УДК 621.3.019: 51.001.57

О. Ю. Лозинський, С. В. Щербовських

КЛАСИФІКАЦІЯ, СИНТЕЗ ТА АНАЛІЗ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПРОСТИХ ФАЗОВИХ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ

Запропоновано класифікаційну схему фазових законів розподілу, згідно з якою виконано синтез аналітичних виразів таких законів розподілу «до трьох переходів – до трьох фаз» включно. Шляхом аналізу отриманих виразів встановлено невідому властивість фазових законів розподілу – властивість оборотності.

Вступ. Для розрахунку показників готовності відновлюваних об'єктів широкого застосування набув метод простору станів [2], який ґрунтується на аналізі відповідної однорідної марківської моделі надійності досліджуваного об'єкта. Таку модель надійності можна сформувати лише за умови, якщо характеристики всіх випадкових процесів відмов і відновлення, що проходять в об'єкті, будуть апроксимовані експоненціальними законами розподілу. У випадку, коли реальні характеристики випадкових процесів суттєво відрізняються від характеристик експоненціальних законів розподілу, отримана однорідна марківська модель надійності об'єкта буде мати низький ступінь адекватності та без додаткових досліджень на правомірність її застосовування не є коректною. З метою підвищення рівня адекватності при моделюванні відновлюваних багатоелементних об'єктів перспективним є застосування методу фаз [3, 5]. Основна концепція цього методу полягає у тому, щоб шляхом розширення простору станів отримати спеціальну однорідну марківську модель надійності об'єкта з вищою адекватністю. Метод фаз можна застосувати лише у такому випадку, коли характеристики всіх випадкових процесів об'єкта будуть апроксимовані особливими законами розподілу, які називають фазовими законами розподілу.

Постановка проблеми. Оскільки фазових законів розподілу існує безліч, то виникає питання, які саме конкретно закони розподілу з цієї множини необхідно використовувати для апроксимації характеристик випадкових процесів відмов і відновлення. Тобто, яким чином при максимальному врахуванні особливостей характеристик відповідних випадкових процесів досягти мінімальної кількості станів і переходів у результуючій однорідній марківській моделі надійності досліджуваного багатоелементного об'єкта. Для того щоб відповісти на це питання, необхідно визначити орієнтири, які дозволять здійснювати такий пошук обґрунтовано, а тому ефективніше.

Вибір оптимальних фазових законів розподілу дозволить підвищити ефективність проектування відновлюваних об'єктів шляхом скорочення часу, що витрачається на моделювання їх показників готовності та надійності.

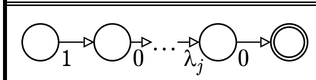
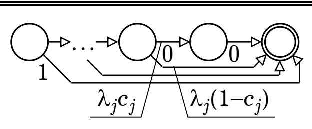
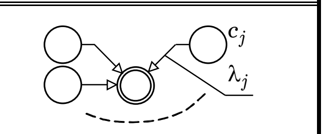
Вихідні припущення. Закони розподілу, які розглядаються у цій статті, призначені для опису характеристик випадкових процесів відмов і відновлення. Внаслідок цього зручніше користуватись не кумулятивною функцією розподілу $F(t)$, а функцією безвідмовності $R(t) = 1 - F(t)$. За необхідності викладки цього дослідження можна повторити для інших імовірнісних функцій, які є зручнішими у відповідній галузі застосування. Під фазовими законами розподілу розуміємо таку сукупність законів розподілу, яку можна синтезувати, користуючись наступними правилами. Для формування певного фазового закону розподілу необхідно наперед задати його діаграму станів і переходів. Вона є вихідним пунктом та утворюється довільно дослідником у межах таких правил. Діаграма фазового закону розподілу має являти собою сукупність фаз Ph_i (фіктивних станів) і фіктивних переходів, які сполучають ці фази в довільний спосіб, який задається дослідником так, щоб вони не були поглинальними або ізольованими. Отримана сукупність фаз сходиться, прямо чи опосередковано, в єдиний поглинальний стан, який надалі будемо позначати через S_0. Імовірність $\mathrm{Pr}_i(0)$ перебування у нульовий момент часу в довільній фазі Ph_i дорівнює заданому коефіцієнтові c_i. Сума всіх коефіцієнтів c_i повинна дорівнювати одиниці, що забезпечує виконання умови рівності одиниці площі під функцією густини розподілу $f(t)$. Початкова ймовірність поглинального стану повинна бути нульовою: $\mathrm{Pr}_0(0) = 0$. Усі функції інтенсивностей фіктивних переходів є сталими коефіцієнтами з параметром λ_i, тобто така діаграма є однорідним марківським ланцюгом. Розв'язуючи диференціальні рівняння Колмогорова – Чепмена, визначаємо ймовірності усіх фаз досліджуваної діаграми. У такому разі функція безвідмовності буде формуватись як сума ймовірностей усіх фаз діаграми:

