УДК 19.614

П. О. Савенко

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛІНІЙНИМ ДВОВИМІРНИМ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ

Досліджується застосування методу неявної функції до розв'язування двоточкової крайової задачі для системи лінійних диференціальних рівнянь з нелінійним входженням двовимірного спектрального параметра у коефіцієнти системи та крайові умови. Обґрунтовано збіжність наближених розв'язків дискретизованих задач до точних розв'язків вихідної задачі.

Вступ. Подається узагальнення запропонованого в [10, 12] чисельного методу розв'язування нелінійної двопараметричної спектральної проблеми на двоточкову крайову задачу для системи лінійних диференціальних рівнянь, коефіцієнти якої та граничні умови нелінійно залежать від двовимірного спектрального параметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$. При знаходженні наближених розв'язків цієї проблеми чисельними методами виникає потреба в дискретизації вихідної задачі $\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y} = 0$, яка досліджується у функціональних нескінченновимірних просторах. У результаті одержується апроксимуюча задача $\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y} = 0$, яка досліджується у скінченновимірних просторах. Важливе значення при побудові апроксимуючої задачі мають питання стійкості та збіжності наближених розв'язків до точних розв'язків вихідної задачі, оскільки вихідна і дискретизована задачі досліджуються в різних просторах. Зауважимо, що типовим підходом дискретизації при розв'язуванні задач для диференціальних рівнянь є застосування різницевих схем.

З використанням теорії неявних функцій [4] задача знаходження зв'язних компонент спектра зводиться до розв'язування відповідної задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку [12]. Для знаходження початкової умови для задачі Коші розв'язується допоміжна однопараметрична нелінійна спектральна задача. Збіжність наближених розв'язків цієї задачі до точних ґрунтується на результатах робіт [2, 3], отриманих для одновимірних нелінійних спектральних задач.

1. Формулювання задачі та побудова дискретного аналога.

1.1. Нехай на відрізку $a \le x \le b$ задана система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, залежних від двох комплексних числових параметрів $(\lambda_1, \lambda_2) = (\boldsymbol{\lambda}) \subset \mathbb{C}^2$:

$$
\begin{aligned}
&y_1' + a_{11}(x,\boldsymbol{\lambda})y_1 + a_{12}(x,\boldsymbol{\lambda})y_2 + \ldots + a_{1m}(x,\boldsymbol{\lambda})y_m = g_1(x)\,,\\
&y_2' + a_{21}(x,\boldsymbol{\lambda})y_1 + a_{22}(x,\boldsymbol{\lambda})y_2 + \ldots + a_{2m}(x,\boldsymbol{\lambda})y_m = g_2(x)\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,,\\
&y_m' + a_{m1}(x,\boldsymbol{\lambda})y_1 + a_{m2}(x,\boldsymbol{\lambda})y_2 + \ldots + a_{mm}(x,\boldsymbol{\lambda})y_m = g_m(x)\,.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Покладаємо, що коефіцієнти $a_{11}(x,\boldsymbol{\lambda}),\ldots,a_{mm}(x,\boldsymbol{\lambda})$ є комплекснозначними неперервними і досить гладкими функціями від x на відрізку $[a,b]$ для всіх $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda} \subset \mathbb{C}^2$ і голоморфними функціями від параметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) \subset \boldsymbol{\Lambda}$, де $\boldsymbol{\Lambda} = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ – область у комплексному просторі $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, причому Λ_1, Λ_2 – обмежені відкриті однозв'язні опуклі множини в $\mathbb{C}$.

Систему (1) запишемо у векторному вигляді

$$\mathbf{y}' + \mathbf{A}(x,\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y} = \mathbf{g}(x)\,, \tag{2}$$

де $\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\lambda}) = \left(a_{ij}(x,\boldsymbol{\lambda})\right)_1^m$, $\mathbf{g}(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x))^\top$ – відомі матриця і вектор, а $g_i(x)$ – неперервні на $[a,b]$ комплекснозначні функції, $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x))^\top$ – вектор-функція, що підлягає визначенню.

Відомо [1, 9], що, якщо $\mathbf{h}(x) = (h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x))^\top$ є яким-небудь частковим розв'язком неоднорідної системи (2), тоді розв'язок цієї системи можна подати у вигляді

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{v}(x) + \mathbf{h}(x) \tag{3}$$

де функція $\mathbf{v}(x)$ є розв'язком однорідної системи

$$\mathbf{y}' + \mathbf{A}(x,\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y} = 0\,, \tag{4}$$

відповідної до системи (2).

Оскільки однорідна система (4) нелінійно залежить від параметрів, то множина її розв'язків породжуватиме відповідну множину розв'язків неоднорідної системи при заданій фіксованій вектор-функції

$$\mathbf{g}(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x))^\top .$$

Для коректності формулювання задачі будемо покладати, що коефіцієнти матриці $\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\lambda}) = \left(a_{ij}(x,\boldsymbol{\lambda})\right)_1^m$ задовольняють теорему про неперервну залежність розв'язків від початкових даних і вхідних параметрів [1, 9].

