УДК 512.64

В. М. Петричкович

# ПРО КРАТНОСТІ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ КОРЕНІВ, СТЕПЕНІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ДІЛЬНИКІВ І ФАКТОРИЗАЦІЮ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

*Нехай $A(x)$ – регулярна многочленна матриця степеня $m$ над кільцем многочленів $\mathsf{P}[x]$, де $\mathsf{P}$ – алгебраїчно замкнене поле, $(x-\beta_j)^{s_j}$ – її елементарні дільники степенів $s_j > 2$, $j = 1,\ldots,p$, а решта її елементарних дільників є степенів, не вищих ніж 2. Доведено, що, коли $s_1 + s_2 + \ldots + s_p = s \le m + p$, то матриця $A(x)$ розкладається на множники $A(x) = (Ex - B_1)\ldots(Ex - B_t)C_t(x)$, $t \ge m + p + 1 - s$, де $E$ – одинична матриця.*

Нехай $\mathsf{P}$ – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, $A(x)$ – многочленна матриця із $\mathsf{M}(n,\mathsf{P}(x))$, тобто

$$A(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^{m-i}, \qquad A_i \in \mathsf{M}(n,\mathsf{P}).$$

Матрицю $A(x)$ називають регулярною, якщо $A_0$ – неособлива матриця, і унітальною, якщо $A_0 = E$ – одинична матриця. Многочлен $\Delta(x) = \det A(x)$ називають характеристичним многочленом, а його корені – характеристичними коренями матриці $A(x)$.

Відомо, що розкладність на множники многочленної матриці тісно пов'язана з кратностями її характеристичних коренів і степенями елементарних дільників. Так, у роботі [4] доведено, що регулярна матриця $A(x)$ розкладається на лінійні регулярні множники, коли її характеристичні корені мають кратності, не більші ніж 2, а в [1], а також у [6, 9] – коли матриця $A(x)$ є простої структури (її елементарні дільники лінійні). У [3] анонсовано результат, який стверджує розкладність на лінійні регулярні множники многочленної матриці степеня 2, елементарні дільники якої є степенів, не вищих ніж 2. У працях [5, 11] доведено цей факт у загальному випадку, при цьому використано результати з роботи [4]. У [10] доводиться, що цей результат вірний, коли в матриці $A(x)$ є тільки один елементарний дільник степеня 3, а решта – степенів, не вищих ніж 2.

У цій роботі встановлюється розкладність на множники регулярної многочленної матриці $A(x)$ у випадку, коли вона має елементарні дільники степенів, більших ніж 2 і 3. Окремі факти, наведені в цій статті, анонсовано в [7, 8]. Основним результатом є наступна

**Теорема.** *Нехай $A(x) \in \mathsf{M}(n,\mathsf{P}[x])$ – регулярна матриця степеня $m$ і*

$$(x-\alpha_i)^{r_i}, \qquad r_i \le 2, \qquad i = 1,\ldots,p_1,$$

$$(x-\beta_j)^{s_j}, \qquad s_j > 2, \qquad j = 1,\ldots,p_2, \qquad p_2 \ge 1, \tag{1}$$

*– її елементарні дільники. Якщо*

$$\sum_{j=1}^{p_2} s_j = s \le m + p_2, \tag{2}$$

*то $A(x)$ розкладається на множники*

$$A(x) = (Ex - B_1)\ldots(Ex - B_t)C_t(x), \tag{3}$$

*де $t \ge m + p_2 + 1 - s$.*

Перед доведенням теореми сформулюємо допоміжні твердження.

Надалі через $d^{A_i}(x)$ будемо позначати найбільший спільний дільник мінорів $i$-го порядку матриці $A_i(x)$, складеної із деяких $i$ рядків матриці $A(x)$, $i < n$.

**Означення 1.** Із матриці $A(x) \in \mathsf{M}(n, \mathsf{P}[x])$ можна виділити *регулярний множник* порядку $k \le n$, якщо існує матриця $Q \in \mathsf{GL}(n, \mathsf{P})$ така, що

$$QA(x) = \begin{Vmatrix} B_k(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{n-k} \end{Vmatrix} C(x),$$

де $B_k(x)$ – регулярна матриця порядку $k$; $E_{n-k}$ – одинична матриця порядку $n-k$.