$$R(t) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Pr}_i(t), \qquad F(t) = \mathrm{Pr}_0(t),$$

де m – кількість фаз діаграми. Відповідно імовірність нульового стану дорівнює кумулятивній функції розподілу $F(t)$, яка трактується тут як імовірність відмови. Детальніше про означення множини фазових законів розподілу див. у [1, 7].

Аналіз досліджень. Наведений спосіб синтезу фазових законів розподілу дозволяє отримати аналітичний вираз будь-якого закону розподілу з цієї множини, проте він не набув широкого поширення внаслідок громіздкості проміжних перетворень. На практиці застосовують інший підхід. У множині фазових законів розподілу виділяють підмножини таких законів розподілу, для яких можна сформувати прості правила синтезу аналітичних виразів. У подальшому з метою підвищення точності апроксимації характеристик процесу відмов необхідно лише нарощувати кількості фаз і переходів у строгій відповідності з правилами формування прийнятої підмножини. Можна виділити такі підмножини [11], які набули поширення: підмножина гіпоекспоненціальних законів розподілу (включає закони розподілу Ерланга), підмножина Коаксіанівських законів розподілу та підмножина гіперекспоненціальних законів розподілу (див. табл. 1, де наведено принципи формування підмножин фазових законів розподілу).

Таблиця 1

Гіпоекспоненціальні	Коаксіанівські	Гіперекспоненціальні
		

Можна також навести ще ряд інших підмножин, які отримано емпіричним шляхом, проте вони всі разом, як показують подальші дослідження, принципово не здатні охопити (класифікувати) усю множину фазових законів розподілу. Такий підхід призводить до утворення безмежної кількості підмножин.

Через відсутність класифікаційної системи спостерігаємо явище, коли частина простих фазових законів розподілу піддана глибокому аналізу, а інша частина – розглянута побіжно або взагалі не розглянута в науковій літературі.

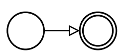
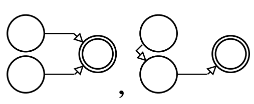
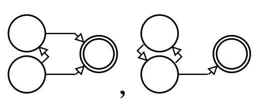
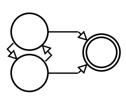
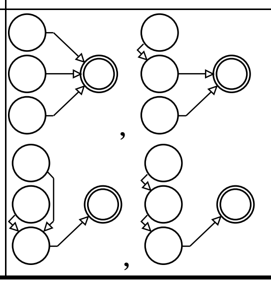
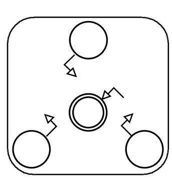
Аналізу властивостей фазових законів розподілу присвячено ряд наукових публікацій. У працях [4, 9] встановлено та досліджено властивість, яка полягає в тому, що фазові закони розподілу мають обмеження на «концентрацію» функції густини розподілу навколо середнього, що ускладнює їх застосування для апроксимації характеристик процесів, які наближаються до регулярних. У роботі [10] встановлено та досліджено властивість, яка полягає у тому, що існують певні функції, які означують верхню і нижню граничні межі кривої функції густини розподілу. Тобто для фазових законів розподілу існує обмеження на граничний темп наростання (спадання) функцій характеристик. Якщо експериментальні характеристики випадкового процесу виходять за граничні межі певного фазового закону розподілу, то така характеристика не може бути ним апроксимована з високим ступенем адекватності. Також встановлено [6, 8] властивість фазових законів розподілу, яка полягає в тому, що вони завжди мають раціональне перетворення Лапласа, зворотне твердження не є дійсним. Цікавою властивістю фазових законів розподілу є те, що згортка двох фазових законів розподілу являє собою інший фазовий закон розподілу, що доведено в [12].

