

УМОВИ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У НАПІВНЕСКІНЧЕНІЙ ТРИШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ З ТВЕРДОЮ КРИШКОЮ

Розглянуто слабконелінійну задачу поширення внутрішніх хвильових пакетів у системі «шар з твердою кришкою – шар – півпростір», на основі якої побудовано три лінійні задачі відносно масштабних складових потенціалів швидкостей і відхилень поверхонь контакту. Встановлено умови поширення хвиль у першому наближенні при різних співвідношеннях густин у гідродинамічній системі, проаналізовано залежності можливих частот від товщини верхнього шару та від хвильового числа. Досліджено вплив наявності поверхневого натягу на поверхнях контакту.

Вступ. Задача генерації та поширення хвильових пакетів у неоднорідних рідких середовищах різного характеру є актуальною проблемою, дослідженню якої присвячено численні наукові розробки. Нижче наведемо короткий огляд деяких результатів, отриманих останнім часом.

У роботі [29] досліджується новий вид рівнянь Буссінеска для вивчення нелінійної взаємодії довгих хвиль у двошаровій рідині. На основі цих рівнянь побудовано аналітичну модель для аналізу перехідних процесів у резонансній тріаді, що складається з поверхневої і двох субгармонічних хвиль. У побудованій моделі проведено дослідження залежностей амплітуд і частоти від параметрів системи.

У [21] проводиться теоретичне вивчення хвиль у двошаровій системі з вільною поверхнею. Для опису хвильових рухів у системі застосовано лагранжевий підхід. З використанням пакетів символьних обчислень отримано розв'язок до п'ятого порядку. У рамках отриманих розв'язків досліджено дрейф і частоти хвиль. Виконано порівняння числових розв'язків рівнянь Лагранжа та Ейлера у баротропному випадку, на основі якого продемонстровано кращу збіжність розв'язків рівняння Лагранжа.

У дослідженні [17] отримано нелінійне еволюційне рівняння вищого порядку для аналізу тривимірних гравітаційно-капілярних хвильових пакетів. Еволюційне рівняння виведено в інтегро-диференціальній формі шляхом виключення потенціалу швидкості для повільних хвиль, воно відповідає інтегральній формі рівняння Захарова. З використанням отриманого рівняння показано, що дві поверхневі гравітаційно-капілярні хвилі резонують з однією внутрішньою, що рухається у тому ж напрямку. Встановлено, що за рахунок енергії внутрішньої хвилі амплітуди поверхневих хвиль за часом можуть зростати експоненціально.

У роботі [22] досліджується новий альтернативний тип еволюційного рівняння, який описує поширення хвиль в двошаровій системі у вигляді вищого порядку рівняння Бенджаміна – Оно.

У [24] застосовано методи збурень для побудови нової моделі, що описує поодинокі хвилі Россбі, які генеруються зовнішнім джерелом у стратифікованій рідині. У рамках побудованої моделі отримано локальні закони збереження та аналітичні розв'язки. З використанням чисельного моделювання проведено дослідження проблеми генерації та еволюції поодиноких хвиль під дією зовнішнього джерела. У [25] досліджено ефекти дисипації і топографічного форсування для поодиноких хвиль Россбі. Встановлено, що еволюційне рівняння для амплітуди хвилі задовольняє дисипативні рівняння Буссінеска. Отримано розв'язки однорідного та неоднорідного дисипативних рівнянь Буссінеска. Досліджено еволюцію хвиль Россбі під впливом дисипації та нестійкої топографії. У [26] використано метод багатьох масштабів для дослідження вперше отриманого рівняння Бенджаміна – Оно – Бюргерса – мКДВ, яке описує алгебраїчні поодинокі хвилі Россбі в страти-

фікованої рідині. Встановлено, що маса, імпульс та енергія алгебраїчних хвиль Россбі зберігаються при відсутності розсіювання.

У роботі [30] описується експериментальне спостереження внутрішніх припливів і близьких до них внутрішніх хвиль в Південно-Китайському морі протягом дев'яти місяців. Статистично оброблені дані спостережень показують сезонні зміни кінетичної енергії досліджуваних хвильових рухів та інших фізичних параметрів.

У роботі [16] наводиться математичне обґрунтування модуляційного наближення для дослідження слабконелінійних гравітаційних хвиль у горизонтально необмеженій двовимірній області. Встановлено, що хвильовий пакет, обвідна якого описується кубічним рівнянням Шредінгера, є розв'язком хвильових рівнянь для води.

У дослідженні [15] отримано загальні рівняння еволюції для двовимірних слабконелінійних хвиль у системі двох рідин з різною густиною. Розглядається випадок вільної верхньої границі та неоднорідної жорсткої верхньої границі. Для випадку мілкої води новий набір рівнянь зводиться до рівняння Буссінеска внутрішніх хвиль для двовимірного випадку. Представлено чисельні розв'язки моделі для одновимірних хвиль і виконано порівняння їх з відомими аналітичними результатами для однонаправленої моделі.

У [14] розглядаються теоретичні асимптотичні моделі, що описують поширення внутрішніх хвиль в двошаровій гідродинамічній системі з твердою кришкою та дном. Повна ейлерова модель зводиться до системи еволюційних рівнянь з двома нелокальними операторами. Асимптотичні моделі отримуються розкладом нелокальних операторів за малими параметрами, що залежать від амплітуди, довжини хвиль і відношення товщин шарів. Встановлено узгодженість отриманих моделей з повними рівняннями Ейлера.

Для дослідження стоячих внутрішніх і поверхневих хвиль у роботі [28] застосовано аналітичний підхід, запропонований Секерж-Зеньковичем. До постановки задачі використано лагранжевий підхід та отримано розв'язки до п'ятого порядку включно, побудовано також асимптотичні розв'язки.

У [19] виведено два зв'язаних еволюційних рівняння, що описують поширення двох поверхневих гравітаційних пакетів в різних напрямках на глибокій воді. Ці рівняння застосовні для дослідження реальних спектрів океанічних хвиль. Досліджено швидкість росту нестійкості хвильових пакетів для однонаправлених та двонаправлених збурень.

У [27] розглянуто двовимірні хвильові рухи нестисливої рідини в прямокутній області для дослідження внутрішніх та поверхневих хвиль. Для розв'язання задачі застосовується метод збурень до п'ятого порядку. Отримані аналітичні частотно-амплітудні залежності повністю узгоджуються з отриманими раніше результатами.

У дослідженні [18] з використанням інтегрального рівняння Захарова були отримані два зв'язаних нелінійних рівняння четвертого порядку, які описують еволюцію амплітуд двох капілярно-гравітаційних пакетів, що поширюються в одному напрямку. Отримані рівняння були використані для дослідження стійкості капілярно-гравітаційної хвилі за наявності іншої, яка має ту саму групу швидкості. Отримана умова нестійкості хвилі більшої довжини за наявності хвилі меншої довжини. Виявлено, що наявність рівномірної капілярно-гравітаційної хвилі зумовлює збільшення швидкості росту нестійкості однорідної поверхневої гравітаційної хвилі. У [20] отримано набір з двох зв'язаних нелінійних рівнянь Шредінгера четвертого порядку, які описують еволюцію двох систем глибоких гравітаційних хвиль з різними хвильовими числами. Досліджено модуляційну нестійкість двох однорідних хвильових пакетів, що взаємодіють між собою.

У роботі [6] досліджено рух нелінійної гравітаційної хвилі в двошаровій рідині для скінченної товщини верхнього, більш легкого шару. Розглянуто характеристики нелінійного внутрішнього резонансу взаємодії гравітацій-

них хвиль, генерованих вільною поверхнею. Показано, що при розрахунках другого порядку можуть бути реалізовані дві резонансних взаємодії: вироджена двохвильова та вторинна трихвильова.