**Лема 1.** *Нехай* $A(x) \in \mathsf{M}(n, \mathsf{P}[x])$ – *регулярна матриця степеня* $m$ *з елементарними дільниками вигляду* (1). *Якщо*

$$\sum_{j=1}^{p_2} s_j = s \le m + p_2,$$

*то з матриці* $A(x)$ *виділяється лінійний регулярний множник простої структури порядку* $k \ge \dfrac{n}{2}$.

Д о в е д е н н я. Оскільки

$$\sum_{i=1}^{p_1} r_i = r \le 2p_1, \qquad s \le m + p_2, \qquad r + s = mn,$$

то $2p_1 + m + p_2 \ge mn$. Звідси одержуємо, що

$$p_1 \ge \frac{m(n-1)}{2} - \frac{p_2}{2},$$

отже, кількість усіх елементарних дільників матриці $A(x)$ є

$$p_1 + p_2 \ge \frac{m(n-1)}{2} + \frac{p_2}{2}.$$

Оскільки $p_2$ – кількість елементарних дільників матриці $A(x)$ кратностей, не менших ніж 3, то $3p_2 \le s$ або $3p_2 \le m + p_2$. Отже, $1 \le p_2 \le \dfrac{m}{2}$.

Для виділення із матриці $A(x)$ лінійного регулярного множника простої структури порядку $k$ достатньо, щоб матриця $A(x)$ мала $d$ елементарних дільників, де

$$d > \begin{cases} (\ell - 1)m, & n = 2\ell, \\ \ell m, & n = 2\ell + 1. \end{cases}$$

Безпосередньо перевіряється, що $p_1 + p_2 \ge d$. Лему доведено. ◊

**Означення 2.** Нехай

$$A_k(x) = \left\| (x - \alpha_i)\tilde{a}_{ij}(x) \right\|_1^{k,n} = \operatorname{diag}(x - \alpha_1, \ldots x - \alpha_k)\tilde{A}_k(x).$$

Якщо для деякої матриці $Q_k(x) \in \mathsf{GL}(k, \mathsf{P})$ і кореня $\gamma_j$ многочлена $d^{\tilde{A}_k}(x)$

$$Q_k A_k(x) = \begin{Vmatrix} & * & \\ (x - \gamma_j)b_{i1}(x) & \ldots & (x - \gamma_j)b_{in}(x) \\ & * & \end{Vmatrix} =$$

$$= \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, x - \gamma_j, 1, \ldots, 1)B_k(x)$$

(тут символом «$*$» позначено рядки матриці $A_k(x)$, що залишилися без змін), то кажемо, що корінь $\gamma_j$ можна виділити в матриці $A_k(x)$ з $i$-го рядка замість кореня $\alpha_i$.

**Лема 2.** *Кожний корінь $\gamma_j$ многочлена $d_k^{\tilde{A}_k}(x)$ можна виділити в матриці $A_k(x)$ замість деяких коренів $\alpha_i$ з відповідних рядків, причому, якщо $\gamma_j$ виділяється тільки замість $\alpha_i$, $i = 1, \ldots p$, із рядків $\boldsymbol{a}_{j_i}(x)$, $i = 1, \ldots, p$, матриці $A_k(x)$, то рядки $\boldsymbol{a}_{j_i}(\gamma_j)$, $i = 1, \ldots, p$, є лінійно залежними.*

Д о в е д е н н я. Перша частина твердження леми очевидна.

Якщо тепер припустити, що рядки $\boldsymbol{a}_{j_i}(\gamma_j)$, $i = 1, \ldots, p$, лінійно незалежні, то $\gamma_j$ можна було би виділити в матриці $A_k(x)$ замість деякого $\alpha_r$ із $r$-го рядка, де $r \neq j_i$, $i = 1, \ldots, p$, що суперечить твердженню леми. $\Diamond$

Д о в е д е н н я **теореми**. Припустимо спочатку, що елементарні дільники матриці $A(x)$ є попарно взаємно простими.

