УДК 517.98

Т. В. Василишин

АЛГЕБРИ ЦІЛИХ СИМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА ПРОСТОРАХ ВИМІРНИХ ЗА ЛЕБЕГОМ СУТТЄВО ОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ

У роботі показано, що алгебра Фреше всіх цілих симетричних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначних функцій на відрізку [0,1] *є ізоморфною до алгебри Фреше всіх цілих симетричних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі всіх інтегровних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначних функцій на півосі.*

Вступ. Дослідженню алгебр симетричних поліномів і симетричних аналітичних функцій на банахових просторах присвячено значну кількість робіт (див. [1, 2, 4–11, 13–18]). Зокрема, в роботі [8] побудовано алгебраїчний базис алгебри всіх неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0,1]$ усіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначних функцій на відрізку $[0,1]$ і описано спектр алгебри Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ всіх цілих симетричних функцій обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,1]$. В [16] і [18] досліджено топологічну структуру спектра (множини всіх неперервних лінійних мультиплікативних функціоналів) алгебри Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$. У праці [14] побудовано алгебраїчний базис алгебри всіх неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі $L_1[0,+\infty)\bigcap L_\infty[0,+\infty)$ всіх інтегровних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначних функцій на півосі.

У цій роботі досліджено структуру алгебри Фреше всіх цілих симетричних функцій обмеженого типу на просторі $L_1[0,+\infty)\bigcap L_\infty[0,+\infty)$ і показано, що ця алгебра ізоморфна до алгебри $H_{bs}(L_\infty[0,1])$.

1. Попередні відомості. Позначимо, як звичайно, через $\mathbb{Z}_+$ множину цілих невід'ємних чисел і $\mathbb{N}$ множину цілих додатних чисел.

Нехай Y – комплексний банахів простір. Відображення $P: Y \to \mathbb{C}$ називають n-однорідним поліномом, де $n \in \mathbb{N}$, якщо існує n-лінійне відображення $A_P : Y^n \to \mathbb{C}$ таке, що $P(x) = A_P(\underbrace{x,\dots,x}_{n})$ для всіх $x \in Y$. Також для зручності будемо вважати 0-однорідними поліномами сталі відображення, які діють з Y в $\mathbb{C}$. Відображення $P = P_0 + P_1 + \ldots + P_m$, де P_j, $j \in \{0,\dots,m\}$, є j-однорідним поліномом для кожного $j \in \{0,\dots,m\}$, називають поліномом (степеня щонайбільше m).

Функцію $f: Y \to \mathbb{C}$ називають цілою, якщо існує послідовність $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$, де P_j є неперервним j-однорідним поліномом на Y для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$, така, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \tag{1}$$

рівномірно збігається до f на кожній кулі з центром в нулі простору Y. Іншими словами, для кожного $r > 0$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує номер N такий, що для кожного $m > N$ виконується

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{m} P_n \right\|_r < \varepsilon ,$$

де функціонал $\|\cdot\|_r$ визначено рівністю

$$\| f \|_r = \sup_{\|x\| \le r} | f(x) |$$

для кожного $r > 0$. Ряд (1) називають рядом Тейлора функції f.

Згідно з [12, твердження 2.4, с. 13] довільний поліном $P : Y \to \mathbb{C}$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли величина $\| P \|_1$ є скінченною.

Зауважимо, що для довільної послідовності $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$, де P_j є неперервним j-однорідним поліномом для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$, згідно з [12, теорема 4.3, с. 27] і [12, приклад 5.4, с. 34] сума ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n$$

є цілою функцією тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\limsup_{n\to\infty} \| P_n \|_1^{1/n} = 0 .$$

Функцію $f : Y \to \mathbb{C}$ називають функцією обмеженого типу, якщо f є обмеженою на всіх обмежених множинах простору Y. Зауважимо, що функція f є функцією обмеженого типу тоді і тільки тоді, коли для кожного $r > 0$ величина $\| f \|_r$ є скінченною.