У [5] теоретично та експериментально досліджено нелінійні внутрішні хвилі другого порядку на тонкій границі розділу двох однорідних шарів різної густини. Побудовано точний розв'язок, який задає форму одиничних хвиль, симетричних відносно незбуреної границі розділу, а також обґрунтовано граничний перехід для хвиль скінченної амплітуди при прямуванні товщини розділу до нуля. Показано, що при врахуванні тертя на межі контакту математична модель адекватно описує зміну фазових і амплітудних характеристик поодиноких хвиль при їх поширенні.

Найфе [23] використовував метод багатомасштабних розвинень для виведення пари диференціальних рівнянь у частинних похідних, які описують еволюцію хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні контакту двох напівнескінченних рідин з різними густинами, враховуючи ефект поверхневого натягу. В результаті було отримано два альтернативні нелінійні рівняння Шредінгера та досліджено стійкість хвильових пакетів скінченної амплітуди.

Аналогічна задача про поширення хвильових пакетів на поверхні контакту рідкого півпростору і рідкого шару над ним вивчалась Авраменко і Селезовим у [7–10]. Авторами досліджувалась проблема стійкості хвильових пакетів в системі «шар – півпростір» методом багатомасштабних розвинень до третього порядку [7]. Різні аспекти четвертого наближення проблеми еволюції нелінійних хвильових пакетів розглянуто в [4]. Виведене також еволюційне рівняння для хвильових чисел, близьких до критичного [9], досліджено стійкість розв'язків вказаних рівнянь [10]. Області резонансу другої гармоніки, напрямок поширення хвиль, форма хвильового пакету в системі «шар – півпростір» описані в статті [8].

Задача про поширення хвильових пакетів у гідродинамічній системі «шар з кришкою – шар з твердим дном» з урахуванням поверхневого натягу досліджувалась Авраменко та Гуртовим [11]. З використанням методу багатомасштабних розвинень авторами отримано еволюційне рівняння обвідної на поверхні контакту двох рідких шарів у формі нелінійного рівняння Шредінгера. На основі отриманого рівняння досліджено особливості модуляційної стійкості хвильових пакетів.

У роботах Авраменко, Селезова та Нарадового [1–3, 12, 13] досліджувались задачі про поширення та взаємодію внутрішніх та поверхневих хвильових пакетів в двошаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар з вільною поверхнею». Зокрема, були розглянуті питання модуляційної стійкості хвильових пакетів [1, 13], енергії хвильових рухів [2]. Окремо було розглянуто умови проходження хвиль в досліджуваній системі [3], де було проаналізовано залежності коренів дисперсійного співвідношення від геометричних параметрів досліджуваної системи.

У цій статті представлено деякі результати дослідження нової проблеми поширення хвильових пакетів на поверхнях контакту тришарової гідродинамічної системи «шар з твердою кришкою – шар – півпростір».

1. Постановка та метод розв'язання нелінійної задачі. Досліджується задача про поширення двовимірних хвильових пакетів скінченної амплітуди на поверхні рідкого шару $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -\infty \leq z < 0\}$ з густиною ρ_1 , середнього рідкого шару $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z < h_2\}$ з густиною ρ_2 та верхнього рідкого шару $\Omega_3 = \{(x, z) : |x| < \infty, h_2 \leq z < h_2 + h_3\}$ з густиною ρ_3 . Шари Ω_1 і Ω_2 розділені поверхнею контакту $z = \eta_1(x, t)$, а шари Ω_2 і Ω_3 – поверхнею контакту $z = h_2 + \eta_2(x, t)$. При розв'язанні враховуються сили поверхневого натягу на поверхнях контакту. Сила тяжіння направлена перпендикулярно до поверхні поділу у від'ємному z -напрямку, рідини вва-

жаються нестисливими (див. рис. 1).

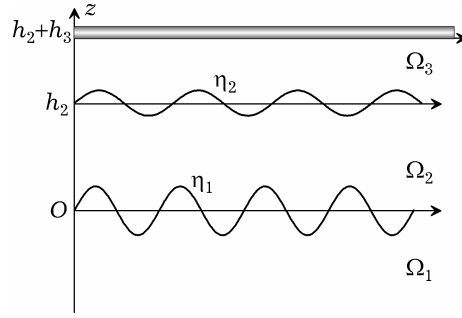


Рис. 1

Математична постановка задачі має такий вигляд:

– рівняння руху:

$$\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{у} \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

– кінематичні умови на поверхнях контакту:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = \eta_1(x, t), \quad j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = - \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \quad \text{при} \quad z = h_2 + \eta_2(x, t), \quad j = 2, 3,$$

– динамічні умови на поверхнях контакту:

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + g(\rho_1 - \rho_2)\eta_1 + \frac{1}{2} \rho_1 (\nabla \varphi_1)^2 - \frac{1}{2} \rho_2 (\nabla \varphi_2)^2 - \\ - T_1 \left[1 + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = \eta_1(x, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \rho_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + g(\rho_2 - \rho_3)(h_2 + \eta_2) + \frac{1}{2} \rho_2 (\nabla \varphi_2)^2 - \frac{1}{2} \rho_3 (\nabla \varphi_3)^2 - \\ - T_2 \left[1 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2 + \eta_2(x, t), \end{aligned}$$

– умова непротікання на твердій кришці:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2 + h_3,$$

– умова згасання на нескінченності:

$$|\varphi_j| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (1)$$

Тут φ_j , $j = 1, 2, 3$, – потенціали швидкостей в Ω_j ; T_1 та T_2 – коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях контакту, відповідно; g – прискорення вільного падіння.

Введемо безрозмірні величини за допомогою характерної довжини H , що рівна товщині внутрішнього шару h_2 , характерної довжини хвилі L , максимального відхилення a поверхні контакту між шарами Ω_2 і Ω_3 , характерного часу $\frac{L}{\sqrt{gH}}$, густини нижнього шару ρ_1 . Перейдемо до безрозмірних величин, які позначимо зірочкою:

$$x = Lx^*, \quad z = Hz^*, \quad \eta_j = \alpha\eta_j^*, \quad j = 1, 2, \quad t = \frac{L}{\sqrt{gH}}t^*,$$

$$\varphi = \frac{gL\alpha}{\sqrt{gH}}\varphi^*, \quad T_{1,2} = L^2\rho_1gT_{1,2}^*, \quad \rho_{1,2,3} = \rho_1\rho_{1,2,3}^*. \quad (2)$$

Введемо коефіцієнти нелінійності $\alpha = \frac{a}{H}$ і $\beta = \frac{H^2}{L^2}$. Тоді з використанням формул (2) постановку задачі (1) перепишемо у безрозмірних величинах:

$$\frac{\partial^2 \varphi_j^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \varphi_j^*}{\partial z^{*2}} = 0 \quad \text{у} \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$\frac{\partial \eta_1^*}{\partial t^*} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial z^*} = -\alpha \frac{\partial \eta_1^*}{\partial x^*} \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial x^*} \quad \text{при} \quad z^* = \alpha\eta_1^*(x, t), \quad j = 1, 2,$$

$$\frac{\partial \eta_2^*}{\partial t^*} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial z^*} = -\alpha \frac{\partial \eta_2^*}{\partial x^*} \frac{\partial \varphi_j^*}{\partial x^*} \quad \text{при} \quad z^* = h_2^* + \alpha\eta_2^*(x, t), \quad j = 2, 3,$$