Надалі розглядатимемо проблему існування і знаходження відмінних від тривіального розв'язків відповідної однорідної крайової задачі (4) [7]. Для цього до системи (4), записаної у розгорнутій формі

$$\begin{aligned}
\ell_1(\mathbf{y}) &= y_1' + a_{11}(x,\boldsymbol{\lambda})y_1 + a_{12}(x,\boldsymbol{\lambda})y_2 + \ldots + a_{1m}(x,\boldsymbol{\lambda})y_m\,,\\
\ell_2(\mathbf{y}) &= y_2' + a_{21}(x,\boldsymbol{\lambda})y_1 + a_{22}(x,\boldsymbol{\lambda})y_2 + \ldots + a_{2m}(x,\boldsymbol{\lambda})y_m\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\,,\\
\ell_m(\mathbf{y}) &= y_m' + a_{m1}(x,\boldsymbol{\lambda})y_1 + a_{m2}(x,\boldsymbol{\lambda})y_2 + \ldots + a_{mm}(x,\boldsymbol{\lambda})y_m\,,
\end{aligned} \tag{5}$$

приєднаємо граничні умови такого вигляду:

$$\eta(\boldsymbol{\lambda})^\top \mathbf{y}(x_s) = \mathbf{b}_s, \qquad 1 \le s \le m\,, \tag{6}$$

де

$$\eta(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \eta_{11}^{(s)}(\boldsymbol{\lambda}) & \eta_{12}^{(s)}(\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & \eta_{1m}^{(s)}(\boldsymbol{\lambda}) \\ \eta_{21}^{(s)}(\boldsymbol{\lambda}) & \eta_{22}^{(s)}(\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & \eta_{2m}^{(s)}(\boldsymbol{\lambda}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta_{k_s 1}^{(s)}(\boldsymbol{\lambda}) & \eta_{k_s 2}^{(s)}(\boldsymbol{\lambda}) & \cdots & \eta_{k_s m}^{(s)}(\boldsymbol{\lambda}) \end{pmatrix}$$

– відома матриця, а

$$\mathbf{b}_s = \begin{pmatrix} b_1^{(s)} \\ b_2^{(s)} \\ \cdots \\ b_{k_s}^{(s)} \end{pmatrix}$$

– відомий вектор, $n \ge 2$, $\sum\limits_{s=1}^{n} k_s = m$, $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} \le x_n \le b$.

Якщо $n = 2$, то в задачі (5), (6) граничні умови набувають вигляду

$$\mathbf{h}_1^{\top}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}(x_1) = b_{11}, \qquad \mathbf{h}_2^{\top}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}(x_2) = b_{2s},$$

де, як правило, покладають $x_1 = a$, $x_2 = b$ або $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. У цьому випадку задачу (5), (6) називають двоточковою. Якщо $n > 2$, то крайову задачу (5), (6) називають багатоточковою або n-точковою.

1.2. Застосовуючи до системи (5) послідовні диференціювання і виключення зайвих змінних згідно з [9], зведемо лінійну систему (5) до одного рівняння m-го порядку з однією невідомою функцією.

Розглянемо нормальну систему рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_2,\ldots,y_m), \\ y_2' &= f_2(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_2,\ldots,y_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m' &= f_m(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_2,\ldots,y_m), \end{aligned} \tag{7}$$

де $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ − шукані функції від аргументу x.

Диференціюючи по x перше із рівнянь (7), одержуємо

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{df_1}{dy_m}\frac{dy_m}{dx}.$$

Заміняючи похідні $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, …, $\frac{dy_m}{dx}$ їх виразами f_1, f_2, …, f_m із рівнянь (7), одержимо рівняння

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_2,\ldots,y_m).$$

Диференціюючи одержаний вираз і поступаючи аналогічно до попереднього, знаходимо

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_2,\ldots,y_m).$$

Продовжуючи далі таким же чином, одержуємо, накінець, рівняння

$$\frac{d^my_1}{dx^m} = F_n(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_2,\ldots,y_m).$$

Таким чином, отримуємо таку систему:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_2,\ldots,y_m), \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} &= F_2(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_2,\ldots,y_m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^my_1}{dx^m} &= F_n(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_2,\ldots,y_m). \end{aligned} \tag{8}$$

Із перших $m-1$ рівнянь визначаємо y_2, y_3, …, y_m, виражаючи їх через x, y і похідні $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}$, …, $\frac{d^{(m-1)}y_1}{dx^{(m-1)}}$:

$$\begin{aligned} y_2 &= \varphi_2\big(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_1',\ldots,y_1^{(m-1)}\big), \\ y_3 &= \varphi_3\big(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_1',\ldots,y_1^{(m-1)}\big), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_m &= \varphi_m\big(x,\boldsymbol{\lambda},y_1,y_1',\ldots,y_1^{(m-1)}\big). \end{aligned} \tag{9}$$

Підставляючи ці вирази в останнє з рівнянь (8), одержимо рівняння m-го порядку для знаходження функції y_1:

$$\frac{d^m y_1}{dx^m} = \Phi(x, \boldsymbol{\lambda}, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m-1)}). \tag{10}$$

1.3. Таким чином, у результаті наведених вище перетворень одержуємо відповідну до (5), (6) однорідну двоточкову крайову задачу для лінійного диференціального рівняння m-го порядку. Замінивши у ній y_1 на y, а відрізок $[a,b]$ – на $[0,1]$, запишемо цю задачу у вигляді

$$L(\boldsymbol{\lambda})y(x) \equiv \sum_{k=0}^{m} \alpha_k(x,\boldsymbol{\lambda})y^{(k)}(x) = 0, \qquad 0 \le x \le 1, \tag{11}$$

$$\ell_i(\boldsymbol{\lambda})y \equiv \sum_{k=0}^{m-1} [\alpha_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})y^{(k)}(0) + \beta_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})y^{(k)}(1)] = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m. \tag{12}$$

