

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАННИЙ СТАН ТЕРМОЧУТЛИВОЇ ПОРОЖНИСТОЇ КУЛІ ЗА УМОВ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОБМІНУ З ДОВКІЛЛЯМ

Побудовано розв'язок задачі теплопровідності для термочутливої порожнистої кулі, яка конвективно обмінюється теплом із середовищами лінійно змінної у часі температури. Досліджено вплив температурної залежності характеристик матеріалу кулі на величину та характер розподілу компонентів напружено-деформованого стану.

Дослідження термомеханічного стану елементів конструкцій, які працюють у середовищах з високими змінними в часі температурами та одночасно зазнають значних силових навантажень на основі моделей, що враховують залежність їх фізико-механічних характеристик від температури залишається актуальною проблемою. Як показано в [3, 9], врахування температурних залежностей лише окремих характеристик і припущення про сталість інших істотно полегшує розв'язання такого роду задач, однак, може призвести до суттєвих кількісних і якісних розбіжностей між так знайденими та реальними параметрами термомеханічного стану тіла, що розглядається. У роботі [8] побудовано загальний розв'язок центрально-симетричної квазістатичної задачі термопружності на основі математичної моделі, що враховує залежність усіх термомеханічних характеристик від температури, та проведено дослідження впливу температурної залежності характеристик на компоненти напружено-деформованого стану простору зі сферичною порожниною. Тут же проведено подібні дослідження для порожнистої кулі.

Формулювання задачі. Визначимо нестационарне температурне поле t і зумовлений ним напружено-деформований стан порожнистої кулі, внутрішній радіус якої r_1 , зовнішній – r_2 , а теплофізичні (коефіцієнт теплопровідності λ_t , об'ємна теплоємність c_v) і механічні (модуль зсуву G , коефіцієнт Пуассона ν , температурний коефіцієнт лінійного розширення (ТКЛР) α_t) характеристики її матеріалу є функціями температури. Куля має рівномірний розподіл температури t_p , а її поверхні $r = r_1$ і $r = r_2$ перебувають під дією сталих тисків величиною p_1 і p_2 відповідно. У початковий момент часу $\tau = 0$ куля починає конвективно обмінюватися теплом через поверхні $r = r_1$ і $r = r_2$ із зовнішніми середовищами, температури яких від початково сталих значень лінійно зростають з часом.

Визначення температурного поля. Зумовлене такими діями температурне поле порожнистої кулі знаходимо з нелінійного рівняння теплопровідності [4, 5]

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) = c_v(t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (1)$$

за граничних і початкових умов

$$\left[\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial r} + (-1)^j \alpha_j (t - (t_j + v_j \tau)) \right] \Big|_{r=r_j} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

$$t \Big|_{\tau=0} = t_p, \quad (3)$$

де α_j – відповідно коефіцієнти теплообміну через поверхні $r = r_j$, t_j – початкові температури середовищ, які омивають ці поверхні, а v_j – швидкості зростання температур цих середовищ.

Виберемо за відлікову температуру деяке її значення t_0 , а за характерний розмір – товщину стінки кулі $\ell_0 = r_2 - r_1$, уведемо безрозмірні температуру $T = t/t_0$, координату $\rho = r/\ell_0$ і подамо характеристики матеріалу кулі у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де величини з індексом «0» мають відповідні розмірності (опорні характеристики), а величини з зірочкою є функціями безрозмірної температури, причому $\chi(t_p) = \chi_0$, а, отже, $\chi^*(T_p) = 1$, де $T_p = t_p/t_0$. Припустимо, що характери температурної залежності коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності є близькими ($\lambda_t^*(T) \approx c_v^*(T)$), а тому коефіцієнт температуропроводності можна вважати сталою величиною: $a = \lambda_t(t)/c_v(t) = \lambda_{t0} \lambda_t^*(T)/(c_{v0} c_v^*(T)) \approx \lambda_{t0}/c_{v0}$. Це припущення, як зазначено в [10], добре виконується для чистих металів, деяких теплоізоляційних матеріалів і графіту [1, 11]. Якщо, крім цього, ввести [6] безрозмірний час $Fo = \frac{a\tau}{\ell_0^2}$ – критерій Фур'є, безрозмірні коефіцієнти теплообміну

