***Означення* 1.** *Узагальненою оберненою матрицею Мура – Пенроуза* до матриці $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}$ (позначається як $\mathbf{A}^\dagger$) є єдина матриця $\mathbf{A}^\dagger\in\mathbb{H}^{n\times m}$, що задовольняє такі умови:

1°) $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{A}$;

2°) $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger$;

3°) $(\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger)^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger$;

4°) $(\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A})^* = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$.

На відміну від оберненої матриці, яка має однозначно визначникове зображення через алгебричні доповнення її елементів, для узагальнених обернених матриць, зокрема матриці Мура – Пенроуза, існують різні визначникові зображення навіть для матриць над полем дійсних чи комплексних чисел внаслідок пошуку їхніх більш застосовних явних виразів (для матриці Мура – Пенроуза див., напр. [5, 8, 17, 18, 34]). Для кватерніонових матриць, в силу некомутативності кватерніонів, питання визначникового зображення узагальнених обернених матриць довгий час залишалося відкритим і тільки зараз може бути вирішене завдяки теорії стовпцевих та рядкових некомутативних визначників, які були введені в [1, 3, 22]. В рамках теорії стовпцево-рядкових визначників визначникові зображення різних кватерніонових узагальнених обернених матриць та узагальнених обернених розв'язків кватерніонових матричних рівнянь були отримані як автором (див., напр., [2, 11–16, 19–21, 23]), так й іншими дослідниками (див., напр., [30–32]). Більше того, за допомогою стовпцевих та рядкових визначників Song та ін. [33] нещодавно отримали визначникове зображення розв'язку рівняння (1) над тілом кватерніонів. Але отримані ними результати відрізняються від пропонованих у цій роботі як кінцевим визначниковим зображенням, так і підходами в дослідженнях. У роботі [33] у визначниковому зображенні розв'язку рівняння (1) використовуються додаткові матриці, які не завжди легко отримати, тоді як нам для визначникового зображення розв'язку рівняння достатньо мати тільки його коефіцієнтні матриці.

Основна мета цієї роботи полягає в отриманні визначникового зображення розв'язку рівняння (1) над тілом кватерніонів, використовуючи раніше одержані визначникові зображення узагальненої оберненої матриці Мура – Пенроуза. Очевидно, що визначникові зображення розв'язку дають прямий метод його знаходження, аналогічний класичному правилу Крамера, що має важливе як теоретичне, так і прикладне значення.

1. Попередні зауваження. Елементи теорії стовпцево-рядкових визначників та визначникових зображень узагальнених обернених матриць.

Для квадратної кватерніонової матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{n\times n}$ вводимо означення n рядкових та n стовпцевих визначників. Нехай S_n – симетрична група на множині $I_n = \{1,\ldots,n\}$.

Означення 2 [3]. *Рядковим визначником по i-му рядку* матриці $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ для всіх $i = 1,\ldots,n$ називається альтернована сума $n!$ мономів – усіх можливих добутків елементів матриці $\mathbf{A}$, взятих по одному з кожного рядка та стовпця і впорядкованих зліва таким чином:

$$\operatorname{rdet}_i \mathbf{A} = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{n-r} (a_{i\, i_{k_1}} a_{i_{k_1} i_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+\ell_1}\, i}) \ldots (a_{i_{k_r} i_{k_r+1}} \ldots a_{i_{k_r+\ell_r} i_{k_r}}),$$

де $\sigma = (i\, i_{k_1} i_{k_1+1} \ldots i_{k_1+\ell_1})(i_{k_2} i_{k_2+1} \ldots i_{k_2+\ell_2}) \ldots (i_{k_r} i_{k_r+1} \ldots i_{k_r+\ell_r})$ і $i_{k_t} < i_{k_t+s}$, $i_{k_2} < i_{k_3} < \ldots < i_{k_r}$, для всіх $t = 2,\ldots,r$, $s = 1,\ldots,\ell_t$.

Означення 3 [3]. *Стовпцевим визначником по j-му стовпцю* квадратної матриці $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times n}$ для всіх $j = 1,\ldots,n$ називається альтернована сума $n!$ мономів – усіх можливих добутків елементів матриці $\mathbf{A}$, взятих по одному з кожного рядка та стовпця і впорядкованих справа таким чином:

$$\operatorname{cdet}_j \mathbf{A} = \sum_{\tau\in S_n} (-1)^{n-r} (a_{j_{k_r} j_{k_r+\ell_r}} \ldots a_{j_{k_r+1} i_{k_r}}) \ldots (a_{j\, j_{k_1+\ell_1}} \ldots a_{j_{k_1+1} j_{k_1}} a_{j_{k_1} j}),$$

де $\tau = (j_{k_r+\ell_r} \ldots j_{k_r+1} j_{k_r}) \ldots (j_{k_2+\ell_2} \ldots j_{k_2+1} j_{k_2})(j_{k_1+\ell_1} \ldots j_{k_1+1} j_{k_1} j)$ і $j_{k_t} < j_{k_t+s}$, $j_{k_2} < j_{k_3} < \ldots < j_{k_r}$, для всіх $t = 2,\ldots,r$, $s = 1,\ldots,\ell_t$.