Покладаємо також, що одержані в результаті наведених вище перетворень коефіцієнти $\alpha_k(x,\boldsymbol{\lambda})$, $\alpha_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})$, $\beta_{i,k}(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{C}$, $i = 1,\ldots,m$, $k = 0,1,\ldots,m-1$, $\alpha_m(x,\boldsymbol{\lambda}) = 1$ залишаються достатньо гладкими функціями від x на відрізку $[0,1]$ і для всіх $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$, а $\alpha_k(x,\boldsymbol{\lambda})$, $\alpha_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})$, $\beta_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})$ є голоморфними функціями від $\boldsymbol{\lambda}$ на $\boldsymbol{\Lambda}$. Крім того, приймемо, що для коефіцієнтів $\alpha_k(x,\boldsymbol{\lambda})$ виконується умова

$$\max_{0\le x\le 1}\max_{\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{\Lambda}_0} |\alpha_k(x,\boldsymbol{\lambda})| \le c(\boldsymbol{\Lambda}_0) = \text{const}, \qquad k = 0,1,\ldots,m-1.$$

Відомо [1], що розв'язком крайової задачі з комплексними коефіцієнтами в рівнянні (11) і крайових умовах (12) при фіксованому $\boldsymbol{\lambda}$ є комплекснозначна функція

$$y(x) = u(x) + iv(x), \qquad u(x),\, v(x) \in C^{(n)}[0,1].$$

Очевидно, що $y(x) \equiv 0$ при $x \in [0,1]$ є розв'язком задачі (11), (12). Необхідно знайти такі значення $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ з $\boldsymbol{\Lambda}$, при яких задача (11), (12) має ненульові розв'язки, тобто знайти власні значення цієї задачі.

Зазначимо, що числові алгоритми розв'язування крайової задачі типу (11), (12) детально наведено в роботі [10]. Тому нижче опускаємо детальний опис наведених там перетворень і подамо лише деякі з них, необхідні для спрощення читання.

1.4. Побудову дискретного аналога для задачі (5), (6) з використанням різницевих аналогів похідних можна здійснювати по-різному. Для знаходження наближеного розв'язку задачі (11), (12) аналогічно до [6, 14, 15] застосовуємо метод скінченних різниць, побудувавши на відрізку $[0,1]$ рівномірну сітку в точках $x_j = jh$, де $h = 1/p$, $j = 0,1,\ldots,p$. При заміні похідних у вузлах сітки деякими їхніми різницевими аналогами будемо використовувати збіжні формули чисельного диференціювання, записані в комплексній формі, і їхні аналоги для дійсної та уявної частин:

$$y^{(k)}(x) = h^{-k} \sum_{g=-r}^{s} a_g y(x+gh) + \rho_h(y,x),$$

$$u^{(k)}(x) = h^{-k} \sum_{g=-r}^{s} a_g u(x+gh) + \rho_h(u,x),$$

$$v^{(k)}(x) = h^{-k} \sum_{g=-r}^{s} a_g v(x+gh) + \rho_h(v,x), \tag{13}$$

де $y^{(k)}(x) = u^{(k)}(x) + iv^{(k)}(x)$, з умовою збіжності

$$\lim_{h\to 0}\max_{0\le x\le 1}\left|\rho_h(y,x)\right| \equiv \lim_{h\to 0}\max_{0\le x\le 1}\left[\rho_h^2(u,x)+\rho_h^2(v,x)\right]^{1/2} = 0 . \qquad (14)$$

У підсумку одержимо скінченний набір різницевих аналогів похідних для функції $y(x)$ вигляду

$$\left[d_h^k \mathbf{y}^h\right]_j = h^{-k}\sum_{g=-r}^{s} a_g\left[\mathbf{y}^h\right]_{j+g}, \qquad \left[\mathbf{y}^h\right]_q = y_q^h . \qquad (15)$$

Тут $\mathbf{y}^h$ – деякий вектор, коефіцієнти a_g, а також величини s, r, $\rho_h(y,t)$ залежать від порядку похідної і типу формули в наборі.

Для обчислення похідних біля крайніх точок відрізка $[0,1]$ необхідно обчислювати значення функції $y(x)$ за його межами [6]. При цьому використовуємо аналітичне продовження функції $y(x)$ за формулою Тейлора за межі відрізка $[0,1]$, припускаючи, що функція y є $m+\mu$ разів неперервно диференційовною на відрізку $[0,1]$.

Запишемо дискретний аналог задачі (11), (12) у точках $x_j = jh$. Замінюючи похідні $y^{(k)}(jh)$, $j = 0,1,\ldots,p$, у рівнянні (11) і крайових умовах (12) їхніми різницевими аналогами та групуючи отримані вирази при $y(qh)$ в порядку зростання $q = -\sigma,\ldots,p+\tau$, одержимо при будь-якому фіксованому $n \in \mathbb{N}$ систему лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку ($n = m+p+1$) відносно вектора невідомих $\mathbf{y}^h = \left(y_{-\sigma}^h,\ldots,y_{p+\tau}^h\right) \in \mathbb{C}^n$, яка у векторно-координатному записі може бути представлена у вигляді

$$\left[L_h(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}^h\right]_j \equiv \sum_{k=0}^{m}\alpha_k(\boldsymbol{\lambda},jh)\left[D_h^{(k)}\mathbf{y}^h\right]_j = 0, \qquad j = 0,1,\ldots,p ,$$

$$\ell_{i,h}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}^h \equiv \sum_{k=0}^{m-1}\left(\alpha_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})\left[D_h^{(k)}\mathbf{y}^h\right]_0 + \beta_{i,k}(\boldsymbol{\lambda})\left[D_h^{(k)}\mathbf{y}^h\right]_n\right) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m ,$$

де $D_h^{(k)}$ – різницеві аналоги похідних, які можуть залежати від номера координати j та індексу рівняння i.