$Bi_j = \frac{\alpha_j \ell_0}{\lambda_{t0}}$ – критерії Біо, безрозмірні швидкості зміни температури оточуючих середовищ $Pd_j = \frac{v_j \ell_0^2}{a t_0}$ – критерії Предводителєва, то задача (1)–(3)

набуде вигляду

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = c_v^*(T) \frac{\partial T}{\partial Fo}, \quad (4)$$

$$\left[\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} + (-1)^j Bi_j (T - (T_j + Pd_j Fo)) \right] \Big|_{\rho=\rho_j} = 0, \quad T_j = \frac{t_j}{t_0}, \quad j = 1, 2, \quad (5)$$

$$T \Big|_{Fo=0} = T_p. \quad (6)$$

Застосувавши до нелінійної задачі (4)–(6) перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int_{T_p}^T \lambda_t^*(T) dT, \quad (7)$$

отримаємо таку крайову задачу на змінну θ :

$$\frac{\partial^2(\rho\theta)}{\partial \rho^2} = \frac{\partial(\rho\theta)}{\partial Fo}, \quad (8)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + (-1)^j Bi_j (T(\theta) - (T_j + Pd_j Fo)) \right] \Big|_{\rho=\rho_j} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (9)$$

$$\theta \Big|_{Fo=0} = 0. \quad (10)$$

Тут $T(\theta)$ – вираз безрозмірної температури через змінну Кірхгофа θ , який для конкретної температурної залежності коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t^*(T)$ знаходять із рівняння (7).

Унаслідок зроблених припущень і перетворення Кірхгофа рівняння теплопровідності трансформувалися в лінійне рівняння на змінну θ ; нелінійності в умовах конвективного теплообміну зосередилися у виразах шуканої температури на поверхнях кулі $\rho = \rho_j$; початкова умова на змінну Кірхгофа стала однорідною.

Остаточну лінеаризацію граничних умов (9) здійснимо [7] шляхом заміни

$$T(\theta) \Big|_{\rho=\rho_j} = (1 + \alpha_j)\theta \Big|_{\rho=\rho_j} + T_p, \quad (11)$$

де α_j – поки що невідомі сталі, тобто замість граничних умов (9) розглянемо умови

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + (-1)^j \text{Bi}_j^* (\theta - (T_j^* + \text{Pd}_j^* \text{Fo})) \right] \Big|_{\rho=\rho_j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (12)$$

Тут $\text{Bi}_j^* = (1 + \alpha_j)\text{Bi}_j$, $\text{Pd}_j^* = \frac{\text{Pd}}{1 + \alpha_j}$, $T_j^* = \frac{\bar{T}_j}{1 + \alpha_j}$, $\bar{T}_j = T_j - T_p$.

Якщо до задачі (8), (10), (12) застосувати перетворення Лапласа [2] за змінною Fo , то отримаємо наступну задачу на трансформанту змінної Кірхгофа:

$$\frac{d^2(\rho\tilde{\theta})}{d\rho^2} - s\rho\tilde{\theta} = 0, \quad (13)$$

$$\left[\frac{d\tilde{\theta}}{d\rho} + (-1)^j \text{Bi}_j^* \left(\tilde{\theta} - \left(\frac{T_j^*}{s} + \frac{\text{Pd}_j^*}{s^2} \right) \right) \right] \Big|_{\rho=\rho_j} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

де $\tilde{\theta} = \int_0^\infty \theta e^{-s\text{Fo}} d\text{Fo}$, s – параметр перетворення Лапласа.