Наведені властивості характеризують фазові закони розподілу з точки зору фундаментальної математики. Вони можуть бути корисними для апроксимації експериментальних даних і для виконання деяких допоміжних перетворень. Однак, користуючись цими властивостями, не вдається означити підмножину таких фазових законів розподілу, яка є найефективнішою при побудові моделей надійності відновлюваних багатоелементних об'єктів.

Метою пропонованої статті є, по-перше, подати класифікаційну схему фазових законів розподілу; по-друге, синтезувати у проекційному зв'язку з поданою класифікаційною схемою аналітичні вирази простих фазових законів розподілу; по-третє, подати властивість оборотності, яку вдається встановити шляхом аналізу аналітичних виразів синтезованих фазових законів розподілу.

Виклад основного матеріалу. Для ефективного аналізу безмежної множини фазових законів розподілу постає потреба їхньої класифікації. В основу класифікаційної схеми необхідно покласти такі властивості, які, по-перше, є характерними для усієї множини таких законів розподілу і, по-друге, можуть бути легко зафіксовані. Такими, на нашу думку, виступають кількість фаз і кількість фіктивних переходів. Утворимо класифікаційну схему таким чином, щоб номер стовпця відповідав кількості фіктивних переходів у діаграмі досліджуваного закону розподілу, а номер рядка – кількості фаз. Запишемо в кожну комірку усі можливі закони розподілу, які відповідають заданим ознакам, як це наведено у класифікаційній схемі фазових законів розподілу (табл. 2).

Таблиця 2

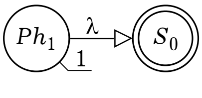
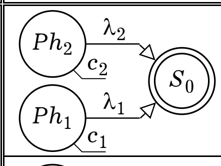
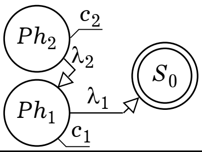
		Кількість переходів			
		1	2	3	4
Кількість фіктивних станів	1		—	—	—
	2	—			
	3	—	—		

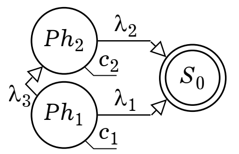
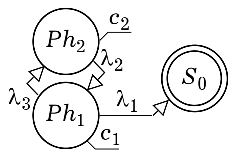
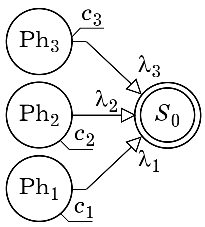
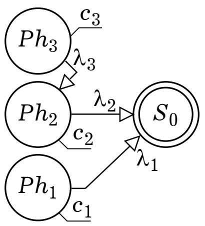
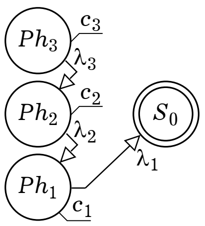
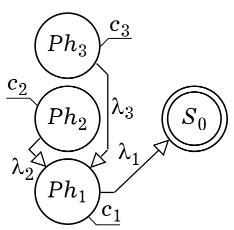
Виявляється, що при заданій кількості фіктивних станів виникають обмеження на мінімальну та максимальну кількості фіктивних переходів. Мінімальна кількість фіктивних переходів не може бути меншою ніж кількість фаз, оскільки тоді будемо отримувати ізольовані фази, що суперечить означенню множини фазових законів розподілу. Цим пояснюється, чому комірки (2, 1), (3, 1), (3, 2) та інші відповідні є порожніми. Легко показати методом індукції, що максимальна кількість фіктивних переходів не може перевищувати числа, що дорівнює кількості фаз, піднесеної до квадрата. Подальше нарощування кількості переходів можна здійснювати лише за рахунок фіктивних переходів, які виходять із кінцевого стану, що також суперечить означенню множини фазових законів розподілу. Цим, у свою чергу, пояснюється, чому комірки (1, 2), (1, 3), (1, 4) і відповідні є порожніми. Беручи такі обмеження до уваги, для розмірності до трьох переходів і до трьох фаз включно отримаємо лише дев'ять фазових законів розподілу, які надалі будемо називати простими фазовими законами розподілу. На цих законах розподілу і зупинимось, оскільки, користуючись ними, можна відобразити необхідні особливості досліджуваної множини розподілів.