Отриману таким способом однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь n-го порядку подамо у векторному записі:

$$L_h(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}^h \equiv 0, \qquad \ell_{i,h}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}^h \equiv 0, \qquad i = 1,2,\ldots,m ,$$

або у більш загальному вигляді як

$$\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}^h = 0 . \qquad (16)$$

Зауважимо, що коефіцієнти $a_{ij}^n(\boldsymbol{\lambda})$ матриці $\mathbf{A}_n$ цієї системи є голоморфними функціями векторного параметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2)$ для всіх $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$.

Систему рівнянь (16) будемо розглядати як задачу на знаходження наближених власних значень: необхідно знайти таку множину значень параметрів $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_1^0,\lambda_2^0)$, що належить до $\boldsymbol{\Lambda}$, при яких однорідна система (6) буде мати відмінні від тривіального розв'язки.

Число $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_1^0,\lambda_2^0) \in \boldsymbol{\Lambda}$ буде власним значенням задачі (6), якщо точка $\boldsymbol{\lambda}^0$ є коренем рівняння [5]

$$\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)=\det\begin{pmatrix} a_{11}^n(\lambda_1,\lambda_2) & a_{12}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \dots & a_{1n}^n(\lambda_1,\lambda_2)\\ a_{21}^n(\lambda_1,\lambda_2) & a_{22}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \dots & a_{2n}^n(\lambda_1,\lambda_2)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}^n(\lambda_1,\lambda_2) & a_{n2}^n(\lambda_1,\lambda_2) & \dots & a_{nn}^n(\lambda_1,\lambda_2)\end{pmatrix}=0. \qquad (17)$$

Знаходження множини розв'язків рівняння (17) розглядаємо як задачу на знаходження неявно заданої функції $\lambda_2=\lambda_2(\lambda_1)$ або $\lambda_1=\lambda_1(\lambda_2)$. Теорема про неявно задані функції [4, 13] визначає умови існування розв'язків рівняння (17) і дозволяє звести цю задачу до чисельного розв'язування відповідної задачі Коші:

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1}=-\frac{\partial\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)/\partial\lambda_1}{\partial\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)/\partial\lambda_2}, \qquad (18)$$

$$\lambda_2(\lambda_1^n)=\lambda_2^n=\alpha\lambda_1^n, \qquad n\in\mathbb{N}, \qquad (19)$$

у випадку, якщо $\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1^0,\lambda_2^0)}{\partial\lambda_2}\neq 0$ і відома початкова умова (19)[1].

Для визначення початкової умови (19) паралельно розглянемо допоміжну, відповідну (11), (12), однопараметричну спектральну задачу на «комплексній прямій» $\lambda_2=\beta\lambda_1$:

$$L_\beta(\lambda_1)y(x)\equiv\sum_{k=0}^{m}\tilde\alpha_k(x,\lambda_1,\beta\lambda_1)y^{(k)}(x)=0, \qquad 0\le x\le 1,$$

$$\ell_{i,\beta}(\lambda_1)y\equiv\sum_{k=0}^{m-1}\left[\tilde\alpha_{i,k}(\lambda_1,\beta\lambda_1)y^{(k)}(0)+\tilde\beta_{i,k}(\lambda_1,\beta\lambda_1)y^{(k)}(1)\right]=0,$$

$$i=1,2,\dots,m, \qquad (20)$$

де $\tilde\alpha_k(x,\lambda)=\alpha_k(x,\lambda_1,\beta\lambda_1)$, $\tilde\alpha_{i,k}(\lambda_1)=\alpha_{i,k}(\lambda_1,\beta\lambda_1)$, $\tilde\beta_{i,k}(\lambda_1)=\beta_{i,k}(\lambda_1,\beta\lambda_1)$, а дійсний параметр β вибираємо так, щоб перетин «комплексної прямої» $\lambda_2=\beta\lambda_1$ з областю $\mathbf{\Lambda}$ (який позначимо через $\mathbf{\Lambda}_\beta$) був непорожнім. Область зміни параметра λ_1, що відповідає $\mathbf{\Lambda}_\beta$, позначимо через $\Lambda_{\beta,1}$. Покладаючи в (16) $\lambda_2=\beta\lambda_1$, одержуємо векторний запис дискретизованої нелінійної однопараметричної спектральної задачі

$$\mathbf{A}_{n,\beta}(\lambda_1,\beta\lambda_1)\mathbf{y}^h=0, \qquad \lambda_1\in\Lambda_{\beta,1}. \qquad (21)$$

Відповідне до (21) рівняння відносно параметра λ_1 набуває вигляду

$$\Psi_{n,\beta}(\lambda_1,\beta\lambda_1)\equiv\det\left(\mathbf{A}_{n,\beta}(\lambda_1,\beta\lambda_1)\right)=0, \qquad (22)$$

розв'язуючи яке, знаходимо початкові умови (19) задачі Коші.

2. Збіжність наближених розв'язків.