Оскільки [22] для довільної ермітової матриці $\mathbf{A}$

$$\operatorname{rdet}_1 \mathbf{A} = \ldots = \operatorname{rdet}_n \mathbf{A} = \operatorname{cdet}_1 \mathbf{A} = \ldots = \operatorname{cdet}_n \mathbf{A} \in \mathbb{R},$$

то сформулюємо означення *визначника ермітової матриці*, поклавши $\det \mathbf{A} := \operatorname{r\,det}_i \mathbf{A} = \operatorname{c\,det}_i \mathbf{A}$ для довільного $i = 1,\ldots,n$.

Нехай $\alpha := \{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\} \subseteq \{1,\ldots,m\}$ і $\beta := \{\beta_1,\ldots,\beta_k\} \subseteq \{1,\ldots,n\}$ – підмножини індексів з $1 \le k \le \min\{m,n\}$ і $\mathbf{A}^{\alpha}_{\beta}$ – підматриця матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, рядки і стовпці якої індексуються множинами α і β відповідно. Тоді $\mathbf{A}^{\alpha}_{\alpha}$ – головна підматриця матриці $\mathbf{A}$, рядки і стовпці якої індексуються множиною α. Якщо матриця $\mathbf{A}$ – ермітова, тоді $|\mathbf{A}|^{\alpha}_{\alpha}$ – головний мінор визначника $\det \mathbf{A}$. Нехай $L_{k,n} := \{\alpha : \alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, 1 \le \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \le n\}$ позначає множину строго зростаючих послідовностей k цілих чисел, вибраних з множини $\{1, \ldots, n\}$ для всіх $1 \le k \le n$. Для фіксованих рядкового індекса $i \in \alpha$ та стовпцевого індекса $j \in \beta$ позначимо $I_{r,m}\{i\} := \{\alpha : \alpha \in L_{r,m}, i \in \alpha\}$ та $J_{r,n}\{j\} := \{\beta : \beta \in L_{r,n}, j \in \beta\}$. Нехай $\mathbf{a}_{i.}$ позначає i-й рядок, а $\mathbf{a}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\mathbf{A}$. Позначимо через $\mathbf{A}_{i.}(\mathbf{b})$ та $\mathbf{A}_{.j}(\mathbf{b})$ матриці, які отримуються з матриці $\mathbf{A}$ заміною її i-го рядка вектор-рядком $\mathbf{b}$, а її j-го стовпця – вектор-стовпцем $\mathbf{b}$, відповідно. Позначимо i-й рядок та j-й стовпець ермітово-спряженої матриці $\mathbf{A}^*$ через $\mathbf{a}^*_{i.}$ та $\mathbf{a}^*_{.j}$.

Теорема 1 [2]. *Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$, тоді її узагальнена обернена матриця Мура – Пенроуза $\mathbf{A}^\dagger = (a^\dagger_{ij}) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ має такі визначникові зображення:*

$$a^\dagger_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{a}^*_{i.})\right)^\alpha_\alpha}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|^\alpha_\alpha} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}^*_{.j})\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^\beta_\beta}.$$

***Зауваження* 1.** Для довільної повнорангової матриці $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$, вектор-стовпця $\mathbf{d}_{.j}$ та вектор-рядка $\mathbf{d}_{i.}$ сумісних розмірів покладемо:

– якщо $r = n$, тоді

$$\operatorname{cdet}_i(\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{d}_{.j}) = \sum_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{d}_{.j})\right)^\beta_\beta,$$

$$\det(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \sum_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^\beta_\beta;$$

– якщо $r = m$, тоді

$$\operatorname{rdet}_j(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{d}_{i.}) = \sum_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{A}\mathbf{A}^*)_{j.}(\mathbf{d}_{i.})\right)^\alpha_\alpha,$$

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = \sum_{\alpha\in I_{r,m}} \left|\mathbf{A}\mathbf{A}^*\right|^\alpha_\alpha.$$

Наслідок 1 [19]. *Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$, тоді проекційна матриця $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} := \mathbf{P}_A = (p_{ij})_{n\times n}$ має визначникове зображення*

$$p_{ij} = \frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\dot{\mathbf{a}}_{.j})\right)^\beta_\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|^\beta_\beta}, \tag{2}$$

де $\dot{\mathbf{a}}_{.j}$ – j-й стовпець матриці $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

Наслідок 2 [19]. *Якщо $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}_r$, тоді проекційна матриця $\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger := \mathbf{Q}_A = (q_{ij})_{m\times m}$ має визначникове зображення*

$$q_{ij}=\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}\{j\}}\mathrm{r}\det_j\left((\mathbf{AA}^*)_{j.}(\ddot{\mathbf{a}}_{i.})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,m}}\left|\mathbf{AA}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\ddot{\mathbf{a}}_{i.}$ – i*-й рядок матриці* $\mathbf{AA}^*$.

Через $\mathbf{L}_A:=\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A}$ та $\mathbf{R}_A:=\mathbf{I}-\mathbf{AA}^{\dagger}$ позначимо ортогональні проектори, індуковані матрицею $\mathbf{A}$.