Позначимо через $H_b(Y)$ алгебру всіх цілих функцій обмеженого типу на просторі Y. Зауважимо, що для кожного $r > 0$ функціонал $\|\cdot\|_r$ є нормою на алгебрі $H_b(Y)$. Також зауважимо, що алгебра $H_b(Y)$ є алгеброю Фреше відносно топології, породженої зліченною системою норм $\{\|\cdot\|_r : r > 0, r \in \mathbb{Q}\}$.

Нехай Ω − вимірна за Лебегом підмножина множини дійсних чисел і Ξ_Ω − множина всіх вимірних за Лебегом бієкцій множини Ω, які зберігають міру. Для довільного переставно-інваріантного комплексного банахового простору $X(\Omega)$ вимірних за Лебегом функцій $x : \Omega \to \mathbb{C}$ функцію $f : X(\Omega) \to \mathbb{C}$ називають симетричною, якщо $f(x \circ \sigma) = f(x)$ для всіх функцій $x \in X(\Omega)$ і $\sigma \in \Xi_\Omega$. Будемо позначати через $H_{bs}(X(\Omega))$ підалгебру алгебри Фреше $H_b(X(\Omega))$, яка складається з усіх симетричних цілих функцій обмеженого типу на просторі $X(\Omega)$. Зауважимо, що $H_{bs}(X(\Omega))$ також є алгеброю Фреше.

Позначимо через $L_\infty[0,1]$ комплексний банахів простір усіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених комплекснозначних функцій на відрізку $[0,1]$ з нормою

$$\| x \| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1]} | x(t) | .$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо функцію $R_n : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ рівністю

$$R_n(x) = \iiint_{[0,1]} (x(t))^n \, dt ,$$

де $x \in L_\infty[0,1]$. Зауважимо, що функція R_n є неперервним симетричним n-

однорідним поліномом із нормою $\|R_n\|_1 = 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Поліноми R_n називають елементарними симетричними поліномами. Згідно з [8, теорема 4.3] кожен симетричний неперервний n-однорідний поліном $P : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$P = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}, \tag{2}$$

де $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+$ і $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$. Як наслідок, кожну функцію f, яка належить алгебрі Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ всіх симетричних цілих функцій обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,1]$, можна єдиним чином подати у вигляді

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}, \tag{3}$$

де $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+$ і $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$.

Теорема 1. ([8, розділ 3]) *Для кожної послідовності* $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *такої, що* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|\xi_n|} < +\infty$, *існує функція* $x \in L_\infty[0,1]$ *така, що*

$$R_n(x) = \xi_n$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ *і*

$$\|x\| < \frac{2}{M} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{|\xi_n|},$$

де

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2(k+1)}. \tag{4}$$

Розглянемо комплексний простір $L_1[0,+\infty) \cap L_\infty[0,+\infty)$ всіх інтегрованих за Лебегом суттєво обмежених функцій $x : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ з нормою

$$\|x\| = \max\left\{ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,+\infty)} |x(t)|, \int_{[0,+\infty)} |x(t)|\,dt \right\},$$

який згідно з [3, теорема 1.3, с. 97] є банаховим простором. Для скорочення запису будемо позначати цей простір як $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо функцію $\tilde{R}_n : (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty) \to \mathbb{C}$ аналогічно до функцій $R_n : L_\infty[0,1] \to \mathbb{C}$:

$$\tilde{R}_n(x) = \int_{[0,+\infty)} (x(t))^n\,dt,$$

де $x \in (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$. Згідно з [14] функція $\tilde{R}_n$ є неперервним симетричним n-однорідним поліномом із нормою $\|\tilde{R}_n\|_1 = 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Згідно з [14, теорема 2] кожен симетричний неперервний n-однорідний поліном $P : (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty) \to \mathbb{C}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$P = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n},$$

де $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+$ і $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$. Як наслідок, кожну функцію $f \in H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n}, \tag{5}$$

де $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_+$ і $\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \in \mathbb{C}$.

Як бачимо, елементи алгебр Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ і $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$ мають схожу будову. Далі побудуємо ізоморфізм між цими алгебрами, тобто лінійне мультиплікативне бієктивне відображення, яке є неперервним разом із оберненим до нього відображенням.