Зрозуміло, що наведена класифікаційна система має ряд недоліків. Наприклад, комірка (3, 4) і відповідні старші включають надмірно велику кількість законів розподілу. Тобто виникає потреба у створенні допоміжної класифікаційної схеми всередині кожної такої комірки. Проте з огляду на подальші отримані результати застосування цієї класифікаційної системи є виправданим.

Виконаємо синтез аналітичних виразів простих фазових законів розподілу. Власне, частину таких законів розподілу вже виведено та досліджено в науковій літературі. Результати синтезу зведемо у табл. 3. Найпростішим фазовим законом розподілу є експоненціальний закон розподілу (1), що відображає здатність простору станів розширюватись у себе. Закони розподілу (2) і (6) належать до підмножини гіперекспоненціальних законів розподілу, про яку вже згадувалось вище. Закон розподілу (3) виведено та докладно проаналізовано в [13]. Закони розподілу (4), (7), (8) встановлено в літературі в спрощеній формі як результат застосування одного або кількох принципів синтезу наведених вище підмножин фазових законів розподілу. Фазових законів розподілу (5) і (9) у повній формі, як наведено в табл. 3, або в спрощеній формі в літературі не виявлено.

Таблиця 3

	Діаграми фазових законів розподілу	Аналітичні вирази функції безвідмовності фазових законів розподілу
1 перехід – 1 фаза		$R(t) = e^{-\lambda t}$ (1)
2 переходи – 2 фази		$R(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$ (2)
		$R(t) = \dfrac{(c_1\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \dfrac{c_2\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$ (3)

3 переходи – 2 фази		$R(t) = \frac{c_1(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2} e^{-(\lambda_1+\lambda_3)t} + \frac{c_2(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$ (4)
		$R(t) = e^{-\frac{u}{2}t}\left[\mathrm{ch}\,\frac{v}{2}t + \frac{u - 2c_1\lambda_1}{v}\,\mathrm{sh}\,\frac{v}{2}t\right],$ (5) $u = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \qquad v = \sqrt{u^2 - 4\lambda_1\lambda_2}$
3 переходи – 3 фази		$R(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + c_3 e^{-\lambda_3 t}$ (6)
		$R(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + \frac{c_2\lambda_2 + (1 - c_1)\lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} e^{-\lambda_2 t} + \frac{c_3\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} e^{-\lambda_3 t}$ (7)
		$R(t) = \frac{\lambda_2\lambda_3 + c_1\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_3) - \lambda_1\lambda_2(1 - c_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{c_2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3(1 - c_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{-\lambda_2 t} + \frac{c_3\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} e^{-\lambda_3 t}$ (8)
		$R(t) = \frac{c_1\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3(1 - c_2) - \lambda_1\lambda_2(1 - c_3) + \lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{c_2\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} + \frac{c_3\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_3} e^{-\lambda_3 t}$ (9)

Шляхом аналізу аналітичних виразів, які наведено в табл. 3, вдалось встановити фундаментальну властивість фазових законів розподілу – властивість *оборотності* одного фазового закону розподілу відносно іншого. Під властивістю оборотності розуміємо можливість перетворення заданого фазового закону розподілу, який має певну кількість фаз, у будь-який інший фазовий закон розподілу, який має таку саму кількість фаз при повному збереженні всіх вихідних характеристик. Оборотність може бути трьох типів: однозначною, напіводнозначною та багатозначною.