Зауважимо, що з теорем збіжності [2, 3] наближених розв'язків нелінійної однопараметричної спектральної задачі (20) при достатньо великих

---

[1] Якщо при розв'язуванні задачі Коші (18), (19) похідна $\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1^0,\lambda_2^0)}{\partial\lambda_2}$ прямує до нуля, то слід перейти до розв'язування еквівалентної задачі

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2}=-\frac{\partial\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)/\partial\lambda_2}{\partial\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)/\partial\lambda_1}, \qquad \lambda_1(\lambda_2^n)=\lambda_1^n.$$

N_* випливає існування в околі ізольованої точки спектра $(\lambda_1^{(0)}, \beta\lambda_1^{(0)})$ задачі (20) зв'язної компоненти спектра задачі (11), (12), до якої належить точка $(\lambda_{1,N_*}^{(0)}, \lambda_{2,N_*}^{(0)}) = (\lambda_{1,N_*}^{(0)}, \beta\lambda_{1,N_*}^{(0)})$, яка як завгодно мало відхиляється від точного розв'язку $(\lambda_1^{(0)}, \beta\lambda_1^{(0)})$ задачі (20).

На підставі (17) при $n \in \mathbb{N}$ отримуємо функціональну послідовність визначників $\{\Psi_n(\boldsymbol{\lambda})\}$ від двох змінних $(\lambda_1, \lambda_2) = \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$, елементи яких $a_{ij}^n(\lambda_1, \lambda_2)$ відповідно до умов задачі (11), (12) і умов побудови дискретного аналога цієї задачі (16) є голоморфними функціями від λ_1, λ_2. Частинні похідні $\left\{\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_i}\right\}$, $i = 1, 2$, існують, неперервні й обчислюються за формулами

$$\frac{\partial \Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda_1,\lambda_2) & \cdots & a_{1,j-1}(\lambda_1,\lambda_2) & \dfrac{\partial a_{1,j}(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_i} & a_{1,j+1}(\lambda_1,\lambda_2) & \cdots & a_{1,n}(\lambda_1,\lambda_2) \\ a_{21}(\lambda_1,\lambda_2) & \cdots & a_{2,j-1}(\lambda_1,\lambda_2) & \dfrac{\partial a_{2,j}(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_i} & a_{2,j+1}(\lambda_1,\lambda_2) & \cdots & a_{2,n}(\lambda_1,\lambda_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(\lambda_1,\lambda_2) & \cdots & a_{n,j-1}(\lambda_1,\lambda_2) & \dfrac{\partial a_{n,j}(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial \lambda_i} & a_{n,j+1}(\lambda_1,\lambda_2) & \cdots & a_{n,n}(\lambda_1,\lambda_2) \end{pmatrix}.$$

Для обґрунтування збіжності наближених розв'язків двопараметричної спектральної задачі до точних застосуємо результати, одержані стосовно нелінійної однопараметричної спектральної задачі [2, 3]. Для цього простори, в яких досліджується задача, означимо аналогічно, як у [6]:

$$E = \{z \mid z = y \in C^{(m)}[0,1],\ \ \|z\|_E = \|z\|_{C^{(m)}[0,1]}\},$$

$$V = \{w \mid w = (v, v_1, \ldots, v_m) \in C[0,1] \times \mathbb{C}^m,$$

$$\|w\|_V = \max\{\max_{0 \le x \le 1} |v(x)|,\ \max_{i=1,2,\ldots,m} |v_i|\}\},$$

$$E_n = \{\mathbf{t}_n \mid \mathbf{t}_n = \mathbf{y}^h = (y_{-\sigma}^h, \ldots, u_{p+\tau}^h) \in \mathbb{C}^{m+p+1},\ \ \|\mathbf{t}\|_{E_n} = \|\mathbf{y}^h\|_{C^n[0,1]}\},$$

$$V_n = \{\mathbf{w}_n \mid \mathbf{w}_n = (v_0^h, \ldots, v_n^h; v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{C}^{m+p+1},$$

$$\|\mathbf{w}_n\|_{V_n} = \max\{\max_{j=0,1,\ldots,n} |v_j^h|,\ \max_{i=1,2,\ldots,m} |v_i|\}\}, \tag{23}$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})z = L(\boldsymbol{\lambda})y = (L(\boldsymbol{\lambda})y;\ \ell_1(\boldsymbol{\lambda})y, \ldots, \ell_m(\boldsymbol{\lambda})y) \in V \qquad \forall x \in E,$$

$$\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda})z_n = L_n(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}^h = (L_n(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}^h;\ \ell_1(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}^h y, \ldots, \ell_m(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}^h) \in V_n \quad \forall \mathbf{x}_n \in E_n, \tag{24}$$

З наведених означень випливає, що E, V, E_n, V_n – банахові простори, а задачі (11), (12) і (16) рівносильні відповідно до операторних рівнянь

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})z = 0, \qquad z \in E, \qquad \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}) : E \to V, \tag{25}$$

$$\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{z}_n = 0, \qquad \mathbf{z}_n \in E_n, \qquad \mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda}) : E_n \to V_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Звуження операторних рівнянь (25), (26) на область $\boldsymbol{\Lambda}_\beta$ подамо у вигляді

$$\mathbf{A}_\beta(\boldsymbol{\lambda})z = 0\,, \qquad z \in E\,, \qquad \mathbf{A}_\beta(\boldsymbol{\lambda}) : E \to V\,, \tag{27}$$

$$\mathbf{A}_{n,\beta}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{z}_n = 0\,, \qquad \mathbf{z}_n \in E_n\,, \qquad \mathbf{A}_{n,\beta}(\boldsymbol{\lambda}) : E_n \to V_n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{28}$$