2. Основні результати.

Лема 1. *Для кожної функції* $y \in (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$ *існує функція* $x \in L_\infty[0,1]$ *така, що* $\tilde{R}_n(y) = R_n(x)$ *для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *і* $\| x \| \le \frac{2}{M} \| y \|$, *де стала* M *визначена рівністю* (4).

Д о в е д е н н я. Розглянемо числову послідовність $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, де $\xi_n = \tilde{R}_n(y)$ для $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\tilde{R}_n$ є n-однорідним поліномом і $\| \tilde{R}_n \| = 1$, то $| R_n(y) | \le \| y \|^n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Як наслідок,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{| \xi_n |} \le \| y \| < +\infty.$$

Тому згідно з теоремою 1 існує функція $x \in L_\infty[0,1]$ така, що $R_n(x) = \xi_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і

$$\| x \| \le \frac{2}{M} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt[n]{| \xi_n |} \le \frac{2}{M} \| y \|,$$

де стала M визначена рівністю (4). Лему доведено. ♦

Визначимо відображення $J : H_{bs}(L_\infty[0,1]) \to H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$. Нехай $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$, тоді її можна єдиним чином подати у вигляді (3). Покладемо

$$J(f) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n}. \tag{6}$$

Покажемо, що відображення J є коректно визначеним.

Твердження 1. *Для кожної функції* $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ *функція* $J(f)$ *належить алгебрі Фреше* $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$ *і для кожного* $r > 0$ *виконується оцінка*

$$\| J(f) \|_r \le \| f \|_{\frac{2}{M}r}, \tag{7}$$

де стала M *визначена рівністю* (4).

Д о в е д е н н я. Нехай $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Тоді f можна подати у вигляді (3). Покажемо, що функція $J(f)$, визначена рівністю (6), належить алгебрі Фреше $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$, тобто є цілою симетричною функцією обмеженого типу на просторі $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$. Згідно з лемою 1 для кожної функції $y \in (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$ існує функція $x \in L_\infty[0,1]$ така, що $\tilde{R}_n(y) = R_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $\| x \| \le \frac{2}{M} \| y \|$. Оскільки $\tilde{R}_n(y) = R_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $J(f)(y) = f(x)$. Враховуючи, що $\| x \| \le \frac{2}{M} \| y \|$, отримуємо нерівність

$$\sup_{\|y\|\le r} |f(y)| \le \sup_{\|x\|\le \frac{2}{M}r} |f(x)|$$

для кожного $r > 0$. Тобто

$$\|J(f)\|_r \le \|f\|_{\frac{2}{M}r} \tag{8}$$

для кожного $r > 0$. Звідси випливає, що функція $J(f)$ є коректно визначеною функцією на просторі $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$, тобто для кожного $y \in (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$ значення $J(f)(y)$ є скінченним. Оскільки функція f є функцією обмеженого типу, то вона є обмеженою на кожній кулі з центром в нулі простору $L_\infty[0,1]$. Тому згідно з нерівністю (8) функція $J(f)$ є обмеженою на кожній кулі з центром в нулі простору $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$, тобто функція $J(f)$ є функцією обмеженого типу.

Симетричність функції $J(f)$ випливає із симетричності поліномів $\tilde{R}_n$.

Доведемо, що функція $J(f)$ є цілою. Оскільки функція f є цілою, то її можна розкласти у ряд Тейлора:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n ,$$

де $P_0 = \alpha_0$ і

$$P_n = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}$$

для $n \in \mathbb{N}$. При цьому

$$\limsup_{n\to\infty} \|P_n\|_1^{1/n} = 0 . \tag{9}$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n , \tag{10}$$

де $\tilde{P}_0 = \alpha_0$ і $\tilde{P}_n = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n}$ для $n \in \mathbb{N}$. Згідно з нерівністю (8)

$$\left\| \tilde{P}_n \right\|_1 \le \|P_n\|_{\frac{2}{M}}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки поліном P_n є n-однорідним, то

$$\|P_n\|_{\frac{2}{M}} = \sup_{\|x\|\le\frac{2}{M}} |P_n(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} \left| P_n\left(\frac{2}{M}x\right) \right| =$$

$$= \left(\frac{2}{M}\right)^n \sup_{\|x\|\le 1} |P_n(x)| = \left(\frac{2}{M}\right)^n \|P_n\|_1 .$$