Розглянемо властивість оборотності більш детально. *Однозначну оборотність* можна проілюструвати на прикладі законів розподілу з комірки «2 фази − 2 переходи». Нехай (згідно з табл. 3) функції безвідмовності таких законів розподілу визначаються виразами

$$R_1(t) = c_{11}e^{-\lambda_{11}t} + c_{12}e^{-\lambda_{12}t},$$

$$R_2(t) = \frac{c_{21}\lambda_{21} - \lambda_{22}}{\lambda_{21} - \lambda_{22}} e^{-\lambda_{21}t} + \frac{c_{22}\lambda_{21}}{\lambda_{21} - \lambda_{22}} e^{-\lambda_{22}t}.$$

Вираз $R_1(t)$, як і $R_2(t)$, є суперпозицією двох експоненціальних законів розподілу. Якщо прийняти, що степені відповідних експонент в обох виразах є однаковими, то на основі принципу ортогональності, прирівнюючи коефіцієнти при відповідних множниках, можна фазовий закон розподілу $R_2(t)$ однозначно перетворити у фазовий закон розподілу $R_1(t)$, тобто співвідношення трансформації множини параметрів $\{\lambda_{21},\ \lambda_{22},\ c_{21},\ c_{22}\}$ у $\{\lambda_{11},\ \lambda_{12},\ c_{11},\ c_{12}\}$ є такими:

$$\lambda_{11} = \lambda_{21}, \qquad \lambda_{12} = \lambda_{22}, \qquad c_{11} = \frac{c_{21}\lambda_{21} - \lambda_{22}}{\lambda_{21} - \lambda_{22}}, \qquad c_{12} = \frac{c_{22}\lambda_{21}}{\lambda_{21} - \lambda_{22}}.$$

Із отриманих аналітичних виразів легко вивести формули зворотної трансформації множини параметрів $\{\lambda_{11}, \lambda_{12}, c_{11}, c_{12}\}$ у множину $\{\lambda_{21},\ \lambda_{22},\ c_{21},\ c_{22}\}$:

$$\lambda_{21} = \lambda_{11}, \qquad \lambda_{22} = \lambda_{12},$$

$$c_{21} = c_{11}\left(1 - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}\right) + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}, \qquad c_{22} = c_{12}\left(1 - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}\right), \tag{10}$$

на основі яких фазовий закон розподілу $R_1(t)$ можна однозначно перетворити в $R_2(t)$. У такому разі виникає проблема діапазону зміни параметрів. Зрозуміло, що показники експонент λ_{11}, λ_{12}, λ_{21}, λ_{22} повинні бути додатними, інакше ці розподіли втрачатимуть зміст, а відносно коефіцієнтів при експонентах c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} ситуація не є такою однозначною. У класичному розумінні коефіцієнти c_{ij} повинні набувати значень із діапазону від нуля до одиниці включно. Стосовно такого діапазону можна зробити наступні застереження. Принцип розширення простору станів полягає у заміні реального стану на сукупність відповідних йому фаз. Будь-яка фаза окремо від цілої сукупності не несе жодного фізичного змісту, а виступає лише зручним математичним прийомом, який спрямований на підвищення ефективності та адекватності математичних моделей надійності. У такому випадку обґрунтований відхід від класичного діапазону можна розглядати як черговий математичний прийом. Якщо прийняти, що початкові умови окремих фаз є довільними, то отримуємо, що ймовірності таких фаз можуть набувати значень, менших від нуля або більших від одиниці. Таке явище є допустимим, якщо сума ймовірностей усіх фаз, тобто функція безвідмовності $R(t)$, буде відповідати усім вимогам теорії надійності. Таким чином, саме обмеження для функції безвідмовності повинно бути критерієм, згідно з яким необхідно визначити допустимий діапазон зміни цих коефіцієнтів c_{ij}.