$$\begin{aligned} & \rho_1^* \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t^*} - \rho_2^* \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t^*} + (\rho_1^* - \rho_2^*)\eta_1^* + \frac{1}{2}\rho_1^*\alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial z^*} \right)^2 \right) - \\ & \quad - \frac{1}{2}\rho_2^*\alpha \left(\left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z^*} \right)^2 \right) - \\ & \quad - T_1^* \left[1 + \left(\alpha\sqrt{\beta} \frac{\partial \eta_1^*}{\partial x^*} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_1^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad \text{при} \quad z^* = \alpha\eta_1^*(x, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_2^*\alpha \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t^*} - \rho_3^*\alpha \frac{\partial \varphi_3^*}{\partial t^*} + \alpha\eta_2^*(\rho_2^* - \rho_3^*) + h_2^*(\rho_2^* - \rho_3^*) + \\ & \quad + \frac{1}{2}\rho_2^*\alpha^2 \left(\left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z^*} \right)^2 \right) - \\ & \quad - \frac{1}{2}\rho_3^*\alpha^2 \left(\left(\frac{\partial \varphi_3^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \varphi_3^*}{\partial z^*} \right)^2 \right) - \\ & \quad - T_2^*\alpha \left[1 + \left(\alpha\sqrt{\beta} \frac{\partial \eta_2^*}{\partial x^*} \right)^2 \right]^{-3/2} \frac{\partial^2 \eta_2^*}{\partial x^{*2}} = 0 \quad \text{при} \quad z^* = h_2^* + \alpha\eta_2^*(x, t), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi_3^*}{\partial z^*} = 0 \quad \text{при} \quad z^* = h_2^* + h_3^*,$$

$$|\varphi_1| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (3)$$

Розглянемо випадок, коли характерна довжина хвилі L і характерна глибина H співпадають і дорівнюють товщині внутрішнього шару h_2 , тоді коефіцієнт нелінійності β дорівнює одиниці. Приймемо також, що коефіцієнт нелінійності α є значно меншим від одиниці. Тоді така модель описує слабконелінійну тришарову систему з дисперсією. Для спрощення записів надалі зірочки опускаємо.

Використаємо метод багатомасштабних розвинень до третього порядку. Представимо шукані функції відхилення поверхонь контакту та потенціали швидкостей у вигляді

$$\eta_i(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{in}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad i = 1, 2,$$

$$\varphi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

де $x_k = \alpha^k x$ та $t_k = \alpha^k t$, $k = 0, 1, 2$, – масштабні змінні.

Нижче наведемо постановки лінійних наближень та аналіз коренів дисперсійного співвідношення.

2. Постановки перших трьох лінійних наближень. Підставляючи (4) у (3) і прирівнюючи вирази при однакових степенях α , отримаємо три лінійні задачі.

Задача *першого наближення* (при α^0):

$$\begin{aligned} \varphi_{j1, x_0 x_0} + \varphi_{j1, zz} &= 0 & \text{в} & \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ \eta_{11, t_0} + \varphi_{j1, z} &= 0 & \text{при} & \quad z = 0, \quad j = 1, 2, \\ \eta_{21, t_0} + \varphi_{j1, z} &= 0 & \text{при} & \quad z = h_2, \quad j = 2, 3, \\ \rho_1 \varphi_{11, t_0} - \rho_2 \varphi_{21, t_0} + (\rho_1 - \rho_2) \eta_{11} - T_1 \eta_{11, x_0 x_0} &= 0 & \text{при} & \quad z = 0, \\ \rho_2 \varphi_{21, t_0} - \rho_3 \varphi_{31, t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{21} - T_2 \eta_{21, x_0 x_0} &= 0 & \text{при} & \quad z = h_2, \\ \varphi_{31, z} &= 0 & \text{при} & \quad z = h_2 + h_3, \\ \varphi_{11} &\rightarrow 0 & \text{при} & \quad z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Задача *другого наближення* (при α^1):

$$\begin{aligned} \varphi_{j2, x_0 x_0} + \varphi_{j2, zz} &= -2\varphi_{j1, x_0 x_1} & \text{в} & \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ \eta_{12, t_0} - \varphi_{j2, z} &= -\eta_{11, t_1} - \eta_{11, x_0} \varphi_{j1, x_0} + \eta_{11} \varphi_{j1, zz} & \text{при} & \quad z = 0, \quad j = 1, 2, \\ \eta_{22, t_0} - \varphi_{j2, z} &= -\eta_{21, t_1} - \eta_{21, x_0} \varphi_{j1, x_0} + \eta_{21} \varphi_{j1, zz} & \text{при} & \quad z = h_2, \quad j = 2, 3, \\ \rho_1 \varphi_{12, t_0} - \rho_2 \varphi_{22, t_0} + (\rho_1 - \rho_2) \eta_{12} - T_1 \eta_{12, x_0 x_0} &= -\rho_1 (\varphi_{11, t_1} + \eta_{11} \varphi_{11, t_0 z}) + \\ &+ \rho_2 (\varphi_{21, t_1} + \eta_{11} \varphi_{21, t_0 z}) - 0.5 \rho_1 (\varphi_{11, x_0}^2 + \varphi_{11, z}^2) + \\ &+ 0.5 \rho_2 (\varphi_{21, x_0}^2 + \varphi_{21, z}^2) + 2T_1 \eta_{11, x_0 x_1} & \text{при} & \quad z = 0, \\ \rho_2 \varphi_{22, t_0} - \rho_3 \varphi_{32, t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{22} - T_2 \eta_{22, x_0 x_0} &= -\rho_2 (\varphi_{21, t_1} + \eta_{21} \varphi_{21, t_0 z}) + \\ &+ \rho_3 (\varphi_{31, t_1} + \eta_{21} \varphi_{31, t_0 z}) - 0.5 \rho_2 (\varphi_{21, x_0}^2 + \varphi_{21, z}^2) + \\ &+ 0.5 \rho_3 (\varphi_{31, x_0}^2 + \varphi_{31, z}^2) + 2T_2 \eta_{21, x_0 x_1} & \text{при} & \quad z = h_2, \\ \varphi_{32, z} &= 0 & \text{при} & \quad z = h_2 + h_3, \\ \varphi_{12} &\rightarrow 0 & \text{при} & \quad z \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Задача *третього наближення* (при α^2):