Розв'язок рівняння (13) виберемо у вигляді

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{\rho} (A \text{ch} \sqrt{s\rho} + B \text{sh} \sqrt{s\rho}), \quad (15)$$

який після знаходження сталих інтегрування A і B з граничних умов (14) запишемо як

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\Phi_{\bar{T}}(s)}{s\varphi(s)} + \frac{\Phi_{\text{Pd}}(s)}{s^2\varphi(s)} \right), \quad (16)$$

де $\Phi_x(s) = \text{Bi}_1 \rho_1^2 x_1 m_2(s) + \text{Bi}_2 \rho_2^2 x_2 m_1(s)$, $x = \{\bar{T}, \text{Pd}\}$,

$$m_j(s) = (1 - (-1)^j \rho_j \text{Bi}_j^*) \frac{\text{sh} \sqrt{s} (\rho - \rho_j)}{\sqrt{s}} + \rho_j \text{ch} \sqrt{s} (\rho - \rho_j),$$

$$\varphi(s) = [\rho_1 \rho_2 s - (1 + \rho_1 \text{Bi}_1^*)(1 - \rho_2 \text{Bi}_2^*)] \frac{\text{sh} \sqrt{s} (\rho_2 - \rho_1)}{\sqrt{s}} + [\rho_2 (1 + \rho_1 \text{Bi}_1^*) - \rho_1 (1 - \rho_2 \text{Bi}_2^*)] \text{ch} \sqrt{s} (\rho_2 - \rho_1).$$

Оскільки обидва доданки в розв'язку (16) є відношеннями узагальнених поліномів відносно параметра s , причому поліноми знаменників не містять вільних членів, то для виконання оберненого перетворення Лапласа можна використати теорему розкладу Ващенко – Захарченка [6]. Знаменники обидвох дробів мають корінь $s = 0$ (для знаменника першого дробу $s = 0$ – простий, а другого – двократний корінь) і безмежну кількість простих коренів $s_n = -\mu_n^2$, $\mu_n = i\sqrt{s}$, де μ_n є коренями характеристичного рівняння

$$\text{ctg}(\rho_2 - \rho_1)\mu = \frac{(1 + \rho_1 \text{Bi}_1^*)(1 - \rho_2 \text{Bi}_2^*) + \rho_1 \rho_2 \mu^2}{[\rho_2 (1 + \rho_1 \text{Bi}_1^*) - \rho_1 (1 - \rho_2 \text{Bi}_2^*)]\mu}, \quad (17)$$

яке отримане з рівняння $\varphi(s) = 0$.

Враховуючи сказане, знаходимо, що

$$\theta = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\phi_{\bar{T}}(0) + \phi'_{Pd}(0) + \phi_{Pd}(0)Fo}{\varphi(0)} - \frac{\phi_{Pd}(0)\varphi'(0)}{(\varphi(0))^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 \varphi'(\mu_n)} \left(\phi_{\bar{T}}(\mu_n) - \frac{1}{\mu_n^2} \phi_{Pd}(\mu_n) \right) e^{-\mu_n^2 Fo} \right], \quad (18)$$

де $\phi_x(\gamma) = Bi_1 \rho_1^2 x_1 m_2(\gamma) + Bi_2 \rho_2^2 x_2 m_1(\gamma)$, $x = \{\bar{T}, Pd\}$, $\gamma = \{0, \mu_n\}$,

$$m_j(0) = (1 - (-1)^j \rho_j Bi_j^*) (\rho - \rho_j) + \rho_j, \quad j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \phi'_{Pd}(0) &= \frac{1}{2} (\rho - \rho_2)^2 \left[(1 - \rho_2 Bi_2^*) \frac{\rho - \rho_2}{3} + \rho_2 \right] Bi_1 \rho_1^2 Pd_1 + \\ &+ \frac{1}{2} (\rho - \rho_1)^2 \left[(1 + \rho_1 Bi_1^*) \frac{\rho - \rho_1}{3} + \rho_1 \right] Bi_2 \rho_2^2 Pd_2, \end{aligned}$$

$$\varphi(0) = \rho_2 (1 + \rho_1 Bi_1^*) - \rho_1 (1 - \rho_2 Bi_2^*) - (1 + \rho_1 Bi_1^*) (1 - \rho_2 Bi_2^*) (\rho_2 - \rho_1),$$