Теорема 4 [36]. *Нехай* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B}\in\mathbb{H}^{r\times s}$, $\mathbf{C}\in\mathbb{H}^{m\times p}$ *– відомі матриці, а* $\mathbf{X}\in\mathbb{H}^{n\times r}$ *– невідома. Тоді матричне рівняння*

$$\mathbf{AXB}=\mathbf{C} \tag{3}$$

є сумісним тоді і тільки тоді, коли виконується умова $\mathbf{AA}^{\dagger}\mathbf{CB}^{\dagger}\mathbf{B}=\mathbf{C}$, *і його загальний розв'язок можна подати як* $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{CB}^{\dagger}+\mathbf{L}_A\mathbf{V}+\mathbf{WR}_B$, *де* $\mathbf{V}$ *і* $\mathbf{W}$ *– довільні матриці відповідних розмірів над* $\mathbb{H}$.

Теорема 5 [16]. *Нехай* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B}\in\mathbb{H}_{r_2}^{r\times s}$. *Тоді нормальний розв'язок* $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{CB}^{\dagger}$ *рівняння* (3) *має визначникові зображення*

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{d}_{.j}^{B})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}}\left|\mathbf{BB}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}=\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j.}(\mathbf{d}_{i.}^{A})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_1,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}\sum\limits_{\alpha\in I_{r_2,r}}\left|\mathbf{BB}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де

$$\mathbf{d}_{.j}^{B}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_2,r}\{j\}}\mathrm{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j.}(\mathbf{c}_{k.}^{(1)})\right)_{\beta}^{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{n\times 1},\qquad k=1,\dots,n,$$

$$\mathbf{d}_{i.}^{A}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_1,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{c}_{.\ell}^{(1)})\right)_{\beta}^{\beta}\right]\in\mathbb{H}^{1\times r},\qquad \ell=1,\dots,\mathrm{r},$$

є вектор-стовпцем та вектор-рядком відповідно, а $\mathbf{c}_{k.}^{(1)}$ і $\mathbf{c}_{.\ell}^{(1)}$ *–* k*-й рядок і* ℓ*-й стовпець матриці* $\mathbf{C}_1:=\mathbf{A}^*\mathbf{CB}^*$.

Наслідок 3. *Нехай* $\mathbf{B}\in\mathbb{H}_k^{r\times s}$, $\mathbf{C}\in\mathbb{H}^{n\times s}$ *– відомі матриці, а* $\mathbf{X}\in\mathbb{H}^{n\times r}$ *– невідома. Тоді матричне рівняння* $\mathbf{XB}=\mathbf{C}$ *є сумісним тоді і тільки тоді, коли виконується умова* $\mathbf{XB}^{\dagger}\mathbf{B}=\mathbf{C}$. *У цьому випадку його загальний розв'язок виражається як* $\mathbf{X}=\mathbf{CB}^{\dagger}+\mathbf{WR}_B$, *де* $\mathbf{W}$ *– довільна матриця відповідних розмірів над* $\mathbb{H}$. *Його нормальний розв'язок* $\mathbf{X}=\mathbf{CB}^{\dagger}$ *має визначникове зображення*

$$x_{ij}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}\{i\}}\mathrm{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{c}_{.j}^{(2)})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r,n}}\left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta}},$$

де $\mathbf{c}_{.j}^{(2)}$ *–* j*-й стовпець матриці* $\mathbf{C}_2:=\mathbf{A}^*\mathbf{C}$.

Наслідок 4. *Нехай* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}_r^{m\times n}$, $\mathbf{C}\in\mathbb{H}^{m\times r}$ *– відомі матриці, а* $\mathbf{X}\in\mathbb{H}^{n\times r}$ *– невідома. Тоді матричне рівняння* $\mathbf{AX}=\mathbf{C}$ *є сумісним тоді і тільки тоді, коли виконується умова* $\mathbf{AA}^{\dagger}\mathbf{X}=\mathbf{C}$. *У цьому випадку його загальний* *розв'язок виражається як* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C} + \mathbf{L}_A\mathbf{V}$, *де* $\mathbf{V}$ *– довільна матриця відповідних розмірів над* $\mathbb{H}$. *Його нормальний розв'язок* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{C}$ *має визначникове зображення*

$$x_{ij} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{k,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j.}(\mathrm{c}_{i.}^{(3)})\right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{k,r}} \left|\mathbf{BB}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}},$$

де $\mathbf{c}_{i.}^{(3)}$ *–* i*-й рядок матриці* $\mathbf{C}_3 := \mathbf{CB}^*$.

2. Основний результат.