Визначення діапазонів зміни параметрів фазових законів є складною задачею, яка потребує окремого ґрунтовного дослідження. Наразі при виконанні апроксимації характеристик необхідно для кожного конкретного випадку досліджувати правомірність застосування отриманих параметрів.

Продемонструємо властивість оборотності на числовому прикладі. Нехай маємо фазовий закон розподілу $R_1(t)$, із параметрами $c_{11} = c_{12} = 0.5$, $\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{12} = 2$. Імовірності фаз Ph_1 та Ph_2 (відповідно криві *3*, *4* на рис. 1) у сумі утворюють функцію безвідмовності $R_1(t)$ (крива *1*). Застосувавши формули (10) для перетворення фазового закону розподілу $R_1(t)$ у $R_2(t)$, отримаємо, що $c_{21} = 1.5$, $c_{21} = -0.5$, $\lambda_{21} = 1$, $\lambda_{22} = 2$. Імовірності фаз Ph_1 та Ph_2 (відповідно криві *5*, *6*) такого закону розподілу в сумі утворюють функцію безвідмовності $R_2(t)$ (крива *2* – маркери). Таким чином, графіки функцій безвідмовності *1* та *2* цих двох фазових законів розподілу збігаються, тобто вдається відобразити закон розподілу $R_1(t)$ через $R_2(t)$. Очевидно, що в цьому випадку можна виконати однозначне зворотне перетворення. Подальші дослідження показують, що усі чотири фазові закони розподілу з комірки «3 фази – 3 переходи» мають властивість однозначної оборотності один стосовно іншого.

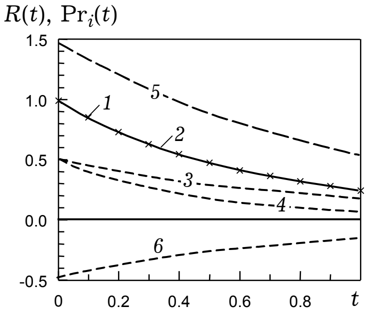


Рис. 1

Властивість напіводнозначної оборотності можна показати на прикладі перетворення фазового закону розподілу з комірки «3 фази – 2 переходи» у фазовий закон розподілу з комірки «2 фази – 2 переходи». Нехай функція безвідмовності закону розподілу $R_3(t)$, який необхідно перетворити до $R_1(t)$, визначається як

$$R_3(t) = \frac{c_{31}(\lambda_{31} - \lambda_{32})}{\lambda_{31} + \lambda_{33} - \lambda_{32}} e^{-(\lambda_{31}+\lambda_{33})t} + \frac{c_{32}(\lambda_{31} - \lambda_{32}) + \lambda_{33}}{\lambda_{31} + \lambda_{33} - \lambda_{32}} e^{-\lambda_{32}t}.$$

На основі принципу ортогональності вдається однозначно перейти від закону розподілу $R_3(t)$ до закону розподілу $R_1(t)$. Формули трансформації множини параметрів $\{\lambda_{31}, \lambda_{32}, c_{31}, c_{32}, c_{33}\}$ у $\{\lambda_{11}, \lambda_{12}, c_{11}, c_{12}\}$ є такими:

$$\lambda_{11} = \lambda_{31} + \lambda_{33}, \qquad \lambda_{12} = \lambda_{32},$$

$$c_{11} = \frac{c_{31}(\lambda_{31} - \lambda_{32})}{\lambda_{31} + \lambda_{33} - \lambda_{32}}, \qquad c_{32} = \frac{c_{32}(\lambda_{31} - \lambda_{32}) + \lambda_{33}}{\lambda_{31} + \lambda_{33} - \lambda_{32}}.$$