$$\begin{aligned} \varphi_{j3, x_0 x_0} + \varphi_{j3, zz} &= -\varphi_{j1, x_1 x_1} - 2\varphi_{j1, x_0 x_1} - 2\varphi_{j1, x_0 x_2} & \text{в} & \quad \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3, \\ \eta_{13, t_0} - \varphi_{j3, z} &= -\eta_{11, t_2} - \eta_{12, t_1} - \eta_{11, x_0} \varphi_{j1, x_1} - \eta_{11, x_1} \varphi_{j1, x_0} - \eta_{12, x_0} \varphi_{j1, x_0} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\eta_{11,x_0}\varphi_{j2,x_0} + \eta_{11}\varphi_{j2,zz} + \eta_{12}\varphi_{j1,zz} + \\
& + 0.5\eta_{11}^2\varphi_{j1,zzz} - \eta_{11}\eta_{11,x_0}\varphi_{j1,x_0z} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad j = 1, 2, \\
\eta_{23,t_0} - \varphi_{j3,z} & = -\eta_{21,t_2} - \eta_{22,t_1} - \eta_{21,x_0}\varphi_{j1,x_1} - \eta_{21,x_1}\varphi_{j1,x_0} - \eta_{22,x_0}\varphi_{j1,x_0} - \\
& - \eta_{21,x_0}\varphi_{j2,x_0} + \eta_{21}\varphi_{j2,zz} + \eta_{22}\varphi_{j1,zz} + \\
& + 0.5\eta_{21}^2\varphi_{j1,zzz} - \eta_{21}\eta_{21,x_0}\varphi_{j1,x_0z} \quad \text{при} \quad z = h_2, \quad j = 2, 3, \\
\rho_1\varphi_{13,t_0} - \rho_2\varphi_{23,t_0} + (\rho_1 - \rho_2)\eta_{13} - T_1\eta_{13,x_0x_0} & = -\rho_1(\varphi_{11,t_2} + \varphi_{12,t_1} + \\
& + \eta_{12}\varphi_{11,t_0z} + \eta_{11}\varphi_{11,t_1z} + 0.5\eta_{12}^2\varphi_{11,t_0zz}) + \rho_2(\varphi_{21,t_2} + \varphi_{22,t_1} + \\
& + \eta_{12}\varphi_{21,t_0z} + \eta_{11}\varphi_{21,t_1z} + 0.5\eta_{12}^2\varphi_{21,t_0zz}) - \rho_1(\eta_{11}\varphi_{12,t_0z} + \\
& + \varphi_{11,x_0}\varphi_{11,x_1} + \varphi_{11,x_0}\varphi_{12,x_1} + \eta_{11}\varphi_{11,x_0}\varphi_{11,x_0z} + \varphi_{11,z}\varphi_{11,z} + \\
& + \eta_{11}\varphi_{11,z}\varphi_{11,zz}) + \rho_2(\eta_{11}\varphi_{22,t_0z} + \varphi_{21,x_0}\varphi_{21,x_1} + \varphi_{21,x_0}\varphi_{22,x_1} + \\
& + \eta_{11}\varphi_{21,x_0}\varphi_{21,x_0z} + \varphi_{21,z}\varphi_{21,z} + \eta_{11}\varphi_{21,z}\varphi_{21,zz}) + T_1\eta_{11,x_1x_1} + \\
& + 2T_1\eta_{12,x_0x_1} + 2T_1\eta_{12,x_0x_2} - 1.5T_1(\eta_{11,x_0})^2\eta_{11,x_0x_0} \quad \text{при} \quad z=0, \\
\rho_2\varphi_{23,t_0} - \rho_3\varphi_{33,t_0} + (\rho_2 - \rho_3)\eta_{23} - T_2\eta_{23,x_0x_0} & = -\rho_2(\varphi_{21,t_2} + \varphi_{22,t_1} + \\
& + \eta_{22}\varphi_{21,t_0z} + \eta_{21}\varphi_{21,t_1z} + 0.5\eta_{22}^2\varphi_{21,t_0zz}) + \rho_3(\varphi_{31,t_2} + \\
& + \varphi_{32,t_1} + \eta_{22}\varphi_{31,t_0z} + \eta_{21}\varphi_{31,t_1z} + 0.5\eta_{22}^2\varphi_{31,t_0zz}) - \\
& - \rho_2(\eta_{21}\varphi_{22,t_0z} + \varphi_{21,x_0}\varphi_{21,x_1} + \varphi_{21,x_0}\varphi_{22,x_1} + \eta_{21}\varphi_{21,x_0}\varphi_{21,x_0z} + \\
& + \varphi_{21,z}\varphi_{21,z} + \eta_{21}\varphi_{21,z}\varphi_{21,zz}) + \rho_3(\eta_{21}\varphi_{32,t_0z} + \varphi_{31,x_0}\varphi_{31,x_1} + \\
& + \varphi_{31,x_0}\varphi_{32,x_1} + \eta_{21}\varphi_{31,x_0}\varphi_{31,x_0z} + \varphi_{31,z}\varphi_{31,z} + \eta_{21}\varphi_{31,z}\varphi_{31,zz}) + \\
& + T_2\eta_{21,x_1x_1} + 2T_2\eta_{22,x_0x_1} + 2T_2\eta_{22,x_0x_2} - \\
& - 1.5T_2(\eta_{21,x_0})^2\eta_{21,x_0x_0} \quad \text{при} \quad z = h_2, \\
\varphi_{33,z} = 0 & \quad \text{при} \quad z = h_2 + h_3, \\
\varphi_{13} \rightarrow 0 & \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty.
\end{aligned}$$

3. Дисперсійне співвідношення і розв'язки першого наближення. При розв'язанні задачі першого наближення (5) отримано дисперсійне рівняння

$$\begin{aligned}
\rho_3\omega^2\text{cth}(kh_3) + \frac{\rho_2\omega^2(-\rho_2\omega^2 + (-\rho_1\omega^2 + k(\rho_1 - \rho_2) + T_1k^3)\text{cth}(kh_2))}{-\rho_2\omega^2\text{cth}(kh_2) + (-\rho_1\omega^2 + k(\rho_1 - \rho_2) + T_1k^3)} & = \\
= k(\rho_2 - \rho_3) + T_2k^3. & \quad (6)
\end{aligned}$$

Якщо

$$-\rho_2\omega^2\text{cth}(kh_2) + (-\rho_1\omega^2 + k(\rho_1 - \rho_2) + T_1k^3) \neq 0,$$

тоді рівняння (6) є бікватратним рівнянням відносно частоти ω :

$$\begin{aligned}
& (-\rho_2\rho_3\text{cth}(kh_2)\text{cth}(kh_3) - \rho_1\rho_3\text{cth}(kh_3) - \rho_2^2 - \rho_1\rho_2\text{cth}(kh_2))\omega^4 + \\
& + (\rho_3k(\rho_1 - \rho_2)\text{cth}(kh_3) + T_1k^3\rho_3\text{cth}(kh_3) + \\
& + \rho_2k(\rho_1 - \rho_2)\text{cth}(kh_2) + T_2k^3\rho_2\text{cth}(kh_2) + T_2k^3\rho_2)\omega^2 - \\
& - k(\rho_2 - \rho_3)(\rho_1 - \rho_2) + T_1k^4(\rho_2 - \rho_3) - \\
& - T_2k^4(\rho_1 - \rho_2) - T_1k^6T_2 = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Рівняння (7) має дві пари коренів – частот центру хвильового пакету:

$$\omega_1^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \omega_2^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned}
a &= \rho_2\rho_3\text{cth}(kh_2)\text{cth}(kh_3) + \rho_1\rho_3\text{cth}(kh_3) + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2\text{cth}(kh_2), \\
b &= -k(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2\text{cth}(kh_2) + \rho_3\text{cth}(kh_3)) - \\
& - T_1k^3(\rho_2\text{cth}(kh_2) + \rho_3\text{cth}(kh_3)) - \\
& - (\rho_1 + \rho_2\text{cth}(kh_2))(k(\rho_2 - \rho_3) + T_2k^3), \\
c &= (T_1k^3 + k(\rho_1 - \rho_2))(k(\rho_2 - \rho_3) + T_2k^3).
\end{aligned}$$

Згідно з (8) для лінійної задачі (5) існує дві пари лінійно незалежних розв'язків

– для ω_1 :

$$\begin{aligned}
\eta_{11}^{(1)} &= 2A\cos(kx - \omega_1 t), \\
\eta_{21}^{(1)} &= \frac{\rho_2\omega_1^2\text{cth}(kh_2) + (\rho_1\omega_1^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)\text{sh}(kh_2)}{\rho_2\omega_1^2} 2A\cos(kx - \omega_1 t), \\
\phi_{11}^{(1)} &= 2\frac{\omega_1}{k}\exp(kz)A\sin(kx - \omega_1 t), \\
\phi_{21}^{(1)} &= \left[\frac{(-\rho_1\omega_1^2 + k(\rho_1 - \rho_2) + T_1k^3)\text{ch}(k(h_2 - z))}{\rho_2\omega_1k\text{ch}(kh_2)} + [-\rho_2\omega_1^2\text{ch}(kh_2) + \right. \\
& + (-\rho_1\omega_1^2 + k(\rho_1 - \rho_2) + T_1k^3)\text{sh}(kh_2)]\text{ch}(k(h_2 + h_3 - z)) \times \\
& \left. \times [\rho_2\omega_1k\text{sh}(kh_3)]^{-1} \right] 2A\sin(kx - \omega_1 t), \\
\phi_{31}^{(1)} &= [-\rho_2\omega_1^2\text{ch}(kh_2) + (-\rho_1\omega_1^2 + k(\rho_1 - \rho_2) + T_1k^3)\text{sh}(kh_2)] \times \\
& \times \text{ch}(k(h_2 + h_3 - z))[\rho_2\omega_1k\text{sh}(kh_3)]^{-1} 2A\sin(kx - \omega_1 t),
\end{aligned}$$