Лема 1 [38]. *Нехай* $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}^{r\times s}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}^{m\times p}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}^{q\times s}$, $\mathbf{E} \in \mathbb{H}^{m\times s}$. *Покладемо* $\mathbf{M} = \mathbf{R}_A\mathbf{C}$, $\mathbf{N} = \mathbf{DL}_B$, $\mathbf{S} = \mathbf{CL}_M$. *Тоді такі твердження є еквівалентними:*

i) *Рівняння* (1) *має розв'язок* $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, *де* $\mathbf{X} \in \mathbb{H}^{n\times r}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{H}^{p\times q}$.

ii) $\mathbf{R}_M\mathbf{R}_A\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{R}_A\mathbf{EL}_D = 0$, $\mathbf{EL}_D\mathbf{L}_N = 0$, $\mathbf{R}_C\mathbf{EL}_B = 0$.

iii) $\mathbf{Q}_M\mathbf{R}_A\mathbf{EP}_D = \mathbf{R}_A\mathbf{E}$, $\mathbf{Q}_D\mathbf{EL}_B\mathbf{P}_N = \mathbf{EL}_B$.

У цьому випадку загальний розв'язок рівняння (1) *виражається як*

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{EB}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{CM}^{\dagger}\mathbf{R}_A\mathbf{EB}^{\dagger} -$$

$$- \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{SC}^{\dagger}\mathbf{EL}_B\mathbf{N}^{\dagger}\mathbf{DB}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{SVR}_N\mathbf{DB}^{\dagger} + \mathbf{L}_A\mathbf{U} + \mathbf{ZR}_B,$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{R}_A\mathbf{ED}^{\dagger} + \mathbf{L}_M\mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{SC}^{\dagger}\mathbf{EL}_B\mathbf{N}^{\dagger} + \mathbf{L}_M(\mathbf{V} - \mathbf{S}^{\dagger}\mathbf{SVNN}^{\dagger}) + \mathbf{WR}_B,$$

де $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$ *та* $\mathbf{W}$ *– довільні матриці відповідних розмірів над* $\mathbb{H}$.

Лема 2 [25]. *Якщо* $\mathbf{A}$ *– ермітова й ідемпотентна матриця, тоді для довільної матриці* $\mathbf{B}$ *виконуються рівності* $\mathbf{A}(\mathbf{BA})^{\dagger} = (\mathbf{BA})^{\dagger}$ *та* $(\mathbf{AB})^{\dagger}\mathbf{A} = (\mathbf{AB})^{\dagger}$.

Оскільки, $\mathbf{R}_A$, $\mathbf{L}_B$ та $\mathbf{L}_M$ є проекторами, а отже ермітовими й ідемпотентними матрицями, тоді за лемою 2 маємо $\mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{R}_A = \mathbf{M}^{\dagger}$, $\mathbf{L}_B\mathbf{N}^{\dagger} = \mathbf{N}^{\dagger}$ та $\mathbf{L}_M\mathbf{S}^{\dagger} = \mathbf{S}^{\dagger}$. Вважаючи $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$ і $\mathbf{W}$ нульовими матрицями відповідних розмірів, одержимо такий (спрощений) частковий розв'язок рівняння (1):

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{EB}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{CM}^{\dagger}\mathbf{EB}^{\dagger} - \mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{SC}^{\dagger}\mathbf{EN}^{\dagger}\mathbf{DB}^{\dagger}, \tag{4}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{M}^{\dagger}\mathbf{ED}^{\dagger} + \mathbf{P}_S\mathbf{C}^{\dagger}\mathbf{EN}^{\dagger}. \tag{5}$$

Нехай $\mathbf{A} \in \mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{H}_{r_2}^{r\times s}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{H}_{r_3}^{m\times p}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{H}_{r_4}^{q\times s}$, $\operatorname{rank}\mathbf{M} = r_5$, $\operatorname{rank}\mathbf{N} = r_6$ та $\operatorname{rank}\mathbf{S} = r_7$. Спочатку розглянемо окремо кожний доданок з (4).

За теоремою 5 для першого доданка $\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{EB}^{\dagger} =: X_1 = (x_{ij}^{(1)})$ маємо

$$x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{d}_{.j}^{B})\right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_{\beta}^{\beta} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} \left|\mathbf{BB}^*\right|_{\alpha}^{\alpha}}, \tag{6}$$

або

$$
x_{ij}^{(1)} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j.}(\mathbf{d}_{i.}^A)\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} \left|\mathbf{BB}^*\right|_\alpha^\alpha}, \tag{7}
$$

де

$$
\mathbf{d}_{.j}^B = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j.}(\mathbf{e}_{k.}^{(1)})\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{n \times 1}, \quad k = 1,\ldots,n,
$$

$$
\mathbf{d}_{i.}^A = \left[\sum_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{e}_{.\ell}^{(1)})\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{1 \times r}, \quad \ell = 1,\ldots,r,
$$

є вектор-стовпцем та вектор-рядком відповідно, а $\mathbf{e}_{k.}^{(1)}$ та $\mathbf{e}_{.\ell}^{(1)}$ – k-й рядок та ℓ-й стовпець матриці $\mathbf{E}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{E}\mathbf{B}^*$.