На підставі леми 1 для деякої матриці $Q \in \mathsf{GL}(n, \mathsf{P})$ маємо зображення матриці $A(x)$:

$$QA(x) = \begin{Vmatrix} B_k(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{n-k} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \tilde{A}_k(x) \\ A_{n-k}(x) \end{Vmatrix},$$

де $B_k(x) = \operatorname{diag}(x - \alpha_1, \ldots, x - \alpha_k)$, $k \geq \dfrac{n}{2}$.

Множину характеристичних коренів $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ позначатимемо через $\mathcal{K}$. Розглянемо многочлен

$$v(x) = \frac{\Delta(x)}{\det B_k(x)\, d^{\tilde{A}_k}(x)}.$$

Якщо $k < \dfrac{3n}{4}$, то для деяких коренів $\gamma_i$ многочлена $v(x)$ маємо, що $d^{\tilde{A}_k}(\gamma_i) \neq 0$, тобто рядки матриці $\tilde{A}_k(\gamma_i)$ лінійно незалежні. Очевидно, що $\gamma_i \in \mathcal{K}$, тобто $\gamma_i = \alpha_i$. Тому можемо продовжити виділення із матриці

$$\begin{Vmatrix} \tilde{A}_k(x) \\ A_{n-k}(x) \end{Vmatrix} \tag{4}$$

множників вигляду

$$D_i(x) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, x - \alpha_i, 1, \ldots, 1). \tag{5}$$

Таким чином, одержимо таке зображення матриці $A(x)$:

$$RA(x) = \left\Vert \begin{array}{c|ccc|c} B_k(x) & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \hline & x - \alpha_1 & & \mathbf{0} & \\ * & & \ddots & & \mathbf{0} \\ & & * & x - \alpha_\ell & \\ \hline \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & E_{n-(k+\ell)} \end{array} \right\Vert \cdot \begin{Vmatrix} \tilde{A}_k(x) \\ \tilde{A}_\ell(x) \\ A_{n-(k+\ell)}(x) \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

де $R \in \mathsf{GL}(n, \mathsf{P})$ і $k + \ell \geq \dfrac{3n}{4}$. Дальше цей процес продовжити не можна.

Зауважимо, що серед коренів $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ і коренів із множини $\mathcal{K}$ можуть бути $\beta_j$, тобто деякі $\alpha_i = \beta_j$. Крім того, виділення множників вигляду

(5) із матриці (4) проведено так, що в першому зі співмножників у розкладі (6) матриці $A(x)$ корені $\beta_j$, $j = 1, \ldots, p_2$, є кратностей, не більших ніж 2.

Отже, з матриці $A(x)$ виділено лінійний регулярний множник порядку $k + \ell$. Якщо $k + \ell < n$, то покажемо, що, виходячи з (6), можна виділити з матриці $A(x)$ регулярний множник порядку $k + \ell + 1$.

У розкладі (6) матриці $A(x)$ перший множник зводимо подібними перетвореннями до жорданової форми, потім належним чином переставляємо його рядки та стовпці, множимо на другий множник і одержуємо матрицю

$$TA(x) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} (x-\alpha_1)\tilde{a}_{11}(x) & \ldots & (x-\alpha_1)\tilde{a}_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (x-\alpha_\ell)\tilde{a}_{\ell 1}(x) & \ldots & (x-\alpha_\ell)\tilde{a}_{\ell n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (x-\alpha_k)\tilde{a}_{k1}(x) & \ldots & (x-\alpha_k)\tilde{a}_{kn}(x) \\ (x-\alpha_1)\tilde{a}_{k+1,1}(x) + \tilde{a}_{11}(x) & \ldots & (x-\alpha_1)\tilde{a}_{k+1,n}(x) + \tilde{a}_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (x-\alpha_\ell)\tilde{a}_{k+\ell,1}(x) + \tilde{a}_{\ell,1}(x) & \ldots & (x-\alpha_\ell)\tilde{a}_{k+\ell,n}(x) + \tilde{a}_{\ell,n}(x) \\ \hdashline \multicolumn{3}{c}{A_{n-(k+\ell)}(x)} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c} A_k(x) \\ A_\ell(x) \\ A_{n-(k+\ell)}(x) \end{array} \right\|. \tag{7}$$