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= (\rho_2 - \rho_1) \left[\rho_1 \rho_2 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} (\rho_2 (1 + \rho_1 Bi_1^*) - \rho_1 (1 - \rho_2 Bi_2^*)) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} (\rho_2 - \rho_1)^2 (1 + \rho_1 Bi_1^*) (1 - \rho_2 Bi_2^*) \right], \end{aligned}$$

$$m_j(\mu_n) = (1 - (-1)^j \rho_j Bi_j^*) \frac{\sin(\rho - \rho_j) \mu_n}{\mu_n} + \rho_j \cos(\rho - \rho_j) \mu_n,$$

$$\begin{aligned} \varphi'(\mu_n) &= \frac{1}{2} \left\{ [\rho_1 \rho_2 + (\rho_2 (1 + \rho_1 Bi_1^*) - \rho_1 (1 - \rho_2 Bi_2^*)) (\rho_2 - \rho_1) - \right. \\ &\left. - (1 + \rho_1 Bi_1^*) (1 - \rho_2 Bi_2^*) \mu_n^{-2}] \frac{\sin(\rho_2 - \rho_1) \mu_n}{\mu_n} + \right. \\ &\left. + (\rho_1 \rho_2 + (1 + \rho_1 Bi_1^*) (1 - \rho_2 Bi_2^*) \mu_n^{-2}) (\rho_2 - \rho_1) \cos(\rho_2 - \rho_1) \mu_n \right\}. \end{aligned}$$

Знаючи змінну Кірхгофа, температуру за заданої температурної залежності коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t^*(T)$ знаходимо з рівняння (7). Наприклад, якщо коефіцієнт теплопровідності є лінійною функцією температури $\lambda_t^*(T) = 1 + k(T - T_p)$, $k = \text{const}$, то із (7) отримаємо

$$T = k^{-1} (\sqrt{1 + 2k\theta} - 1) + T_p. \quad (19)$$

Знайдена змінна Кірхгофа (18) точно задовольняє рівняння (8) і початкову умову (10). Вона є функцією безрозмірних координати ρ та часу Fo і, крім вхідних даних задачі ρ_j , Bi_j , T_j , Pd_j , T_p , містить два довільні параметри x_j , які використовуємо, щоб задовольнити із заданою точністю граничні умови (9). Підставивши вираз температури (19) через змінну Кірхгофа у граничні умови (9), враховуючи при цьому виконання умов (12), для визначення параметрів x_j отримуємо систему рівнянь

$$\theta \Big|_{\rho=\rho_j} = - \frac{2x_j}{k(1+x_j)^2}, \quad j = 1, 2. \quad (20)$$

Обчислення температури проводимо за схемою:

- для заданого значення безрозмірного часу Fo із системи (20) знаходимо значення параметрів x_j ;
- задаючи значення ρ і враховуючи знайдені значення x_j , за формулою (18) обчислюємо значення змінної Кірхгофа;

– знаючи значення змінної Кірхгофа θ , температуру обчислюємо за формулою (19).

Якщо поверхня $\rho = \rho_1$ порожнистої кулі теплоізолювана ($\alpha_1 = 0$, а, отже, $Bi_1 = 0$), то вираз для обчислення змінної Кірхгофа значно спрощується і набуває вигляду

$$\begin{aligned} \theta = T_2^* + Pd_2^* \left[Fo + \frac{(\rho - \rho_1)^2(\rho + 2\rho_1)}{6\rho} - \frac{\rho_2 - \rho_1}{2\rho_2^2 Bi_2^*} [\rho_2(\rho_1 + \rho_2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3}(1 - \rho_2 Bi_2^*)(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 + 2\rho_1)] \right] - \\ - \frac{Bi_2 \rho_2^2}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1(\mu_n)}{\mu_n^2 \varphi'(\mu_n)} \left(\bar{T}_2 - \frac{1}{\mu_n^2} Pd_2 \right) e^{-\mu_n^2 Fo}, \end{aligned} \quad (21)$$

де $m_1(\mu_n) = \frac{1}{\mu_n} \sin(\rho - \rho_1)\mu_n + \rho_1 \cos(\rho - \rho_1)\mu_n$,

$$\begin{aligned} \varphi'(\mu_n) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\rho_1 \rho_2 + (\rho_2 - \rho_1(1 - \rho_2 Bi_2^*))(\rho_2 - \rho_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1 - \rho_2 Bi_2^*}{\mu_n^2} \right] \frac{\sin(\rho_2 - \rho_1)\mu_n}{\mu_n} + \right. \\ \left. + (\rho_2 - \rho_1) \left(\rho_1 \rho_2 + (1 - \rho_2 Bi_2^*) \frac{1}{\mu_n^2} \right) \cos(\rho_2 - \rho_1)\mu_n \right\}, \end{aligned}$$