За наслідком 3 для $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{C}$ та теоремою 5 для $\mathbf{M}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{B}^\dagger$ одержимо таке визначникове зображення другого доданка з (4)

$$
x_{ij}^{(2)} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{p} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{a}_{.t}^{(1)})\right)_\beta^\beta \varphi_{tj}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta \in J_{r_5,p}} \left|\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} \left|\mathbf{B}^*\mathbf{B}\right|_\alpha^\alpha}, \tag{8}
$$

де

$$
\varphi_{tj} = \sum_{\beta \in J_{r_5,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.t}(\varphi_{.j}^B)\right)_\beta^\beta = \sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j.}(\varphi_{t.}^M)\right)_\alpha^\alpha,
$$

$$
\varphi_{.j}^B = \left[\sum_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j.}(\mathbf{e}_{t.}^{(2)})\right)_\alpha^\alpha\right] \in \mathbb{H}^{p \times 1}, \quad t = 1,\ldots,p,
$$

$$
\varphi_{t.}^M = \left[\sum_{\beta \in J_{r_5,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{.t}(\mathbf{e}_{.\ell}^{(2)})\right)_\beta^\beta\right] \in \mathbb{H}^{1 \times r}, \quad \ell = 1,\ldots,r,
$$

– вектор-стовпець та вектор-рядок відповідно, $\mathbf{a}_{.t}^{(1)}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{A}_1 := \mathbf{A}^*\mathbf{C}$, а $\mathbf{e}_{t.}^{(2)}$ та $\mathbf{e}_{.\ell}^{(2)}$ – t-й рядок та ℓ-й стовпець матриці $\mathbf{E}_2 := \mathbf{M}^*\mathbf{E}\mathbf{B}^*$.

Для третього члена з (4), враховуючи наслідки 3 і 4 для $\mathbf{A}^\dagger\mathbf{S}$ і $\mathbf{D}\mathbf{B}^\dagger$ відповідно та теорему 5 для $\mathbf{C}^\dagger\mathbf{E}\mathbf{N}^\dagger$, отримаємо

$$
x_{ij}^{(3)} =
$$

$$
= \frac{\sum\limits_{f=1}^{q} \sum\limits_{t=1}^{p} \sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i\left((\mathbf{A}^*\mathbf{A})_{.i}(\mathbf{s}_{.t}^{(1)})\right)_\beta^\beta \eta_{tf} \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}\{j\}} \operatorname{rdet}_j\left((\mathbf{BB}^*)_{j.}(\mathbf{d}_{f.}^{(1)})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta \in J_{r_1,n}} \left|\mathbf{A}^*\mathbf{A}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\beta \in J_{r_3,p}} \left|\mathbf{C}^*\mathbf{C}\right|_\beta^\beta \sum\limits_{\alpha \in I_{r_6,q}} \left|\mathbf{NN}^*\right|_\alpha^\alpha \sum\limits_{\alpha \in I_{r_2,r}} \left|\mathbf{BB}^*\right|_\alpha^\alpha}, \tag{9}
$$

де

$$
\eta_{tf} = \sum_{\beta \in J_{r_3,p}\{t\}} \operatorname{cdet}_t\left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{.t}(\varsigma_{.f}^N)\right)_\beta^\beta = \sum_{\alpha \in I_{r_6,q}\{f\}} \operatorname{rdet}_f\left((\mathbf{NN}^*)_{f.}(\varsigma_{t.}^C)\right)_\alpha^\alpha \tag{10}
$$

та

$$\varsigma_{\bullet f}^{N}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_6,q}\{f\}}\operatorname{rdet}_f\left((\mathbf{NN}^*)_{f\bullet}(\mathbf{e}_{k\bullet}^{(3)})\right)_\alpha^\alpha\right]\in\mathbb{H}^{p\times 1},\quad k=1,\ldots,p,$$

$$\varsigma_{t\bullet}^{C}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_3,p}\{t\}}\operatorname{cdet}_t\left((\mathbf{C}^*\mathbf{C})_{\bullet t}(\mathbf{e}_{\bullet\ell}^{(3)})\right)_\beta^\beta\right]\in\mathbb{H}^{1\times q},\quad \ell=1,\ldots,q,$$

є вектор-стовпцем та вектор-рядком відповідно, $\mathbf{s}_{\bullet t}^{(1)}$ – t-й стовпець матриці $\mathbf{S}_1:=\mathbf{A}^*\mathbf{S}$, $\mathbf{d}_{f\bullet}^{(1)}$ – f-й рядок матриці $\mathbf{D}_1:=\mathbf{DB}^*$, $\mathbf{e}_{k\bullet}^{(3)}$ та $\mathbf{e}_{\bullet\ell}^{(3)}$ – k-й рядок і ℓ-й стовпець матриці $\mathbf{E}_3:=\mathbf{D}^*\mathbf{EN}^*$.

Тепер розглянемо кожний доданок з (5).