Введемо у розгляд лінійні обмежені оператори (зв'язуючі відображення) [6]:

$$P_n : E \to E_n\,, \qquad Q_n : V \to V_n\,, \tag{29}$$

де

$$P_n z = P_n y(t) = \big(Tu(-\sigma h),\ldots,Tu((p+\tau)h)\big)\,,$$

$$Q_n \mathbf{w} = Q_n\big(v(t);v_1,\ldots,v_m\big) = \big(v(0),v(h),\ldots,v(nh);v_1,\ldots,v_m\big)\,, \tag{30}$$

які мають такі властивості:

$$\|P_n z\|_{E_n} \to \|z\|_E \quad \forall z \in E, \qquad \|Q_n w\|_{V_n} \to \|w\|_V \quad \forall w \in V\,. \tag{31}$$

Покладаємо, що при $n \in \mathbb{N}$ виконуються такі умови:

1°. Простори E, V, E_n, V_n – банахові, а зв'язуючі оператори (29) лінійні і мають властивості (31).

2°. $\boldsymbol{\Lambda}$ – опукла відкрита область в $\mathbb{C}^2$, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})$ і $\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda})$ – голоморфні на $\boldsymbol{\Lambda}$ оператор-функції зі значеннями з $L(E,V)$ і $L(E_n,V_n)$, відповідно.

3°. При кожному фіксованому $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$ оператори $\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})$ і $\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda})$ є фредгольмовими.

4°. $\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda}) \to \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})$ властиво $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\Lambda}$.

5°. Норми $\|\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda})\|$ рівномірно обмежені по n і $\boldsymbol{\lambda}$ на кожному компакті $\boldsymbol{\Lambda}_0 \subseteq \boldsymbol{\Lambda}$.

6°. Резольвентна множина $\rho(\mathbf{A}_\beta) \neq \varnothing$, тобто $\sigma(\mathbf{A}_\beta) \neq \boldsymbol{\Lambda}_\beta$.

Стосовно однопараметричної спектральної задачі (20) згідно з прийнятими припущеннями ***1°–6°*** виконуються умови теореми 1 [2, с. 68] і теореми 2 [2, с. 69], з яких випливає, що при достатньо великому N_* в околі ізольованої точки спектра $\big(\lambda_1^{(0)},\beta\lambda_1^{(0)}\big)$ задачі (20) існує зв'язна компонента спектра задачі (11), (12), до якої належить точка $\big(\lambda_{1,N_*}^{(0)},\lambda_{2,N_*}^{(0)}\big)=\big(\lambda_{1,N_*}^{(0)},\beta\lambda_{1,N_*}^{(0)}\big)$, яка як завгодно мало відхиляється від точного розв'язку $\big(\lambda_1^{(0)},\beta\lambda_1^{(0)}\big)$ однопараметричної спектральної задачі (20).

Існування розв'язків нелінійної двопараметричної спектральної задачі (11), (12) і збіжності наближених розв'язків до точних розв'язків вихідної задачі ґрунтується на різних типах збіжності послідовності операторів дискретизованої задачі до операторів вихідної задачі.

У випадку, коли наближені оператори $\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda})$ збігаються до $\mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})$ стійко при будь-якому $\boldsymbol{\lambda} \in r(\mathbf{A}) = \boldsymbol{\Lambda}\backslash s(\mathbf{A})$, справджується [11] така

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови*:

- *оператор-функція* $\mathbf{A}(\cdot,\cdot) : \boldsymbol{\Lambda} \to \mathcal{L}(E,V)$ *голоморфна, причому* $s(\mathbf{A}) \neq \boldsymbol{\Lambda}$;
- *оператор-функції* $\mathbf{A}_n(\cdot,\cdot) : \boldsymbol{\Lambda} \to \mathcal{L}(E_n,V_n)$ *голоморфні і для будь-якої замкненої обмеженої множини* $\boldsymbol{\Lambda}_0 \subset \boldsymbol{\Lambda}$ *виконується нерівність*

  $$\max_{\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{\Lambda}_0}\|\mathbf{A}_n(\lambda_1,\lambda_2)\| \le c(\boldsymbol{\Lambda}_0) = \text{const}, \qquad n \in \mathbb{N}\,;$$

- *оператори* $\mathbf{A}(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathcal{L}(E,V)$, $\mathbf{A}_n(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathcal{L}(E_n,V_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *є фредгольмовими з нульовим індексом при будь-якому* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2) \in \boldsymbol{\Lambda}$;

- *спектр* $s(\mathbf{A}_\beta) \neq \mathbf{\Lambda}_\beta$, *а послідовність функцій* $\Psi_n(\lambda_1,\lambda_2)$ *є диференційовною в області* $\mathbf{\Lambda}$;
- $\mathbf{A}_n(\boldsymbol{\lambda}) \to \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})$ *стійко при будь-якому* $\boldsymbol{\lambda} \in r(\mathbf{A}) = \mathbf{\Lambda} \backslash s(\mathbf{A})$.