μ_n – корені характеристичного рівняння

$$\operatorname{ctg}(\rho_2 - \rho_1)\mu = \frac{1 - \rho_2 Bi_2^* + \rho_1 \rho_2 \mu^2}{(\rho_2 - \rho_1(1 - \rho_2 Bi_2^*))\mu}, \quad (22)$$

а α_2 визначається з рівняння (20) при $j = 2$.

Для нетермочутливої порожнистої кулі ($\lambda_t^*(T) = 1$) з (19) отримуємо, що

$$T = \theta \Big|_{x_j=0} + T_p. \quad (23)$$

Напружено-деформований стан порожнистої кулі, яка перебуває у знайденому центрально-симетричному температурному полі при сталих тисках p_j на поверхнях $\rho = \rho_j$, $j = 1, 2$, визначається [8] безрозмірними радіальним переміщенням $\bar{u} = u/\ell_0 \alpha_0 t_0$, радіальним напруженням $\sigma_\rho = \sigma_r/2G_0 \alpha_0 t_0$ і коловим напруженням $\sigma_\varphi = \sigma_{\varphi\varphi}/2G_0 \alpha_0 t_0$, причому

$$\bar{u} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k, \quad \sigma_\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{\rho k}, \quad \sigma_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{\varphi k}, \quad (24)$$

де члени рядів (24) визначаються за формулами

$$\begin{aligned} u_0 &= c_{10}\rho + \rho^{-2}(c_{20} + H(\rho)), \\ u_k &= c_{1k}\rho + c_{2k}\rho^{-2} - \frac{1}{3}[\rho H_0^{(k-1)}(\rho) - \rho^{-2}H_3^{(k-1)}(\rho)], \quad k \geq 1, \\ \sigma_{\rho 0} &= G^*(T)[\bar{v}(T) c_{10} - 2\rho^{-3}(c_{20} + H(\rho))], \\ \sigma_{\varphi 0} &= G^*(T)[\bar{v}(T) c_{10} + \rho^{-3}(c_{20} + H(\rho)) - \Phi^*(T)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho k} &= G^*(T)[\bar{v}(T)(c_{1k} - H_0^{(k-1)}(\rho)/3) - 2\rho^{-3}(c_{2k} + H_3^{(k-1)}(\rho)/3)], \\ \sigma_{\varphi k} &= G^*(T)[\bar{v}(T)(c_{1k} - H_0^{(k-1)}(\rho)/3) + \rho^{-3}(c_{2k} + H_3^{(k-1)}(\rho)/3)],\end{aligned}\quad (25)$$

$$\Phi^*(T) = \frac{1+v(T)}{1-v(T)} \int_{T_p}^T \alpha^*(T) dT, \quad \bar{v}(T) = \frac{1+v(T)}{1-2v(T)}, \quad H(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \xi^2 \Phi^*(\xi, F_0) d\xi,$$

$$H_m^{(k-1)}(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \xi^m f_{k-1}(\xi, F_0) d\xi,$$

$$f_{k-1}(\rho, F_0) = \psi(T) \left(\frac{\partial u_{k-1}}{\partial \rho} + 2m(T) \frac{u_{k-1}}{\rho} - \Phi^*(T) \right),$$

$$\psi(T) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\ln \left(G^*(T) \frac{1-v(T)}{1-2v(T)} \right) \right), \quad m(T) = \frac{\frac{\partial}{\partial \rho} \left(G^*(T) \frac{v(T)}{1-2v(T)} \right)}{\frac{\partial}{\partial \rho} \left(G^*(T) \frac{1-v(T)}{1-2v(T)} \right)},$$