За теоремою 5 для першого доданка $\mathbf{M}^\dagger\mathbf{ED}^\dagger=:\mathbf{Y}_1=(y_{gf}^{(1)})^{p\times q}$ маємо

$$y_{gf}^{(1)}=\frac{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,p}\{g\}}\operatorname{cdet}_g\left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{\bullet g}(\mathbf{d}_{\bullet f}^{D})\right)_\beta^\beta}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,p}}\left|\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right|_\beta^\beta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,q}}\left|\mathbf{DD}^*\right|_\alpha^\alpha}\tag{11}$$

або

$$y_{gf}^{(1)}=\frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,q}\{f\}}\operatorname{rdet}_f\left((\mathbf{DD}^*)_{f\bullet}(\mathbf{d}_{g\bullet}^{M})\right)_\alpha^\alpha}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_5,p}}\left|\mathbf{M}^*\mathbf{M}\right|_\beta^\beta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_4,q}}\left|\mathbf{DD}^*\right|_\alpha^\alpha},\tag{12}$$

де

$$\mathbf{d}_{\bullet f}^{D}=\left[\sum_{\alpha\in I_{r_4,q}\{f\}}\operatorname{rdet}_f\left((\mathbf{DD}^*)_{j\bullet}(\mathbf{e}_{k\bullet}^{(4)})\right)_\alpha^\alpha\right]\in\mathbb{H}^{p\times 1},\quad k=1,\ldots,p,$$

$$\mathbf{d}_{g\bullet}^{M}=\left[\sum_{\beta\in J_{r_5,p}\{g\}}\operatorname{cdet}_g\left((\mathbf{M}^*\mathbf{M})_{\bullet g}(\mathbf{e}_{\bullet\ell}^{(4)})\right)_\beta^\beta\right]\in\mathbb{H}^{1\times q},\quad \ell=1,\ldots,q,$$

є вектор-стовпцем та вектор-рядком відповідно, а $\mathbf{e}_{k\bullet}^{(4)}$ та $\mathbf{e}_{\bullet\ell}^{(4)}$ – k-й рядок та ℓ-й стовпець матриці $\mathbf{E}_4:=\mathbf{M}^*\mathbf{ED}^*$.

Для другого доданка з (5), використовуючи (2) для визначникового зображення $\mathbf{P}_S$ та теорему 5 для $\mathbf{C}^\dagger\mathbf{EN}^\dagger$, одержимо

$$y_{gf}^{(2)}=\frac{\sum\limits_{t=1}^{p}\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,p}\{g\}}\operatorname{cdet}_g\left((\mathbf{S}^*\mathbf{S})_{\bullet g}(\ddot{\mathbf{s}}_{\bullet t})\right)_\beta^\beta\eta_{tf}}{\sum\limits_{\beta\in J_{r_7,p}}\left|\mathbf{S}^*\mathbf{S}\right|_\beta^\beta\sum\limits_{\beta\in J_{r_3,p}}\left|\mathbf{C}^*\mathbf{C}\right|_\beta^\beta\sum\limits_{\alpha\in I_{r_6,q}}\left|\mathbf{NN}^*\right|_\alpha^\alpha},\tag{13}$$

де η_{tf} можна отримати за формулою (10).

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 6. *Нехай* $\mathbf{A}\in\mathbb{H}_{r_1}^{m\times n}$, $\mathbf{B}\in\mathbb{H}_{r_2}^{r\times s}$, $\mathbf{C}\in\mathbb{H}_{r_3}^{m\times p}$, $\mathbf{D}\in\mathbb{H}_{r_4}^{q\times s}$, $\mathbf{M}=\mathbf{R}_A\mathbf{C}\in\mathbb{H}_{r_5}^{m\times p}$, $\mathbf{N}=\mathbf{DL}_B\in\mathbb{H}_{r_6}^{q\times s}$, $\mathbf{S}=\mathbf{CL}_M\in\mathbb{H}_{r_7}^{m\times p}$. *Тоді пара розв'язку* (4)–(5) $\mathbf{X}=(x_{ij})\in\mathbb{H}^{n\times r}$,

$\mathbf{Y} = (y_{gf}) \in \mathbb{H}^{p\times q}$ *може бути покомпонентно представлена як* $x_{ij} = x_{ij}^{(1)} - x_{ij}^{(2)} - x_{ij}^{(3)}$, $y_{gf} = y_{gf}^{(1)} + y_{gf}^{(2)}$, *де доданок* $x_{ij}^{(1)}$ *виражається формулами* (6) *або* (7), $x_{ij}^{(2)}$ – (8), $x_{ij}^{(3)}$ – (9), $y_{gf}^{(1)}$ – (11) *або* (12), $y_{gf}^{(2)}$ – (13).