Тоді справджуються наступні твердження:

(***i***) *кожна точка спектра* $\boldsymbol{\lambda}_\beta^{(0)} = (\lambda_1, \beta\lambda_1) \in s(\mathbf{A}_\beta)$ *є ізольованою, є власним значенням і їй відповідає скінченновимірний власний підпростір* $N(\mathbf{A}(\lambda_1^{(0)}))$ *і скінченновимірний кореневий підпростір*;

(***ii***) *для кожного* $\boldsymbol{\lambda}_\beta^{(0)} \in s(\mathbf{A}_\beta)$ *існує послідовність* $\{\boldsymbol{\lambda}_{\beta,n}^{(0)}\}$ *із* $\boldsymbol{\lambda}_{\beta,n}^{(0)} \in s(\mathbf{A}_{\beta,n})$, $n > n_0$, *така, що* $\boldsymbol{\lambda}_{\beta,n}^{(0)} \to \boldsymbol{\lambda}_\beta^{(0)}$;

(***iii***) *кожна точка* $\boldsymbol{\lambda}_\beta^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \beta\lambda_1^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ *є точкою спектра оператор-функції* $\mathbf{A}(\lambda_1,\lambda_2)$;

(***iv***) *якщо в деякому малому* ε_0*-околі точки* $\boldsymbol{\lambda}_\beta^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \beta\lambda_1^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ *для всіх* n, *більших від деякого номера* N_0 (*відповідного* ε_0, *згідно з означенням границі послідовності*), *послідовність частинних похідних* $\left\{\dfrac{\partial \Psi_n}{\partial \lambda_2}(\lambda_{1,n}^0, \beta\lambda_{1,n}^0)\right\}$ *є відмінною від нуля, тоді в як завгодно малому* ε_**-околі точки* $(\lambda_1^{(0)}, \beta\lambda_1^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ *існує неперервно диференційовна функція* $\lambda_{2,N_*} = \varphi_{N_*}(\lambda_1)$, *яка є розв'язком рівняння* (22), *причому* $\lambda_{2,N_*}^{(0)} = \varphi_{N_*}(\lambda_{1,N_*}^{(0)})$, *і в точці* $(\lambda_{1,N_*}^{(0)}, \lambda_{2,N_*}^{(0)}) = (\lambda_{1,N_*}^{(0)}, \varphi_{N_*}(\lambda_{1,N_*}^{(0)}))$ *як завгодно мало відхиляється від точки спектра допоміжної однопараметричної задачі* (21), *тобто в деякій біциліндричній області*

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \left\{(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}_0 : \left|\lambda_1 - \lambda_1^{(0)}\right| < \varepsilon_1, \left|\lambda_2 - \lambda_2^{(0)}\right| < \varepsilon_2\right\}$$

існує зв'язна компонента спектра оператор-функції $\mathbf{A}_{N_*}(\lambda_1,\lambda_2)$, *де* ε_1, ε_2 – *деякі дійсні малі константи.*

3. Числовий приклад.

3.1. Побудова алгоритму для знаходження наближених розв'язків вихідної задачі (11), (12) полягає в наступному:

- Вибираємо відповідний крок дискретизації задачі і будуємо на відрізку $[0,1]$ сітку.
- Використовуючи дискретні аналоги похідних, задачу (11), (12) зводимо до матричної задачі (16).
- Вибираючи відповідне значення параметра β і використовуючи відомі методи для знаходження коренів трансцендентних рівнянь, знаходимо наближені розв'язки допоміжної однопараметричної спектральної задачі (22).
- Якщо спектр задачі (22) є дискретним, тобто кожне власне значення $(\lambda_{1,k}^{(0)}, \beta\lambda_{1,k}^{(0)})$ є ізольованим, і частинна похідна $\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_{1,k}^{(0)}, \beta\lambda_{1,k}^{(0)})}{\partial \lambda_2} \neq 0$ (або $\dfrac{\partial \Psi_n(\lambda_{1,k}^{(0)}, \beta\lambda_{1,k}^{(0)})}{\partial \lambda_1} \neq 0$), то, вибираючи за початкову умову (19) величину $\lambda_{2,k}(\lambda_{1,k}^{(0)}) = \beta\lambda_{1,k}^{(0)}$, знаходимо в деякому околі точки $(\lambda_{1,k}^{(0)}, \beta\lambda_{1,k}^{(0)})$ зв'язну компоненту спектра задачі (11), (12).

3.2. Розглянемо однорідну двоточкову крайову задачу для системи двох лінійних рівнянь першого порядку з нелінійним входженням двовимірного спектрального параметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} + \mathbf{A}(x,\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y} = 0\,, \qquad 0 \le x \le 1\,, \tag{32}$$

$$\eta_1(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}(0) = 0\,,$$

$$\eta_2(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{y}(1) = 0\,, \tag{33}$$

де $\mathbf{y}$ – вектор-функція у двовимірному просторі $\mathbb{R}_2$, $\mathbf{y}(x) = \{y_1(x), y_2(x)\}$, оператори $\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\lambda})$, $\eta_1(\boldsymbol{\lambda})$, $\eta_2(\boldsymbol{\lambda})$ у цьому просторі визначені матрицями

$$\mathbf{A}(x,\boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_2^2\cos x & \lambda_1^2 \sin x \end{pmatrix},$$

$$\eta_1(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\eta_2(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

У покоординатному записі задача (32), (33) відповідно має вигляд

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2(x)\,,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -\lambda_1^2 \cos x y_1(x) - \lambda_1^2 \sin x y_2(x)\,, \tag{35}$$

$$\ell_1(0) = \lambda_2^2 y_1(0) + \lambda_1 y_2(0)\,,$$

$$\ell_2(1) = \lambda_1^2 y_1(1) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) y_2(1)\,. \tag{36}$$

Використовуючи алгоритм, наведений у **п**. ***3.1***, зведемо систему (35) до лінійного диференціального рівняння другого порядку. Для цього продиференціюємо перше з рівнянь (35):

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dy_2}{dx}\,. \tag{37}$$

Підставляючи у цей вираз друге з рівнянь системи (35), одержуємо диференціальне рівняння другого порядку для функції $y_1(x)$:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \lambda_1^2 \sin x \frac{dy_1}{dx} + \lambda_2^2 \cos x y_1 = 0 \tag{38}$$

З огляду на перше рівняння із системи (35) крайові умови (36) перепишемо у вигляді

$$\ell_1(0) = \lambda_1 y_1'(0) + \lambda_2^2 y_1(0)\,,$$

$$\ell_2(1) = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) y_1'(1) + \lambda_1^2 y_1(1)\,. \tag{39}$$

Таким чином, початкова двоточкова крайова задача (35), (36) для лінійної системи двох диференціальних рівнянь еквівалентна узагальненій задачі на власні значення (38), (39) для лінійного диференціального рівняння другого порядку, коефіцієнтами якого та крайові умови нелінійно залежать від двох спектральних параметрів.