– для ω_2 :

$$\begin{aligned}
\eta_{11}^{(2)} &= \frac{\rho_2\omega_2^2}{\rho_2\omega_2^2\text{cth}(kh_2) + (\rho_1\omega_2^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1k^3)\text{sh}(kh_2)} 2B\cos(kx - \omega_2 t), \\
\eta_{21}^{(2)} &= 2B\cos(kx - \omega_2 t), \\
\phi_{11}^{(2)} &= \frac{\omega_2\exp(kz)}{k}\rho_2\omega_2^2[\rho_2\omega_2^2\text{cth}(kh_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\rho_1 \omega_2^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)]^{-1} 2B \sin(kx - \omega_2 t), \\
\Phi_{21}^{(2)} = & \left[\frac{\omega_2 (-\rho_1 \omega_2^2 + k(\rho_1 - \rho_2) + T_1 k^3) \operatorname{ch}(k(h_2 - z))}{k(\rho_2 \omega_2^2 \operatorname{ch}(kh_2) + (\rho_1 \omega_2^2 - k\rho_1 + k\rho_2 - T_1 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)) \operatorname{ch}(kh_2)} - \right. \\
& \left. - \frac{\omega_2 \operatorname{sh}(kz)}{k \operatorname{ch}(kh_2)} \right] 2B \sin(kx - \omega_2 t), \\
\Phi_{31}^{(2)} = & \frac{\omega_2 \operatorname{ch}(k(h_2 + h_3 - z))}{k \operatorname{sh}(kh_3)} 2B \sin(kx - \omega_2 t).
\end{aligned}$$

Дисперсійне рівняння (6) вироджується у відповідне дисперсійне рівняння для двошарової системи

$$(\rho_3 \operatorname{cth}(kh_3) + 1)\omega^2 = k(1 - \rho_3) + T_2 k^3,$$

що узгоджується з раніше отриманими результатами [8].

4. Аналіз коренів дисперсійного рівняння.

4.1. Аналіз випадків виродження тришарової системи у двошарову. Проведемо аналіз отриманих коренів дисперсійного рівняння (6). Для цього порівняємо отримані розв'язки з відомим розв'язком дисперсійного рівняння, отриманого при дослідженні задачі про поширення хвиль у системі «шар з кришкою – півпростір» [8]:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(1 - \rho) + T k^3}{\rho \operatorname{cth}(kh) + 1}}, \quad (9)$$

де h – глибина шару з кришкою.

Розглянемо два граничних випадки для досліджуваної системи «шар з твердою кришкою – шар – півпростір». Перший граничний випадок виникає за умови рівності густин двох шарів $\rho_2 = \rho_3 = 0.9$. У цьому випадку маємо шар рідини, обмежений зверху твердою кришкою, і рідкий півпростір під ним з поверхнею контакту η_1 . На рис. 2 наведено графіки залежностей коренів дисперсійного рівняння ω_0 дисперсійного рівняння для двошарової системи та коренів ω_1 , ω_2 дисперсійного рівняння для тришарової системи від товщини верхнього шару h_3 за умови відсутності поверхневого натягу: $T = T_1 = T_2 = 0$. Обчислення виконано для значень $h_2 = 1$, $k = 0.1$ (криві на рис. 2а розраховано при $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = \rho_3 = 0.9$, а на рис. 2б – при $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\rho_3 = 0.9$).

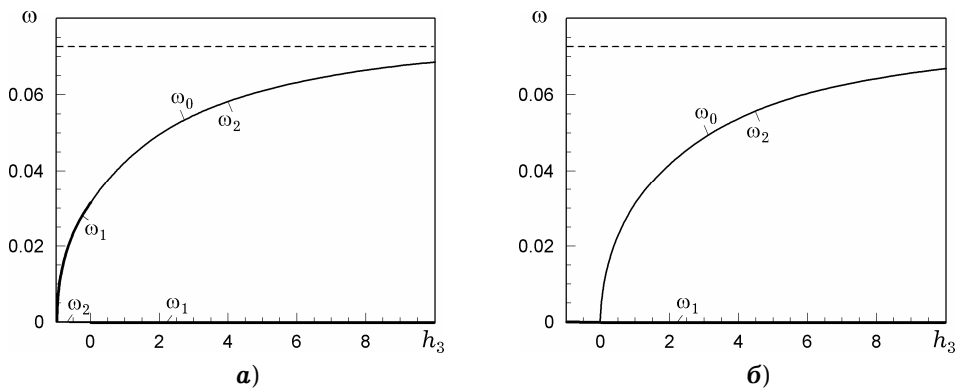


Рис. 2

На рис. 2а побудовано графіки залежностей кореня ω_0 дисперсійного рівняння для двошарової системи та коренів ω_1 , ω_2 дисперсійного рівняння

для тришарової системи від товщини верхнього шару h_3 . Як бачимо, ω_1 співпадає з ω_0 на проміжку $h_3 = [-1, 0]$, а потім стає рівною нулеві, а ω_2 співпадає з ω_0 для всіх $h_3 > 0$. При цьому ω_2 та ω_0 при збільшенні товщини верхнього шару прямують до граничного значення, рівного $\sqrt{\frac{k(1-\rho_3) + T_2 k^3}{\rho_3 + 1}}$, яке відповідає розв'язку дисперсійного рівняння для системи «шар з твердою кришкою – півпростір» з густинами ρ_3 та $\rho_1 = 1$. Відмітимо, що ω_1 переходить у ω_2 в точці, яка відповідає значенню $h_3 = 0$. Таким чином, у рідкому однорідному шарі товщини $h = h_2 + h_3$ при $h_2 = 1$ можуть проходити хвилі з частотою

$$\omega_0 = \begin{cases} \omega_1, & 0 < h < h_2, \\ \omega_2, & h > h_2. \end{cases}$$

Другий граничний випадок (див. рис. 2б) виникає за умови рівності густин двох нижніх шарів $\rho_1 = \rho_2 = 1$. У цьому випадку також маємо шар рідини, обмежений зверху кришкою, та півпростір, але з поверхнею контакту двошарової системи η_2 . Аналогічно, як у першому граничному випадку, дослідження проведемо за умови відсутності поверхневого натягу. Як бачимо на рис. 2б, значення ω_2 і ω_0 співпадають на проміжку $h_3 = [0, \infty]$, а $\omega_1 = 0$, що підтверджує фізичну достовірність отриманих результатів.

Порівняльний аналіз частотної залежності від товщини h_3 верхнього шару показав співпадіння цих залежностей зі зсувом на товщину середнього шару $h_2 = 1$, що також є підтвердженням фізичної достовірності, оскільки ці дві двошарові системи відрізняються товщиною верхнього шару на 1.

4.2. Залежність частот від геометричних параметрів системи розглянемо для інших випадків співвідношення густин рідин шарів.