1. *Кирчей І. І.* Аналог класичної приєднаної матриці над тілом з інволюцією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 81–91.
2. *Кирчей І. І.* Визначникове зображення узагальненої оберненої матриці Мура – Пенроуза над тілом кватерніонів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 3. – С. 36–45.
   Те саме: *Kyrchei I. I.* Determinantal representation of the Moore – Penrose inverse matrix over the quaternion skew field // J. Math. Sci. – 2012. – **180**, No. 1. – P. 23–33. – https://doi.org/10.1007/s10958-011-0626-x
3. *Кирчей І. І.* Класична приєднана матриця для ермітової над тілом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, №. 3. – С. 33–48.
4. *Baksalary J. K., Kala R.* The matrix equation $AXB + CYD = E$ // Linear Algebra Appl. – 1980. – **30**. – P. 141–147. – https://doi.org/10.1016/0024-3795(80)90189-5
5. *Bapat R. B., Bhaskara Rao K. P. S., Manjunatha Prasad K.* Generalized inverses over integral domains // Linear Algebra Appl. – 1990. – **140**. – P. 181–196. https://doi.org/10.1016/0024-3795(90)90229-6
6. *Chen C., Schonfeld D.* Pose estimation from multiple cameras based on Sylvester's equation // Comput. Vis. Image Underst. – 2010. – **114**, No. 6. – P. 652–666. https://doi.org/10.1016/j.cviu.2010.01.002
7. *Futorny V., Klymchuk T., Sergeichuk V. V.* Roth's solvability criteria for the matrix equations $AX - \widehat{X}B = C$ and $X - A\widehat{X}B = C$ over the skew field of quaternions with an involutive automorphism $q \to \hat{q}$ // Linear Algebra Appl. – 2016. – **510**. – P. 246–258. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.08.022
8. *Gabriel R.* Das verallgemeinerte inverse einer matrix, deren elemente einem beliebigen körper angehören // J. Reine Angew. Math. – 1969. – **234**. – P. 107–122. https://doi.org/10.1515/crll.1969.234.107
9. *He Z. H., Wang Q. W.* A system of periodic discrete-time coupled Sylvester quaternion matrix equations // Algebra Colloq. – 2017. – **24**, No. 1. – P. 169–180. https://doi.org/10.1142/S1005386717000104
10. *He Z. H., Wang Q. W., Zhang Y.* A system of quaternary coupled Sylvester-type real quaternion matrix equations // Automatica. – 2018. – **87**. – P. 25–31. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.09.008
11. *Kyrchei I.* Determinantal representations of solutions to systems of quaternion matrix equations // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2018. – **28**, No. 1. – Article 23. – 16 p. – https://doi.org/10.1007/s00006-018-0843-1
12. *Kyrchei I.* Determinantal representations of the Drazin and W-weighted Drazin inverses over the quaternion skew field with applications // In: Quaternions: Theory and Applications / Sandra Griffin (ed.). – New York: Nova Sci. Publ., 2017. – 282 p. – (Chap. 7. – P. 201–276).
13. *Kyrchei I.* Determinantal representations of the Drazin inverse over the quaternion skew field with applications to some matrix equations // Appl. Math. Comput. – 2014. – **238**. – P. 193–207. – https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.125
14. *Kyrchei I.* Determinantal representations of the quaternion weighted Moore – Penrose inverse and its applications // In: Advances in Mathematics Research **23** / A. R. Baswell (ed.). – New York: Nova Sci. Publ., 2017. – 215 p. – (Chap. 2. – P. 35–96).
15. *Kyrchei I.* Determinantal representations of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field // Appl. Math. Comput. – 2015. – **264**. – P. 453-465. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.04.125
16. *Kyrchei I.* Explicit representation formulas for the minimum norm least squares solutions of some quaternion matrix equations // Linear Algebra Appl. – 2013. – **438**, No. 1. – P. 136–152. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.07.049
17. *Kyrchei I. I.* Analogs of the adjoint matrix for generalized inverses and corresponding Cramer's rules // Linear Multilinear Algebra. – 2008. – **56**, No. 4. – P. 453–469. – https://doi.org/10.1080/03081080701352856