При розв'язуванні задачі Коші (18), (19) використовувались методи Рунґе – Кутта та Адамса. Знайдені зв'язні компоненти спектра (криві лінії) задачі (38), (39) зображено на рис. 1.

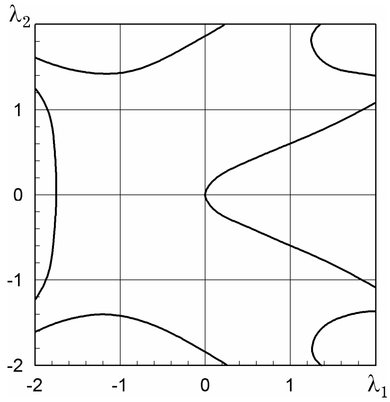

Рис. 1

Висновки. Відмітимо, що запропонований у роботі метод розв'язування двоточкової крайової задачі поширюється на розв'язування двоточкових крайових задач для більш загальних лінійних систем диференціальних рівнянь вигляду

$$y_i^{(m)}(x) = f_i(x, y_1, y_{,1}', \ldots, y_1^{m_i - 1}, \ldots, y_n, y_n, y_n', \ldots, y_n^{m_n - 1}), \quad i = 1, \ldots, m ,$$

оскільки така система згідно з [9] може бути зведена до одного лінійного рівняння відповідного порядку від однієї функції.

Всі міркування і результати без особливих утруднень переносяться також на багатоточкову крайову задачу.

Наведений числовий приклад дозволяє у багатьох випадках зводити звичайну задачу на власні значення у просторі вектор-функцій до деякої еквівалентної узагальненої задачі для скалярних функцій.

1. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс дифференциальных уравнений. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. – 232 с.
2. *Вайникко Г. М.* Анализ дискретизационных методов. – Тарту: Тартуск. гос. ун-т, 1976. – 161 с.
3. *Вайникко Г. М., Карма О. О.* О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1974. – **14**. № 6. – С. 1393-1408.
   Те саме: *Vainikko G. M., Karma O. O.* The convergence rate of approximate methods in the eigenvalue problem when the parameter appears non-linearly // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. – 1974. – **14**, No. 6. – P. 23–39. https://doi.org/10.1016/0041-5553(74)90166-9.
4. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1933. – Т. 1, Ч. 1. – 368 с.
5. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. – Москва: Наука, 1984. – 295 с.
6. *Карма О.* О сходимости разностного метода в нелинийных проблемах собственных значений для линейных дифференциальных уравнений // Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та. – 1975. – **374**. – С. 211–228.
7. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы: В 2 т. – Москва: Наука, 1977. – Т. 2. – 400 с.
8. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 528 с.
9. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1970. – 279 с.
10. *Процах Л. П., Савенко П. О.* Методи неявних функцій при розв'язуванні двопараметричних лінійних спектральних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 2. – С. 42–49.
    Те саме: *Protsakh L. P., Savenko P. O.* Implicit-function methods for the solution of two-parameter linear spectral problems // J. Math. Sci. – 2010. – **170**, No. 5. – P. 612–621. – https://doi.org/10.1007/s10958-010-0106-8.
11. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2014. – 314 с.

12. *Савенко П. А., Процах Л. П.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
   Те саме: *Savenko P. A., Protsakh L. P.* Implicit function method in solving a two-dimensional nonlinear spectral problem // Russian Math. (Iz. VUZ). – 2007. – **51**, No. 11. – P. 40–43. – https://doi.org/10.3103/S1066369X07110060.
13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – Москва: Наука, 1974. – Т. II. – 655 с.
14. *Karma O.* Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions. I // Numer. Funct. Anal. Optimization. – 1996. – **17**, No. 3-4. – P. 365–387. – https://doi.org/10.1080/01630569608816699.
15. *Karma O.* Approximation in eigenvalue problems for holomorphic Fredholm operator functions. II (Convergence rate) // Numer. Funct. Anal. Optimization. – 1996. – **17**, No. 3-4. – P. 389–408. – https://doi.org/10.1080/01630569608816700.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДВУХМЕРНЫМ СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Исследуется применение метода неявной функции к решению двухточечной краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений с нелинейным вхождением двухмерного спектрального параметра в коэффициенты системы и краевые условия. Обоснована сходимость приближенных решений дискретизированных задач к точным решениям исходной задачи.

NUMERICAL SOLUTION OF A TWO-POINT BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NON-LINEAR TWO-DIMENSIONAL SPECTRAL PARAMETER

The application of the implicit function method to the solution of a two-point boundary problem for a system of linear differential equations with a nonlinear occurrence of a two-dimensional spectral parameter into the coefficients of the system and the boundary conditions is investigated. The convergence of approximate solutions of discretized problems to exact solutions of the original problem is substantiated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.11.17