Нехай тепер

$$d^{A_{k+\ell}}(x) = \prod_{j=1}^{p_2} (x - \beta_j)^{q_j} v(x), \qquad v(\beta_j) \neq 0, \qquad 1 \le q_j \le s,$$

де

$$A_{k+\ell}(x) = \left\| \begin{array}{c} A_k(x) \\ A_\ell(x) \end{array} \right\|.$$

Утворимо многочлени

$$g(x) = \frac{\Delta(x)}{d^{A_{k+\ell}}(x)} = \prod_{j=1}^{p_2} (x - \beta_j)^{f_j} u_1(x), \qquad u_1(\beta_j) \neq 0, \quad 0 \le f_j \le s - 1, \tag{8}$$

і

$$g_1(x) = \prod_{j=1}^{p_2} (x - \beta_j)^{f_{1j}} u_1(x), \tag{9}$$

де $f_{1j} = \begin{cases} 0, & q_j > 1, \\ 1, & q_j = 1, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, p_2.$

Надалі будемо позначати

$$\sum_{j=1}^{p_2} q_j = q, \qquad \sum_{j=1}^{p_2} f_j = f.$$

Многочлен $g_1(x)$ має лише прості корені і $g_1 \mid d^{A_k}$. Множину його коренів позначимо через $\mathcal{M}_{g_1}$.

Покажемо, що $\mathcal{M}_{g_1} \neq \varnothing$, тобто $\deg g_1 > 0$.

Оскільки

$$\deg \Delta = mn, \qquad \deg d^{A_{k+l}} = m(k+\ell) - \omega, \qquad \omega \ge 0\,, \tag{10}$$

то

$$\deg g = \deg \Delta - \deg d^{A_{k+l}} = m(n-(k+\ell)) + \omega\,. \tag{11}$$

Але $k+\ell < n$, тому з (11) маємо, що

$$\deg g \ge m + \omega\,. \tag{12}$$

Нехай у многочлені $g_1(x)$ в (9) $f_{1i} = 1$ для $i = 1,\ldots,r_1$, $0 \le r_1 \le p_2$, а решта дорівнюють нулеві. Тоді, враховуючи (12), маємо

$$\deg g_1 = \deg g - f + r_1 \ge m + \omega - f + r_1\,. \tag{13}$$

Тепер $f = s - q$ і $s \le m + p_2$, $q \ge p_2$.

Нехай

***а***) $q > p_2$. Тоді $s - q < m + p_2 - p_2$, тобто $f < m$. Оскільки $r_1 \ge 0$, то з (13) маємо, що $\deg g_1 > 0$.

***б***) $q = p_2$. Оскільки $q_i \ge 1$, $i = 1,\ldots,p_2$, то це означає, що $q_i = 1$ для всіх $i = 1,\ldots,p_2$, тому $f_{1i} = 1$, для всіх $i = 1,\ldots,p_2$, і, отже, $r_1 = p_2 \ge 1$. Тому $f \le m$ і з (13) маємо, що $\deg g_1 > 0$. Отже, $\mathcal{M}_{g_1} \ne \varnothing$.

Нехай тепер на основі леми 2 кожний корінь $\gamma_j$ многочлена $g_1(x)$, тобто з множини $\mathcal{M}_{g_1}$, можна виділити в матриці $A_k(x)$ з (7) замість деяких коренів $\alpha_i$ з множини $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}$ і, навпаки, замість кожного кореня із множини $\mathcal{K}_1$ можна виділити в матриці $A_k(x)$ деякий корінь $\gamma_j$ з множини $\mathcal{M}_{g_1}$. Таку відповідність між елементами цих множин позначимо так:

$$\mathcal{K}_1 \Leftrightarrow \mathcal{M}_{g_1}\,. \tag{14}$$

Без обмеження загальності можемо вважати, що множина $\mathcal{K}_1$ складена з коренів $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k_1}\}$, бо в іншому разі корені та рядки, в яких вони знаходяться, можна перенумерувати.