18. *Kyrchei I. I.* Cramer's rule for generalized inverse solutions // In: Advances in Linear Algebra Research / I. Kyrchei (ed.) – New York: Nova Sci. Publ., 2015. – 353 p. – (Chap. 3. – P. 79–132).
19. *Kyrchei I. I.* Determinantal representations of the Moore – Penrose inverse over the quaternion skew field and corresponding Cramer's rules // Linear Multilinear Algebra – 2011. – **59**, No. 4. – P. 413–431.
https://doi.org/10.1080/03081081003586860
20. *Kyrchei I. I.* Explicit determinantal representation formulas for the solution of the two-sided restricted quaternionic matrix equation // J. Appl. Math. Comput. – 2017. – P. 1–31. – https://doi.org/10.1007/s12190-017-1148-6
21. *Kyrchei I. I.* Explicit determinantal representation formulas of W-weighted Drazin inverse solutions of some matrix equations over the quaternion skew field // Math. Probl. Eng. – 2016. – Article ID 8673809. – 13 p.
https://doi.org/10.1155/2016/8673809
22. *Kyrchei I. I.* The theory of the column and row determinants in a quaternion linear algebra // In: Advances in Mathematics Research **15** / Albert R. Baswell (ed.). – New York: Nova Sci. Publ., 2012. – 418 p. – (Chap. 11. – P. 301–358).
23. *Kyrchei I.* Weighted singular value decomposition and determinantal representations of the quaternion weighted Moore – Penrose inverse // Appl. Math. Comput. – 2017. – **309**. – P. 1–16.
https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.03.048
24. *Liping H.* The matrix equation $AXB - GXD = E$ over the quaternion field // Linear Algebra Appl. – 1996. – **234**. – P. 197–208.
25. *Maciejewski A. A., Klein C. A.* Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators in dynamically varying environments // Int. J. Robot. Res. – 1985. – **4**, No. 3. – P. 109–117. – https://doi.org/10.1177/027836498500400308
26. *Rehman A., Wang Q. W., He Z. H.* Solution to a system of real quaternion matrix equations encompassing η-Hermicity // Appl. Math. Comput. – 2015. – **265**. – P. 945–957. – https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.104
27. *Shahzad A., Jones B. L., Kerrigan E. C., Constantinides G. A.* An efficient algorithm for the solution of a coupled Sylvester equation appearing in descriptor systems // Automatica. – 2011. – **47**, No. 1. – P. 244–248.
https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.10.038
28. *Shim S. Y., Chen Y.* Least squares solution of matrix equation $AXB^* + CYD^* = E$ // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2003. – **24**, No. 3. – P. 802–808.
https://epubs.siam.org/doi/10.1137/S0895479802401059
29. *Şimşek S., Sarduvan M., Özdemir H.* Centrohermitian and skew-centrohermitian solutions to the minimum residual and matrix nearness problems of the quaternion matrix equation $(AXB, DXE) = (C, F)$ // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2017. – **27**, No. 3. – P. 2201–2214. – https://doi.org/10.1007/s00006-016-0688-4
30. *Song G. J.* Characterization of the W-weighted Drazin inverse over the quaternion skew field with applications // Electron. J. Linear Algebra. – 2013. – **26**. – P. 1–14. – https://doi.org/10.13001/1081-3810.1635
31. *Song G. J., Dong C. Z.* New results on condensed Cramer's rule for the general solution to some restricted quaternion matrix equations // J. Appl. Math. Comput. – 2017. – **53**, No. 1-2. – P. 321–341. – https://doi.org/10.1007/s12190-015-0970-y
32. *Song G. J., Wang Q. W., Chang H. X.* Cramer rule for the unique solution of restricted matrix equations over the quaternion skew field // Comput. Math. Appl. – 2011. – **61**, No. 6. – P. 1576–1589. – https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.01.026
33. *Song G. J., Wang Q. W., Yu S. W.* Cramer's rule for a system of quaternion matrix equations with applications // Appl. Math. Comp. – 2018. – **336**. – P. 490–499.
https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.04.056
34. *Stanimirović P.* General determinantal representation of pseudoinverses of matrices // Mat. Vesnik. – 1996. – **48**, No. 1-2. – P. 1–9.
35. *Varga A.* Robust pole assignment via Sylvester equation based state feedback parametrization / In Proc. IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design (CACSD-2000). – 2000. – P. 13–18.
36. *Wang Q. W.* A system of matrix equations and a linear matrix equation over arbitrary regular rings with identity // Linear Algebra Appl. – 2004. – **384**. – P. 43–54. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2003.12.039
37. *Wang Q. W., Rehman A., He Z. H., Zhang Y.* Constraint generalized Sylvester matrix equations // Automatica. – 2016. – **69**. – P. 60–64.

https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.02.024
38. *Wang Q. W., Van der Woude J. W., Chang H. X.* A system of real quaternion matrix equations with applications // Linear Algebra Appl. – 2009. – **431,** No. 12. – P. 2291–2303. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.02.010
39. *Wu A. G., Zhu F., Duan G. R., Zhang Y.* Solving the generalized Sylvester matrix equation $AV + BW = EVF$ via a Kronecker map // Appl. Math. Lett. – 2008. – **21**, No. 10. – P. 1069–1073. – https://doi.org/10.1016/j.aml.2007.12.004
40. *Xu G., Wei M., Zheng D.* On solutions of matrix equation $AXB + CYD = F$ // Linear Algebra Appl. – 1998. – **279**, No. 1-3. – P. 93–109. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(97)10099-4
41. *Yuan S. F., Wang Q. W., Yu Y. B., Tian Y.* On hermitian solutions of the split quaternion matrix equation $AXB + CXD = E$ // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2017. – **27**, No. 4. – P. 3235–3252. – https://doi.org/10.1007/s00006-017-0806-y
42. *Zhang X.* A system of generalized Sylvester quaternion matrix equations and its applications // Appl. Math. Comput. – 2016. – **273**. – P. 74–81. https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.09.074

ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ КВАТЕРНИОННОГО ОБОБЩЁННОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЬВЕСТРА

Используя детерминантные представления обобщенной обратной матрицы Мура – Пенроуза, в рамках теории некоммутативных столбцово-строчных определителей получены детерминантные представления решения (аналоги правила Крамера) кватернионного обобщенного матричного уравнения Сильвестра $AXB + CYD = E$.

DETERMINANTAL REPRESENTATIONS OF A SOLUTION TO THE QUATERNION GENERALIZED SYLVESTER MATRIX EQUATION

Using determinantal representations of the Moore – Penrose generalized inverse matrix within the framework of the theory of non-commutative column-row determinants, determinantal representations of a solution (an analog of Cramer's rule) to the quaternion generalized Sylvester matrix equation $AXB + CYD = E$ *have been derived.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.06.17