На рис. 3 наведено графіки залежностей ω_1 та ω_2 від товщини верхнього шару h_3 при значеннях $h_2 = 1$, $k = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_3 = 0.9$ для різних значень густини середнього шару ρ_2 (криві на рис. 3а – рис. 3д відповідають значенням $\rho_2 = 0.9$, $\rho_2 = 0.925$, $\rho_2 = 0.95$, $\rho_2 = 0.975$, $\rho_2 = 1$). Обчислення виконано для випадку відсутності поверхневого натягу: $T_1 = T_2 = 0$.

За умови, коли густина ρ_2 відрізняється від густин сусідніх рідких середовищ ρ_1 та ρ_3 , можна побачити, що графік залежності функції ω_1 від h_3 має розрив у точці $h_3 = 0$ та горизонтальну асимптоту. При збільшенні ρ_2 від $\rho_2 = 0.9$ до $\rho_2 = 0.95$ рівень асимптоти спочатку збільшується від нуля до певного значення, а потім знову зменшується до нуля при наближенні ρ_2 до 1, тобто до значення при густині нижнього шару $\rho_1 = 1$, що відповідає другому виродженому випадку.

Частота ω_2 у першому виродженому випадку ($\rho_2 = 0.9$) має ненульові значення для $h_3 > 0$, і графік ω_2 має горизонтальну асимптоту. При збільшенні густини ρ_2 рівень асимптоти зменшується до того моменту, доки ρ_2 не досягне значення $\rho_2 = 0.95$, а потім збільшується до того ж самого рівня, що був при $\rho_2 = 0.9$. При $\rho_2 = 0.9$ та $\rho_2 = 1$ рівні асимптот співпадають. Зазначимо, що графіки на рис. 3а та рис. 3д відповідають розглянутим вище двошаровим виродженим випадкам.

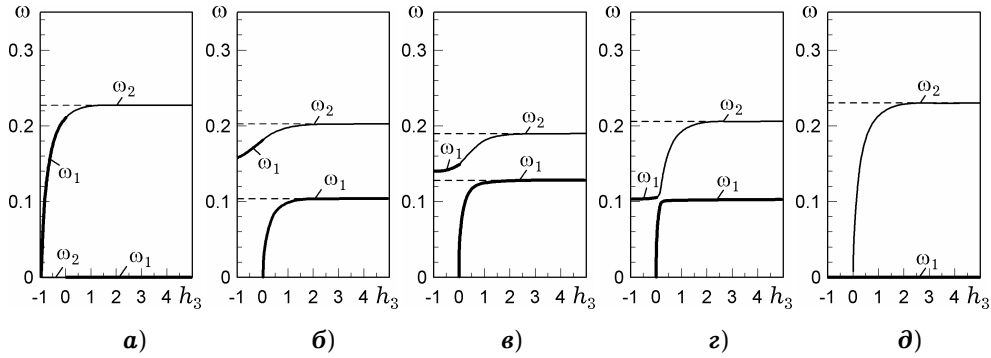


Рис. 3

На рис. 4 наведено графіки залежностей ω_1 та ω_2 від товщини верхнього шару h_3 при значеннях $h_2 = 1$, $k = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_3 = 0.9$ для різних значень густини середнього шару ρ_2 (криві на рис. 4а – рис. 4д відповідають значенням $\rho_2 = 0.9$, $\rho_2 = 0.925$, $\rho_2 = 0.95$, $\rho_2 = 0.975$, $\rho_2 = 1$). Суцільні лінії обчислені без урахування поверхневого натягу: $T_1 = T_2 = 0$. Криві залежностей ω_1 та ω_2 від товщини верхнього шару h_3 під впливом поверхневого натягу при $T_1 = 0.1$, $T_2 = 0$ наведено штрих-пунктирними лініями, а штриховими лініями – при $T_1 = 0$, $T_2 = 0.1$. Нескладно бачити, що в кожному із розглянутих випадків вплив поверхневого натягу на одній або іншій поверхні контакту призводить до збільшення частот. Також наявна симетрія рівня асимптот відносно $\rho_2 = 0.95$.

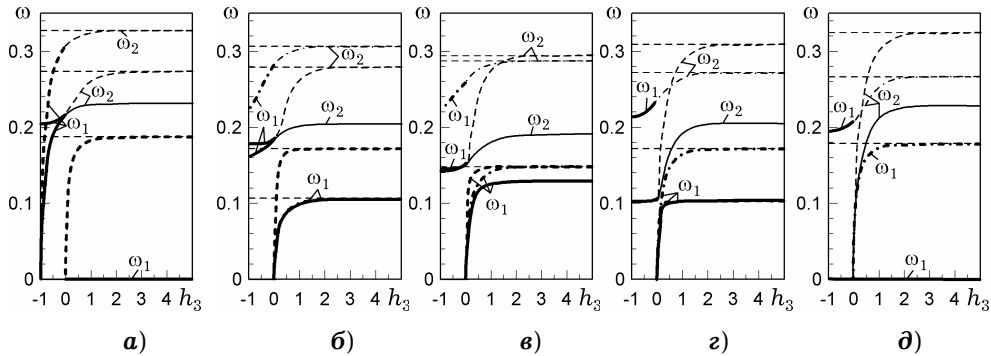


Рис. 4

4.3. Залежність частот від фізичних параметрів системи.

На рис. 5 наведено графіки залежності ω_1 та ω_2 від хвильового числа k при значеннях $h_2 = 1$, $h_3 = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_3 = 0.9$ без урахування коефіцієнтів поверхневого натягу $T_1 = T_2 = 0$ (суцільні криві на рис. 5а – рис. 5д відповідають значенням $\rho_2 = 0.9$, $\rho_2 = 0.925$, $\rho_2 = 0.95$, $\rho_2 = 0.975$, $\rho_2 = 1$).

З аналізу графіків на рис. 5 випливає, що при збільшенні ρ_2 від $\rho_2 = 0.9$ ($= \rho_3$) до 0.95 графік залежності ω_1 від хвильового числа k має зростаючий характер, а після цього є спадним і переходить у $\omega_1 = 0$ при наближенні ρ_2 до 1 , тобто до значення при густині нижнього шару $\rho_1 = 1$, що відповідає другому виродженому випадку.

У той же час графік залежності ω_2 від хвильового числа k при збільшенні густини ρ_2 має спадний характер до того моменту, доки ρ_2 не

досягне значення 0.95, а потім – зростаючий, до того ж самого рівня, що був при $\rho_2 = 0.9$. Нагадаємо, що графіки на рис. 5а та рис. 5д відповідають розглянутим вище двошаровим виродженим випадкам.

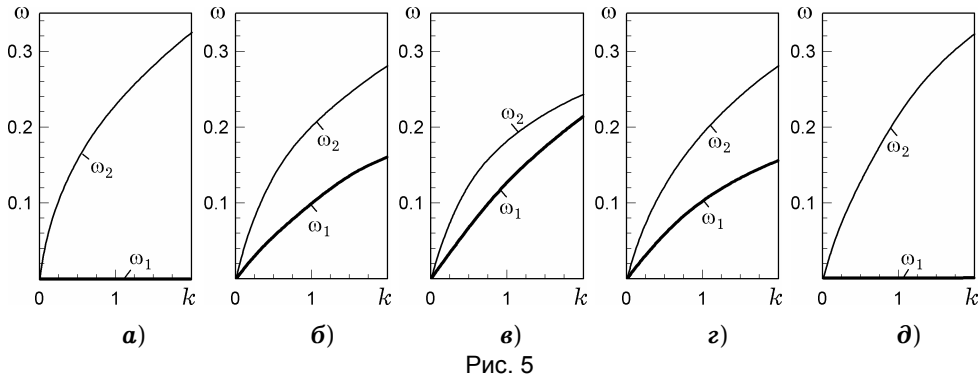


Рис. 5

На рис. 6 наведено графіки залежностей ω_1 та ω_2 від хвильового числа k при значеннях $h_2 = 1$, $h_3 = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_3 = 0.9$ (криві на рис. 6а – рис. 6д відповідають значенням $\rho_2 = 0.9$, $\rho_2 = 0.925$, $\rho_2 = 0.95$, $\rho_2 = 0.975$, $\rho_2 = 1$). Суцільні лінії обчислено без урахування поверхневого натягу: $T_1 = T_2 = 0$. Криві залежностей ω_1 та ω_2 від хвильового числа k з урахуванням поверхневого натягу при $T_1 = 0.1$, $T_2 = 0$ наведено штрих-пунктирними лініями, а штриховими лініями – при $T_1 = 0$, $T_2 = 0.1$.