$$c_{10} = \frac{B_1 \rho_1^3 - B_2 \rho_2^3}{\Delta}, \quad c_{20} = -\frac{\rho_1^3 \rho_2^3 (\bar{v}_1 B_2 - \bar{v}_2 B_1)}{2\Delta}, \quad c_{1k} = -\frac{\rho_2^3 B_{k-1}}{\Delta},$$

$$c_{2k} = -\frac{\bar{v}_1 \rho_1^3 \rho_2^3 B_{k-1}}{2\Delta}, \quad B_1 = -\frac{p_1}{G_1}, \quad B_2 = 2\rho_2^{-3} H(\rho_2) - \frac{p_2}{G_2},$$

$$\Delta = \bar{v}_1 \rho_1^3 - \bar{v}_2 \rho_2^3, \quad \bar{v}_i = \bar{v}(T) \Big|_{\rho=\rho_i}, \quad G_i = G^*(T) \Big|_{\rho=\rho_i},$$

$$B_{k-1} = \frac{1}{3} [\bar{v}_2 H_0^{(k-1)}(\rho_2) + 2\rho_2^{-3} H_3^{(k-1)}(\rho_2)].$$

Числове дослідження. Досліджено температурне поле та зумовлений ним напружено-деформований стан порожнистої кулі у випадку, коли внутрішня поверхня теплоізована, а через зовнішню відбувається конвективний теплообмін із середовищем сталої температури. Розглянуто випадки наявності та відсутності силових навантажень на поверхнях. За матеріал вибрано сталь, коефіцієнт теплопровідності, температурний коефіцієнт лінійного розширення і коефіцієнт Пуассона якої є лінійними, а модуль зсуву – квадратичною функціями температури:

$$\lambda_t(t) = \lambda_t^0(1 + k(T - T_p)) \text{ [Вт/(м} \cdot \text{К)],} \quad \alpha(t) = \alpha_0(1 + k_\alpha(T - T_p)) \text{ [К}^{-1}\text{]},$$

$$v(t) = v_0(1 + k_v(T - T_p)), \quad G(t) = G_0(1 - k_{G1}(T - T_p) - k_{G1}(T - T_p)^2) \text{ [МПа]},$$

де $\lambda_{t0} = 41.51$, $k = -0.3$, $\alpha_0 = 17.08 \cdot 10^{-6}$, $k_\alpha = 0.77$, $v_0 = 0.4$, $k_v = -0.2$, $G_0 = 0.74 \cdot 10^5$, $k_{G1} = -0.46$, $k_{G2} = -0.56$. Початкова температура $t_p = 273 \text{ К}$, температура середовища $t_p = t_0 = 673 \text{ К}$.

На рис. 1–10 суцільними лініями зображено розподіли температури, переміщень чи напружень при залежних від температури всіх характеристиках, штриховими – за сталих характеристик, які дорівнюють опорним, а інші криві зображають ці розподіли при нехтуванні залежністю від температури окремої характеристики (позначено на рисунку).

На рис. 1 показано розподіл безрозмірної температури по товщині стінки кулі для різних моментів часу. Бачимо, що зі збільшенням F_0 градієнт температурного поля зменшується і температура прямує до рівномірного розподілу. Температура в нетермочутливій кулі перевищує температуру в

термочутливий. Максимальна розбіжність між цими температурами складає 3%. Ці та описані далі дослідження проведені для $Bi = 1$. Зміну в часі температурних напружень показано на рис. 2 і 3. Їх значення від початково нульових зростають, при $Fo \approx 0.24$ досягають свого максимуму, а в подальшому, коли розподіл температури наближається до рівномірного, прямують до нуля.