Тому

$$\left\| \tilde{P}_n \right\|_1 \le \left(\frac{2}{M}\right)^n \|P_n\|_1 . \tag{11}$$

Згідно з рівністю (9) і нерівністю (11)

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} \left\| \tilde{P}_n \right\|_1^{1/n} \le \frac{2}{M} \limsup_{n\to\infty} \|P_n\|_1^{1/n} = 0 .$$

Тому $\limsup_{n\to\infty} \| \tilde{P}_n \|_1^{1/n} = 0$ і, як наслідок, сума ряду (10) є цілою функцією на просторі $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$. Згідно з рівністю (6) ця сума дорівнює функції $J(f)$. Тому функція $J(f)$ є цілою.

Отже, функція $J(f)$ є цілою симетричною функцією обмеженого типу на просторі $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$, тобто функція $J(f)$ належить алгебрі Фреше $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$. Твердження доведено. ♦

Твердження 2. *Відображення J, визначене рівністю* (6), *є лінійним і неперервним.*

Д о в е д е н н я. Нехай f і g − довільні функції, які належать алгебрі Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Тоді згідно з (3) f і g можна єдиним чином подати у вигляді

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n},$$

$$g = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \beta_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}$$

відповідно. Нехай λ − довільне комплексне число. Зауважимо, що

$$\lambda f = \lambda\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \lambda\alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}$$

і

$$f + g = \alpha_0 + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} (\alpha_{k_1,\ldots,k_n} + \beta_{k_1,\ldots,k_n}) R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}.$$

Тому

$$J(\lambda f) = \lambda\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \lambda\alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n} = \lambda J(f)$$

і

$$J(f+g) = \alpha_0 + \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} (\alpha_{k_1,\ldots,k_n} + \beta_{k_1,\ldots,k_n}) \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n} =$$

$$= J(f) + J(g).$$

Отже, відображення J є лінійним.

Оскільки алгебри Фреше $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ і $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$ є зліченно-нормованими топологічними векторними просторами, то для лінійного відображення J неперервність еквівалентна обмеженості. Обмеженість, у свою чергу, випливає з оцінки (7). Отже, J є неперервним. Твердження доведено. ♦

Твердження 3. *Відображення J, визначене рівністю* (6), *є мультиплікативним.*

Д о в е д е н н я. Згідно з рівністю (6)

$$J(R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n}) = \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+$. Тому, враховуючи, що кожен неперервний однорідний симетричний поліном на $L_\infty[0,1]$ можна єдиним чином подати у вигляді (2), а також враховуючи лінійність відображення J, отримуємо, що

$$J(PQ) = J(P)J(Q) \tag{12}$$

для довільних поліномів $P, Q \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$.

Тепер розглянемо дві довільні функції $f, g \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Оскільки f і g – цілі, то їх можна подати як суми відповідних рядів Тейлора:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} P_n, \qquad g = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n .$$

Оскільки добуток двох елементів алгебри належить алгебрі, то функція fg є цілою симетричною функцією обмеженого типу на просторі $L_\infty[0,1]$. Тоді

$$fg = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} P_s Q_{k-s} .$$

З лінійності і неперервності J маємо:

$$J(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} J(P_s Q_{k-s}) .$$

Згідно з (12) $J(P_s Q_{k-s}) = J(P_s) J(Q_{k-s})$. Тому

$$J(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{k} J(P_s) J(Q_{k-s}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} J(P_n) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} J(Q_n) \right).$$

З огляду на лінійність і неперервність J запишемо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} J(P_n) = J\left(\sum_{n=0}^{\infty} P_n \right) = J(f),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} J(Q_n) = J\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n \right) = J(g).$$

Тому $J(fg) = J(f)J(g)$. Отже, відображення J є мультиплікативним. Твердження доведено. ♦