Проте однозначного зворотного перетворення множини параметрів $\{\lambda_{11}, \lambda_{12}, c_{11}, c_{12}\}$ у $\{\lambda_{31}, \lambda_{32}, c_{31}, c_{32}, c_{33}\}$ для цих фазових законів розподілу не існує. Це пояснюється тим, що кінцевих параметрів є п'ять, а рівнянь є лише чотири. Проте зворотне перетворення вдається виконати, якщо задати довільну пару λ_{31} та λ_{33} так, щоб виконувалось співвідношення $\lambda_{31} + \lambda_{33} = \lambda_{11}$. На підставі такого співвідношення можна, наприклад, обґрунтовано ввести від'ємний діапазон значень для параметрів фіктивних переходів λ_{31} та λ_{33}.

Властивість багатозначної оборотності покажемо на прикладі фазових законів розподілу з комірки «3 фази – 2 переходи». Нехай функціями безвідмовності таких законів розподілу є $R_3(t)$, означена вище, та $R_4(t)$ (див. табл. 3)

$$R_4(t) = e^{-\frac{u}{2}t}\left[\operatorname{ch}\frac{\sqrt{u^2 - 4\lambda_{41}\lambda_{42}}}{2}t + \frac{u - 2c_{41}\lambda_{41}}{\sqrt{u^2 - 4\lambda_{41}\lambda_{42}}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{u^2 - 4\lambda_{41}\lambda_{42}}}{2}t\right],$$

де $u = \lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{43}$.

На основі принципу ортогональності визначаємо систему формул, користуючись якою можна виконати пряму та зворотну трансформацію таких законів розподілу:

$$\lambda_{31} + \lambda_{33} = \frac{u}{2} + \sqrt{\frac{u^2}{4} - \lambda_{41}\lambda_{42}}, \qquad \lambda_{32} = \frac{u}{2} - \sqrt{\frac{u^2}{4} - \lambda_{41}\lambda_{42}},$$

$$c_{31} = \frac{1}{\lambda_{31} - \lambda_{32}}\left(-\frac{u}{2} + \sqrt{\frac{u^2}{4} - \lambda_{41}\lambda_{42}} + c_{41}\lambda_{41}\right),$$

$$c_{32} = \frac{1}{\lambda_{31} - \lambda_{32}}\left(\frac{u}{2} + \sqrt{\frac{u^2}{2} - \lambda_{41}\lambda_{42}} - c_{41}\lambda_{41} - \lambda_{33}\right).$$

Оскільки обидва фазові закони розподілу мають по п’ять параметрів, а рівнянь є лише чотири, то при виконанні прямого чи зворотного перетворення один із параметрів необхідно задавати довільно. Отже, перетворення одного закону розподілу в інший є багатозначним.

Висновки. У роботі встановлено невідому раніше властивість фазових законів розподілу − властивість оборотності, звідки випливає ряд цікавих висновків. По-перше, усі фазові закони розподілу, які містять однакову кількість фаз, мають одну й ту ж сутність, яка набуває відмінних проявів у вигляді різних однорідних марківських моделей. Тому закони розподілу, подані в комірках (2, 2), (2, 3) і (2, 4), є повним переліком усіх проявів фазових законів розподілу з двома фіктивними станами. По-друге, фазові закони розподілу, діаграми яких містять кількість фіктивних переходів, більшу від кількості фаз, можуть бути однозначно перетворені без втрат до фазових законів розподілу, які містять кількість фіктивних переходів, що дорівнює відповідній кількості фаз. Тобто фазові закони розподілу з комірки (2, 3) містять один залежний параметр, а розподіл із (2, 4) − два залежних параметри. Зауважимо, що закони розподілу з залежними параметрами в такому сенсі не втрачають свого змісту, оскільки, наприклад, при багатопараметричній апроксимації може виявитись зручним таке розділення параметрів. Запропонована в табл. 2 класифікаційна схема виявляється досить ефективним інструментом при аналізі множини фазових законів розподілу, оскільки в її основі лежить фундаментальна ознака цієї множини − кількість фаз. Вдалось також виявити невідомі закони розподілу (4) і (8), які можуть стати основою для синтезу нових підмножин фазових законів розподілу.