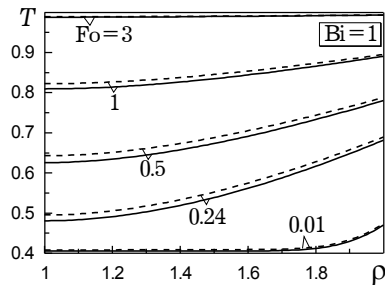


Рис. 1

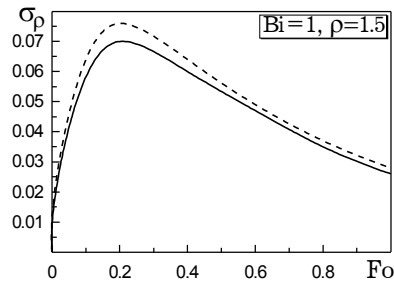


Рис. 2

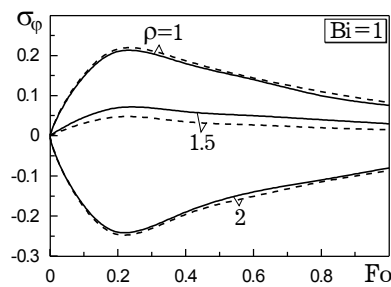


Рис. 3

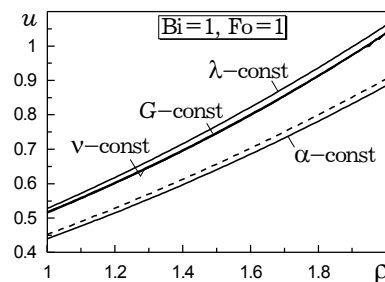


Рис. 4

Дослідження впливу температурних залежностей характеристик матеріалу на величину та характер розподілу компонентів напружено-деформованого стану проведено для часу $Fo = 1$, при якому розподіл температури має незначний градієнт.

Як видно на рис. 4, нехтування температурною залежністю коефіцієнта Пуассона чи модуля зсуву практично не впливає на розподіл переміщень. Неврахування температурної залежності коефіцієнта теплопровідності спричиняє незначне ($\approx 3\%$) зростання переміщень, а неврахування температурної залежності ТКЛР призводить до суттєвого зменшення переміщень ($\approx 15\%$ на зовнішній поверхні, де воно є найбільшим).

Рівень переміщень у нетермочутливій кулі є нижчим, ніж їхній рівень у термочутливій. Максимальна розбіжність між їх значеннями має місце на поверхні нагріву і становить 13%.

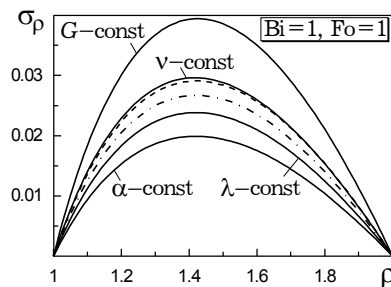


Рис. 5

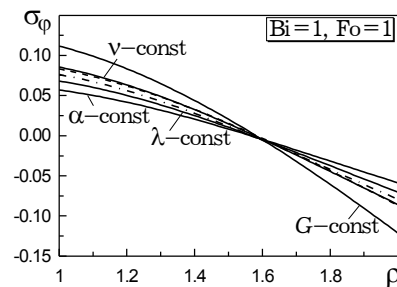


Рис. 6

Рівень напружень нетермочутливої кулі (рис. 5, 6) перевищує відповідний рівень напружень у термочутливій. Максимум цього перевищення для

напружень σ_r і σ_φ становить 8%. Нехтування температурною залежністю усіх чи окремої характеристики не змінює якісної картини розподілу напружень, але призводить до кількісних їх розбіжностей. Неврахування температурної залежності модуля зсуву чи коефіцієнта Пуассона спричиняє завищення, а коефіцієнта теплопровідності чи ТКЛР – заниження рівня напружень. Максимальна розбіжність між напруженнями, обчисленими при всіх залежних від температури характеристиках, і напруженнями, обчисленими за сталого модуля зсуву, становить 48%, за сталого коефіцієнта Пуассона – 11%, за сталого ТКЛР – 25%, за сталого коефіцієнта теплопровідності – 11%.