Покажемо, що відображення J є бієкцією. Для цього побудуємо ізометричне вкладення простору $L_\infty[0,1]$ у простір $(L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$. Визначимо відображення $v : L_\infty[0,1] \to (L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty)$ таким чином: для $x \in L_\infty[0,1]$ покладемо

$$v(x)(t) = \begin{cases} x(t), & \text{якщо } t \in [0,1], \\ 0, & \text{якщо } t \in (1,+\infty). \end{cases} \tag{13}$$

Як легко перевірити, відображення v є лінійним і ін'єктивним. Покажемо, що v є ізометричним. Для довільного $x \in L_\infty[0,1]$ маємо

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,+\infty)} | v(x)(t) | = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,1]} | x(t) | = \| x \|$$

і

$$\int_{[0,+\infty)} | v(x)(t) | \, dt = \int_{[0,1]} | x(t) | \, dt \le \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,1]} | x(t) | = \| x \| .$$

Тому $\| v(x) \| = \| x \|$. Отже, v є ізометричним вкладенням. Звідси, зокрема, випливає, що для кожного $r > 0$ множина

$$\{ v(x) : x \in L_\infty[0,1], \| x \| \le r \}$$

є підмножиною замкненої кулі із центром в нулі і радіусом r простору

$(L_1 \bigcap L_\infty)[0,+\infty)$. Тому для довільної функції обмеженого типу $g : (L_1 \bigcap L_\infty)[0,+\infty) \to \mathbb{C}$ і для довільного $r > 0$

$$\sup_{x\in L_\infty[0,1],\, \|x\|\le r} |g(v(x))| \le \sup_{y\in (L_1\cap L_\infty)[0,+\infty),\, \|y\|\le r} |g(y)|,$$

тобто

$$\|g\circ v\|_r \le \|g\|_r. \tag{14}$$

Лема 2. *Для кожної функції* $g \in H_{bs}((L_1 \bigcap L_\infty)[0,+\infty))$ функція $g\circ v$ *належить алгебрі Фреше* $H_{bs}(L_\infty[0,1])$, *де відображення* v *визначене формулою* (13).

Д о в е д е н н я. Нехай $g \in H_{bs}((L_1 \bigcap L_\infty)[0,+\infty))$. Оскільки функція g є функцією обмеженого типу, то для кожного $r > 0$ значення $\|g\|_r$ є скінченним. Тому з нерівності (14) випливає, що значення $\|g\circ v\|_r$ також є скінченним для кожного $r > 0$. Отже, функція $g\circ v$ є функцією обмеженого типу.

Покажемо, що функція $g\circ v$ є симетричною. Нехай $\sigma \in \Xi_{[0,1]}$. Покладемо

$$\tilde{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma(t), & \text{якщо } t \in [0,1],\\ t, & \text{якщо } t \in (1,+\infty). \end{cases}$$

Зауважимо, що $\tilde{\sigma} \in \Xi_{[0,+\infty)}$. Тому внаслідок симетричності g маємо, що $g(y\circ\tilde{\sigma}) = g(y)$ для довільної функції $y \in (L_1 \bigcap L_\infty)[0,+\infty)$. Таким чином, враховуючи, що $v(x\circ\sigma) = v(x)\circ\tilde{\sigma}$, отримаємо, що

$$(g\circ v)(x\circ\sigma) = g(v(x)\circ\tilde{\sigma}) = g(v(x)) = (g\circ v)(x).$$

Отже, функція $g\circ v$ є симетричною.

Доведемо, що функція $g\circ v$ є цілою. Оскільки функція g є цілою, то її ряд Тейлора, члени якого позначимо $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$, рівномірно збігається до g на кожній замкненій кулі із центром в нулі простору $(L_1 \bigcap L_\infty)[0,+\infty)$. При цьому

$$\limsup_{n\to\infty} \|P_n\|_1^{1/n} = 0.$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n \circ v. \tag{15}$$

Згідно із нерівністю (14) $\|P_n\circ v\|_1 \le \|P_n\|_1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тому

$$\limsup_{n\to\infty} \|P_n\circ v\|_1^{1/n} = 0,$$

тобто сума ряду (15) є цілою функцією на $L_\infty[0,1]$.