Надалі проблема аналізу фазових законів розподілу при дослідженні показників надійності розпадається на наступні задачі. По-перше, виникає потреба визначення такої множини фазових закони розподілу, для якої задачу апроксимації характеристик випадкових процесів можна виконати у найбільш ефективний спосіб. По-друге, виникає потреба визначення такої множини фазових законів розподілу, для якої результуючі моделі надійності багатоелементних об’єктів будуть найефективнішими. І, найголовніше, з огляду на властивість оборотності виникає питання, яким чином перейти від законів розподілу, ефективних при апроксимації, до законів розподілу, які є ефективними для синтезу моделей надійності складних об’єктів.

1. *Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А.* Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. − М.: Наука, 1989. − 336 с.
2. *Лозинський О. Ю., Марущак Я. Ю., Костробій П. П.* Розрахунок надійності електроприводів. − Львів: Вид-во держ. ун-ту «Львів. політехніка», 1996. − 234 с.
3. *Райншке К., Ушаков И. А.* Оценка надежности систем с использованием графов / Под ред. И. А. Ушакова. − М.: Радио и связь, 1988. − 208 с.
4. *Aldous D., Shepp L.* The least variable phase-type distribution is Erlang // Stochast. Models. − 1987. − **3**. − P. 467−473.

5. *Lefebvre Ya*. Using the phase method to model degradation and maintenance efficiency // Int. J. Reliability, Quality and Safety Eng. – 2003. – **10**, No. 4. – P. 383–405.
6. *Maier R. S*., *O'Cinneide C. A*. A closure characterization of phase-type distributions // J. Appl. Probab. – 1992. – **29**. – P.92-103.
7. *Neuts M*. Matrix Geometric Solutions: Stochastic Models. – Baltimore: Johns Hopkins Univ. Press, 1981. – 256 p.
8. *O'Cinneide C. A*. Characterization of phase-type distributions // Stochast. Models. – 1990. – **6**. – P. 1–57.
9. *O'Cinneide C. A*. Phase-type distributions and majorization // Ann. Appl. Probab. – 1991. – **1**. – P. 219–227.
10. *O'Cinneide C. A*. Phase-type distributions: Open problems and few properties // Stochast. Models. – 1999. – **15**. – P. 221–249.
11. *Riska A*., *Diev V*., *Smirni E*. Efficient fitting of long-tailed data sets into phase-type distributions // Perform. Evaluation J. – 2004. – **55**. – P. 147–164.
12. *Sengupta B*. Phase-type representations for matrix exponential solutions // Stochast. Models. – 1990. – **6**. – P. 163–167.
13. *Telek M*., *Heindl A*. Moment bounds for acyclic discrete and continuous phase-type distributions of second order // Proc. UK Performance Evaluation Workshop, UKPEW-2002. – 2002. – P. 201–212.

КЛАССИФИКАЦИЯ, СИНТЕЗ И АНАЛИЗ СВОЙСТВ ПРОСТЫХ ФАЗОВЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Предложена классификационная схема фазовых законов распределения, согласно которой выполнен синтез аналитических выражений таких законов распределения «до трех переходов – до трех фаз» включительно. В результате анализа полученных выражений установлено неизвестное ранее свойство фазовых законов распределения – свойство оборотности.

CLASSIFICATION, SYNTHESIS AND PROPERTY ANALYSIS OF SIMPLE PHASE-TYPE DISTRIBUTIONS

In this paper the phase-type distributions laws classification system is proposed. According to this classification, the synthesis is made for analytical expressions of such distribution laws «up to three transitions – up to three phases», including. The property of convertibility is found by means of synthesized phase-type distribution expressions analysis.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
13.04.04