Нескладно бачити, що коефіцієнти поверхневого натягу T_1 і T_2 впливають на значення обох частот ω_1 та ω_2 . За наявності поверхневого натягу на верхній поверхні контакту ($T_1 = 0$, $T_2 = 0.1$) залежності обох частот є зростаючими функціями від k , при цьому значення частоти ω_1 для однакових значень хвильового числа k зменшуються до нуля при збільшенні густини середнього шару від $\rho_2 = 0.9$ до $\rho_2 = 1$. За наявності поверхневого натягу на нижній поверхні контакту ($T_1 = 0.1$, $T_2 = 0$) спостерігається протилежний характер залежності частоти ω_1 . Частота ω_2 , на відміну від ω_1 , різко зростає за наявності поверхневого натягу, як на верхній, так і на нижній поверхнях контакту, що свідчить про істотний вплив поверхневого натягу на величину частоти ω_2 .

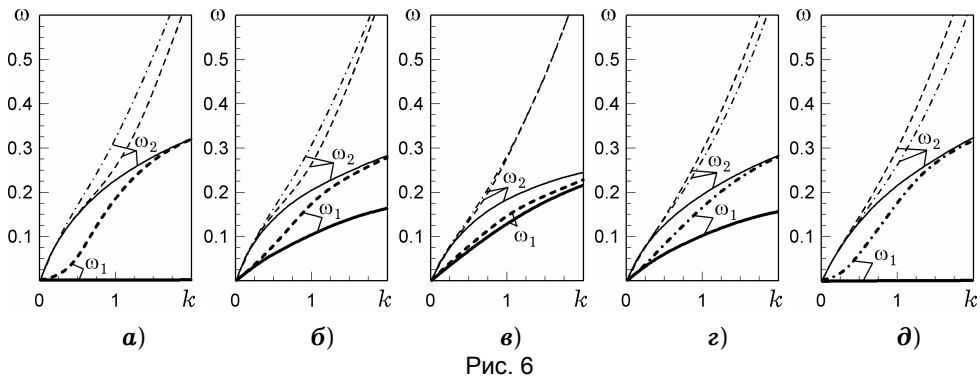


Рис. 6

Аналогічно до залежностей частот ω_1 та ω_2 від товщини h_3 (рис. 3, рис. 4) розглядувані залежності частот від хвильового числа k (рис. 5 –

рис. 6) при переході від одного виродженого випадку ($\rho_2 = 0.9$) до другого ($\rho_2 = 1$) мають певну якісну симетрію графіків ω_1 та ω_2 відносно $\rho_2 = 0.95$. Причому на рис. 6в графіки практично накладаються, а потім розходяться, міняючись місцями (див. рис. 6а і рис. 6д).

На рис. 7 наведено графіки залежностей ω_1 та ω_2 від хвильового числа k при значеннях $h_2 = 1$, $h_3 = 1$, $\rho_1 = 1$, $\rho_3 = 0.9$ (криві на рис. 7а – рис. 7д відповідають значенням $\rho_2 = 0.9$, $\rho_2 = 0.925$, $\rho_2 = 0.95$, $\rho_2 = 0.975$, $\rho_2 = 1$). Усі криві обчислено з урахуванням коефіцієнтів поверхневого натягу $T_1 = T_2 = 0.1$.

З графіків видно, що наявність поверхневого натягу на обох поверхнях контакту ($T_1 = T_2 = 0.1$) призводить до значного зростання значень частот, що узгоджується з результатами описаних вище випадків за наявності поверхневого натягу тільки на одній із поверхонь контакту.

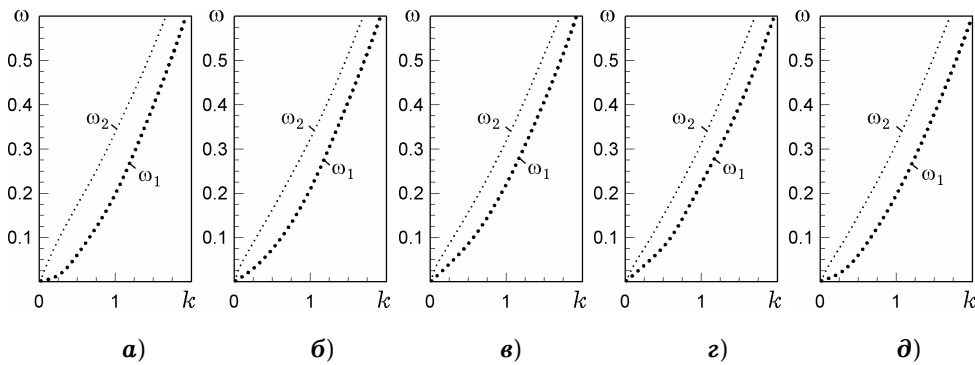


Рис. 7

Висновки. Розглянуто постановку нелінійної задачі поширення хвильових пакетів у системі «шар з твердою кришкою – шар – півпростір». Для розв'язання поставленої задачі використано метод багатомасштабних розвинень до третього порядку. Була розв'язана задача першого наближення і отримано дисперсійне рівняння, яке має дві пари лінійно незалежних розв'язків. З аналізу коренів дисперсійного рівняння, отримано два граничних випадки, які підтверджують фізичну достовірність результатів. Проаналізовано графіки залежностей частот від товщини верхнього шару та від хвильового числа при різних значеннях товщини середнього шару рідини і впливу або відсутності впливу коефіцієнтів поверхневого натягу.

1. Авраменко О. В., Наратовий В. В. Аналіз поширення слабконелінійних хвиль в двошаровій рідині з вільною поверхнею // Сх.-Європ. журн. передових технол. – 2015. – 4 № 7 (76). – С. 39–44. – doi: 10.15587/1729-4061.2015.48282.
2. Авраменко О. В., Наратовий В. В., Селезов І. Т. Енергія внутрішніх і поверхневих хвильових рухів у двошаровій гідродинамічній системі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – 59, № 1. – С. 111–120.
Te same: Avramenko O. V., Naradovyi V. V., Selezov I. T. Energy of motion of internal and surface waves in a two-layer hydrodynamic system // J. Math. Sci. – 2018. – 229, No. 3. – P. 241–252. – <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3674-7>.
3. Авраменко О. В., Наратовий В. В., Селезов І. Т. Условия прохождения волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – 57, № 1. – С. 105–114.
Te same: Avramenko O. V., Naradovyi V. V., Selezov I. T. Conditions of wave propagation in a two-layer liquid with free surface // J. Math. Sci. – 2016. – 212, No. 2. – P. 131–141. – <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2654-4>.
4. Авраменко О. В., Селезов І. Т. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред // Прикл. гідромеханіка. – 2002. – 4(76), № 4. – С. 3–13.