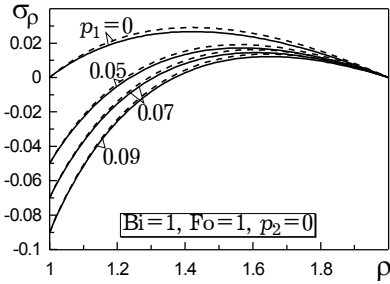


Рис. 7

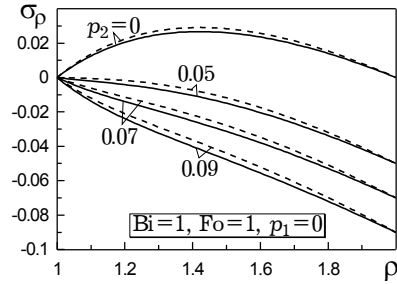


Рис. 8

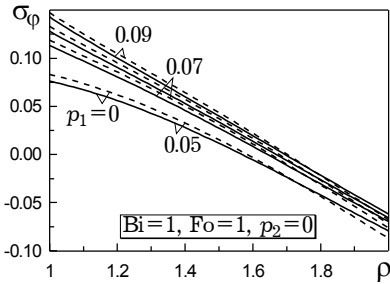


Рис. 9

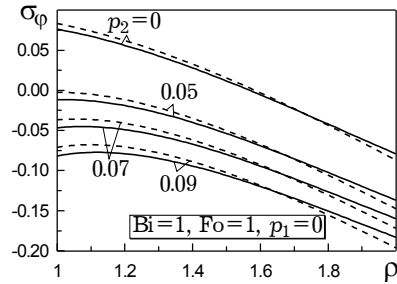


Рис. 10

На рис. 7–10 показано розподіли напружень у термочутливій і нетермочутливій кулях за одночасного їх нагрівання і навантаження тиском одної з поверхонь. Наявність навантаження як на внутрішній, так і на зовнішній поверхнях кількісно та якісно змінює картину радіальних напружень (рис. 7, 8). Наявність навантаження внутрішньої поверхні змінює лише величину кільцевих напружень, а наявність навантаження зовнішньої – змінює її картину розподілу якісно та кількісно. Навантаження зовнішньої поверхні (поверхні нагріву) викликає більшу розбіжність між температурними напруженнями в термочутливій і нетермочутливій кулях, ніж розбіжність між цими напруженнями при аналогічному навантаженні внутрішньої поверхні.

З проведеного аналізу можна зробити висновок, що в результаті дослідження напружено-деформованого стану термочутливих тіл на основі спрощених за рахунок нехтування температурною залежністю окремих характеристик моделей можна отримати їх розподіли, які суттєво відрізняються від істинних.

1. Варгафтик Н. Б. Теплофизические свойства вещества: Справочник. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1956. – 367 с.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш. шк., 1965. – 466 с.

3. Калиняк Б., Попович В. Напружений стан термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму // *Машинознавство*. – 2004. – № 4(82). – С. 3–9.
4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
5. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
7. Попович В. С., Гарматій Г. Ю. Аналітично-чисельні методи побудови розв'язків задач теплопроводності термочутливих тіл при конвективному теплообміні. – Львів: 1993. – 66 с. – (Препр. / АН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 13-93).
8. Попович В. С., Сулим Г. Т. Центральньо-симетрична квазістатична задача термопружності термочутливого тіла // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2004. – **40**, № 3. – С. 62–68.
9. Попович В. С., Токовий Ю. В. Побудова розв'язку плоскої задачі термопружності для термочутливої смуги // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2004. – **47**, № 4. – С. 172–179.
10. Постольник Ю. С., Огурцов А. П. Нелінійна прикладна термомеханіка. – К.: НМЦ ВО МОНЦ, 2000. – 280 с.
11. *Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике: Справочник* / Под ред. Б. Е. Неймарк. – М.–Л.: Энергия, 1967. – 240 с.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ПОЛОГО ШАРА ПРИ УСЛОВИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

Построено решение задачи теплопроводности для термочувствительного полого шара, который конвективно обменивается теплом со средами линейно изменяющейся во времени температуры. Исследовано влияние температурной зависимости характеристик материала шара на величину и характер распределения компонентов напряженно-деформированного состояния.

STRESS-STRAIN STATE OF THERMOSENSITIVE SHALLOW SPHERE UNDER CONVECTIVE HEAT EXCHANGE WITH ENVIRONMENT

The solution to the heat conduction problem for a thermosensitive shallow sphere, where the convective heat exchange with environment (of linearly time-varying temperature) take place, is constructed. The influence of temperature dependence of sphere material characteristics on the value and character of distribution of stressed-strained state components is studied.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.01.05