Нехай $r > 0$. Покажемо, що ряд (15) рівномірно збігається до функції $g\circ v$ на замкненій кулі з центром в нулі і радіусом r.

Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки ряд $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ рівномірно збігається до g на замкненій кулі з центром в нулі і радіусом r, то існує число $N \in \mathbb{N}$ таке, що для кожного $m > N$ виконується

$$\left\| g - \sum_{n=0}^{m} P_n \right\|_r < \varepsilon .$$

Тому згідно з нерівністю (14)

$$\left\| g \circ v - \sum_{n=0}^{m} P_n \circ v \right\|_r \le \left\| g - \sum_{n=0}^{m} P_n \right\|_r < \varepsilon$$

при $m > N$. Отже, ряд (15) рівномірно збігається до функції $g \circ v$ на кожній замкненій кулі з центром в нулі простору $L_\infty[0,1]$. Тому $g \circ v$ є цілою функцією. Лему доведено. ♦

Покажемо, що відображення J, визначене формулою (6), є сюр'єкцією. Нехай g – довільна функція, яка належить алгебрі $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$. Тоді згідно з рівністю (5) функцію g можна подати у вигляді

$$g = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} \tilde{R}_1^{k_1} \ldots \tilde{R}_n^{k_n} . \tag{16}$$

За лемою 2 функція $f = g \circ v$ належить алгебрі $H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Згідно з рівністю (16)

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} (\tilde{R}_1 \circ v)^{k_1} \ldots (\tilde{R}_n \circ v)^{k_n} .$$

Врахувавши, що $\tilde{R}_n \circ v = R_n$, отримуємо, що

$$f = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \alpha_{k_1,\ldots,k_n} R_1^{k_1} \ldots R_n^{k_n} .$$

З огляду на (6) отримуємо $J(f) = g$. Отже, J є сюр'єкцією. Більше того, для кожної функції $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$

$$J(f) \circ v = f . \tag{17}$$

Тепер доведемо, що відображення J є ін'єкцією. Оскільки J є лінійним відображенням, то достатньо показати, що образом кожного ненульового елемента алгебри $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ при дії відображення J є ненульовий елемент алгебри $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$. Нехай f – довільна ненульова функція, яка належить алгебрі $H_{bs}(L_\infty[0,1])$. Припустимо, що $J(f) = 0$. Тоді згідно з (17) $f = J(f) \circ v = 0$. Отримали суперечність. Отже, J є ін'єкцією.

Таким чином, відображення J є бієкцією. Із нерівностей (7) і (14) маємо, що

$$\| f \|_r \le \| J(f) \|_r \le \| f \|_{\frac{2}{M} r}$$

для кожної функції $f \in H_{bs}(L_\infty[0,1])$ і для кожного $r > 0$. З цієї нерівності випливає, що відображення J і J^{-1} є неперервними. Таким чином, отримуємо наступну теорему.

Теорема 2. *Відображення* J, *визначене формулою* (6), *є ізоморфізмом алгебр Фреше* $H_{bs}(L_\infty[0,1])$ *і* $H_{bs}((L_1 \cap L_\infty)[0,+\infty))$.

1. *Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. London Math. Soc. – 2003. – **35**, No. 1. – P. 55–64. – https://doi.org/10.1112/S0024609302001431