5. *Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю.* Уединенные волны конечной амплитуды в двухслойной жидкости // Прикл. механика и техн. физика. – 2010. – № 4. – С. 26–38.
Te same: *Gavrilov N. V., Liapidevskii V. Yu.* Finite-amplitude solitary waves in a two-layer fluid // J. Appl. Mech. Techn. Phys. – 2010. – **51**, No. 4. – P. 471–481. – <https://doi.org/10.1007/s10808-010-0063-5>.
6. *Григорьев А. И., Федоров М. С., Ширяева С. О.* Волновое движение в поле силы тяжести на свободной поверхности и на границе стратификации слоисто-неоднородной жидкости. Нелинейный анализ // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2010. – № 5. – С. 130–140.
Te same: *Grigoryev A. I., Fedorov M. S., Shiryayeva S. O.* Wave motion in a gravity field on the free surface and stratification interface of a fluid with stratified inhomogeneity. Nonlinear analysis // Fluid Dyn. – 2010. – **45**, No. 5. – P. 793–802. – <https://doi.org/10.1134/S0015462810050121>.
7. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Нелинейное распространение волновых пакетов при околоритических волновых числах в кусочно-неоднородной по глубине жидкости // Теорет. прикл. механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 151–157.
8. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикл. гідромеханіка. – 2001. – **3** (75), № 4. – С. 38–46.
9. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околоритических волновых числах // Динам. системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 58–67.
10. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Эволюция нелинейных волновых пакетов с учетом поверхностного натяжения на поверхности контакта // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 2. – С. 113–122.
11. *Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю. В.* Нелинейная устойчивость распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости // Прикл. гідромеханіка. – 2006. – **8**(80), № 4. – С. 60–65.
12. *Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю. В., Наратовый В. В.* Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 1. – С. 72–83.
Te same: *Selezov I. T., Avramenko O. V., Gurtovyi Yu. V., Naratovyi V. V.* Non-linear interaction of internal and surface gravity waves in a two-layer fluid with free surface // J. Math. Sci. – 2010. – **168**, No. 4. – P. 590–602. – <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0010-2>.
13. *Селезов И. Т., Авраменко О. В., Наратовый В. В.* Особенности распространения слабонелинейных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // Динам. системы. – 2011. – **1**(29), № 1. – С. 53–68.
14. *Bona J. L., Lannes D., Saut J.-C.* Asymptotic models for internal waves // J. Math. Pures Appl. – 2008. – **89**, No. 6. – P. 538–566. – <https://doi.org/10.1016/j.matpur.2008.02.003>.
15. *Choi W., Camassa R.* Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. – 1996. – **313**. – P. 83–103. – <https://doi.org/10.1017/S0022112096002133>.
16. *Craig W., Sulem C., Sulem P. L.* Nonlinear modulation of gravity waves: a rigorous approach // Nonlinearity. – 1992. – **5**, No. 2. – P. 497–522.
17. *Debsarma S., Das K. P.* Current-modified evolution equation for a broader bandwidth capillary-gravity wave packet // ANZIAM J. – 2016. – No. 58. – P. 143–161. – <http://dx.doi.org/10.21914/anziamj.v58i0.9376>.
18. *Debsarma S., Das K. P.* Fourth-order nonlinear evolution equations for a capillary-gravity wave packet in the presence of another wave packet in deep water // Phys. Fluids. – 2007. – **19**, No. 9. – Article ID 097101. – <https://doi.org/10.1063/1.2772252>.
19. *Debsarma S., Senapati S., Das K. P.* Nonlinear evolution equations for broader bandwidth wave packets in crossing sea states // Int. J. Oceanography. – 2014. – **2014**. – Article ID 597895, 9 p. – <http://dx.doi.org/10.1155/2014/597895>.
20. *Gramstad O., Trulsen K.* Fourth-order coupled nonlinear Schrödinger equations for gravity waves on deep water // Phys. Fluids. – 2011. – **23**, No. 6. – Article ID 062102. – <https://doi.org/10.1063/1.3598316>.
21. *Hsu H.-C., Tsai C.-C.* Lagrangian approach to interfacial water waves with free surface // Appl. Ocean Res. – 2016. – **59**. – P. 616–637.

- <https://doi.org/10.1016/j.apor.2016.08.001>.
22. Matsuno Y. Higher-order nonlinear evolution equation for interfacial waves in two-layer fluid system // Phys. Rev. E. – 1994. – **49**, No. 3. – P. 2091–2095.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.2091>.
 23. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E. – 1976. – **43**, No. 4. – P. 584–588.
[doi:10.1115/1.3423936](https://doi.org/10.1115/1.3423936).
 24. Yang H. W., Wang X. R., Yin B. S. A kind of new algebraic Rossby solitary waves generated by periodic external source // Nonlinear Dyn. – 2014. – **76**, No. 3. – P. 1725–1735. – <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1241-4>.
 25. Yang H. W., Yin B. S., Shi Y. L. Forced dissipative Boussinesq equation for solitary waves excited by unstable topography // Nonlinear Dyn. – 2012. – **70**, No. 2. – P. 1389–1396. – <https://doi.org/10.1007/s11071-012-0541-9>.
 26. Yang Hongwei, Jin Shanshan, Yin Baoshu, Benjamin-Ono-Burgers-MKdV equation for algebraic Rossby solitary waves in stratified fluids and conservation laws // Abstract and Applied Analysis. – 2014. – **2014**. – Article ID 175841, 5 p.
<http://dx.doi.org/10.1155/2014/175841>.
 27. Shingareva I., Celaya C. L. On frequency-amplitude dependences for surface and internal standing waves // J. Comput. Appl. Math. – 2007. – **200**, No. 2. – P. 459–470.
 28. Tahvildari N., Kaihatu J. M., Saric W. S. Generation of long subharmonic internal waves by surface waves // Ocean Modelling. – 2016. – **106**. – P. 12–26.
<https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2016.07.004>.
 29. Vincze M., Kozma P., Gyüre B., Jánosi I. M., Szabó K. G., Tél T. Amplified internal pulsations on a stratified exchange flow excited by interaction between a thin sill and external seiche // Phys. Fluids. – 2007. – **19**, No. 10. – Article ID 108108.
<https://doi.org/10.1063/1.2796182>.
 30. Xu Zhenhua, Yin Baoshu, Hou Yijun, Xu Yongsheng, Variability of internal tides and near-inertial waves on the continental slope of the northwestern South China Sea // J. Geophys. Res.: Oceans. – 2013. – **118**, No. 1. – P. 197–211.
<https://doi.org/10.1029/2012JC008212>.

УСЛОВИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ С ТВЕРДОЙ КРЫШКОЙ

Рассмотрена слабонелинейная задача распространения внутренних волновых пакетов в системе «слой с твердой крышкой – слой – полупространство», на основе которой построены три линейные задачи относительно масштабных составляющих потенциалов скоростей и отклонений поверхностей контакта. Установлены условия распространения волн в первом приближении при различных соотношениях плотностей в гидродинамической системе, проанализированы зависимости возможных частот от толщины верхнего слоя и от волнового числа. Исследовано влияние наличия на поверхностях контакта поверхностного натяжения.

WAVE PROPAGATION CONDITIONS IN SEMI-INFINITE THREE-LAYER HYDRODYNAMIC SYSTEM WITH RIGID LID

Weakly nonlinear problem of propagation of internal wave packets in the system «layer with a rigid lid – layer – half-space» is considered. On its basis, three linear problems concerning the scale components of the velocity potentials and the elevation of the contact surfaces are constructed. The conditions of the propagation of waves are determined in the first approximation for different density ratios in the hydrodynamic system. The dependences of the frequencies on the thickness of the upper layer and on the wave number are analyzed. The effect of the presence of surface tension on the contact surfaces is studied.

¹ Кіровоград, держ. пед. ун-т
ім. В. Винниченка, Кіровоград,

² Ін-т гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано

03.04.17