2. *Aron R., Galindo P., Pinasco D., Zalduendo I.* Group-symmetric holomorphic functions on a Banach space // Bull. London Math. Soc. – 2016. – **48**, No. 5. – P. 779–796. – https://doi.org/10.1112/blms/bdw043
3. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. – Boston: Academic Press, 1988. – 469 p.
4. *Chernega I. V.* Symmetric polynomials and holomorphic functions on infinite dimensional spaces // J. Vasyl Stefanyk Precarpathian Nat. Univ. – 2015. – **2**, No. 4. – P. 23–49. – https://doi.org/10.15330/jpnu.2.4.23-49
5. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // Rev. Mat. Complut. – 2014. – **27**, No. 2. – P. 575–585. – https://doi.org/10.1007/s13163-013-0128-0
6. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 2012. – **55**, No. 1. – P. 125–142. – https://doi.org/10.1017/S0013091509001655
7. *Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.* The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – **395**, No. 2. – P. 569–577. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.04.087
8. *Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A.* Symmetric and finitely symmetric polynomials on the spaces ℓ_∞ and $L_\infty[0,+\infty]$ // Math. Nachr. – 2018. – **291**, No. 11-12. – P. 1–15. – https://doi.org/10.1002/mana.201700314
9. *Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A.* The algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. – 2017. – **147**, No. 4. – P. 743–761. – https://doi.org/10.1017/S0308210516000287
10. *González M., Gonzalo R., Jaramillo J. A.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // J. London Math. Soc. – 1999. – **59**, No. 2. – P. 681–697. https://doi.org/10.1112/S0024610799007164
11. *Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A.* On algebraic basis of the algebra of symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // J. Funct. Spaces. – 2017. – **2017**, Article ID 4947925. – 8 p. – https://doi.org/10.1155/2017/4947925
12. *Mujica J.* Complex analysis in Banach spaces. – North Holland: Elsevier B.V., 1986. – 434 p.
13. *Nemirovskii A. S., Semenov S. M.* On polynomial approximation of functions on Hilbert space // Mat. USSR Sb. – 1973. – **21**, No. 2. – P. 255–277. https://doi.org/10.1070/SM1973v021n02ABEH002016
14. *Vasylyshyn T.* Symmetric polynomials on the space of bounded integrable functions on the semi-axis // Int. J. Pure Appl. Math. – 2017. – **117**, No. 3. – P. 425–430. – doi: 10.12732/ijpam.v117i3.7
15. *Vasylyshyn T. V.* Continuous block-symmetric polynomials of degree at most two on the space $(L_\infty)^2$ // Карпатські мат. публ. – 2016. – **8**, No. 1. – P. 38–43. https://doi.org/10.15330/cmp.8.1.38-43
16. *Vasylyshyn T. V.* Metric on the spectrum of the algebra of entire symmetric functions of bounded type on the complex L_∞ // Карпатські мат. публ. – 2017. – **9**, No. 2. – P. 198–201. – https://doi.org/10.15330/cmp.9.2.198-201
17. *Vasylyshyn T. V.* Symmetric continuous linear functionals on complex space $L_\infty[0,+\infty]$ // Карпатські мат. публ. – 2014. – **6**, No. 1. – P. 8–10. https://doi.org/10.15330/cmp.6.1.8-10
18. *Vasylyshyn T. V.* Topology on the spectrum of the algebra of entire symmetric functions of bounded type on the complex L_∞ // Карпатські мат. публ. – 2017. – **9**, No. 1. – P. 22–27. – https://doi.org/10.15330/cmp.9.1.22-27

АЛГЕБРЫ ЦЕЛЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ПО ЛЕБЕГУ СУЩЕСТВЕННО ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В работе показано, что алгебра Фреше всех целых симметрических функций ограниченного типа на комплексном банаховом пространстве всех измеримых по Лебегу существенно ограниченных комплекснозначных функций на отрезке [0,1] является изоморфной алгебре Фреше всех целых симметрических функций ограниченного типа на комплексном банаховом пространстве всех интегрируемых по Лебегу существенно ограниченных комплекснозначных функций на полуоси.

ALGEBRAS OF ENTIRE SYMMETRIC FUNCTIONS ON SPACES OF LEBESGUE MEASURABLE ESSENTIALLY BOUNDED FUNCTIONS

We show that the Fréchet algebra of all entire symmetric functions of bounded type on the complex Banach space of all Lebesgue measurable essentially bounded complex-valued functions on [0,1] is isomorphic to the Fréchet algebra of all entire symmetric functions of bounded type on the complex Banach space of all Lebesgue integrable essentially bounded complex-valued functions on the semi-axis.

Прикарпатський нац. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
05.05.2017