Покладемо, що $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_\ell = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell\}$. В іншому випадку, як буде показано далі, все доведено.

Матриця

$$A_{k_1}(x) = \left\| (x-\alpha_i)\tilde{a}_{ij}(x) \right\|_1^{k_1,n} = \mathrm{diag}\,(x-\alpha_1,\ldots,x-\alpha_{k_1})\tilde{A}_{k_1}(x)$$

складена з перших $k_1$ рядків матриці $A_k(x)$, а матриця $A_{k+\ell-k_1}(x)$ одержана з матриці $A_{k+\ell}(x)$ викреслюванням $k_1$ рядків з номерами $k+1, k+2,\ldots,$ $k+k_1$. Враховуючи (14) і лему 2, маємо, що $g_1(x) \mid d^{\tilde{A}_{k_1}}(x)$, а тому

$$\deg g_1 \le (m-1)k_1\,. \tag{15}$$

Тепер утворимо многочлени

$$h_1(x) = \frac{d^{A_{k+\ell}}(x)}{d^{A_{k+\ell-k_1}}(x)\prod\limits_{i=1}^{k_1}(x-\alpha_i)} = \prod_{j=1}^{p_2}(x-\beta_j)^{t_j}\,v_1(x), \quad v_1(\beta_j) \ne 0\,, \tag{16}$$

і

$$\tilde{h}_1(x) = \prod_{j=1}^{p_2} (x - \beta_j)^{t_{1j}} v_1(x), \tag{17}$$

де $\quad t_{1j} = \begin{cases} 0, & q_{1j} > 1, \\ 1, & q_{1j} = 1, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, p_2,$

$q_{1j}$ – кратності коренів $\beta_j$, $j = 1, \ldots, p_2$, у многочлені $d^{A_{k+\ell-k_1}}(x) \prod_{i=1}^{k_1} (x - \alpha_i)$. Корені многочлена $\tilde{h}_1(x)$ прості, їх множину позначимо через $\mathcal{M}_{\tilde{h}_1}$.

Доведемо, що $\mathcal{M}_{\tilde{h}_1} \neq \varnothing$, тобто $\deg \tilde{h}_1 > 0$.

Нехай у многочлені $\tilde{h}_1(x)$ (формула (17)) $t_{1i} = 1$ для $i = 1, \ldots, r_2$, $0 \le r_2 \le p_2$. Тоді з (16) і (17) маємо

$$\deg \tilde{h}_1 = \deg h_1 - t + r_2 = \deg d^{A_{k+\ell}} - \deg d^{A_{k+\ell-k_1}} - k_1 - t + r_2, \tag{18}$$

де $t = \sum_{j=1}^{p_2} t_j$. Враховуючи (10) і те, що $\deg d^{A_{k+\ell-k_1}} \le m(k + \ell - k_1)$, із співвідношення (18) одержимо

$$\deg \tilde{h}_1 \ge (m-1)k_1 - \omega - t + r_2. \tag{19}$$

Із (13) і (15) маємо, що $(m-1)k_1 \ge m + \omega - f + r_1$. Тому з (19) одержуємо

$$\deg \tilde{h}_1 \ge m - (f + t) + r_1 + r_2. \tag{20}$$

Але $f + t = (s - q) + (q - \tilde{q}) = s - \tilde{q}$, $s \le m + p_2$, і $\tilde{q} \ge p_2$, де $\tilde{q} = \sum_{j=1}^{p_2} q_{1j}$.

Нехай

***а***) $\tilde{q} > p_2$. Тоді $s - \tilde{q} < m + p_2 - p_2$, тобто

$$f + t < m, \tag{21}$$

і з (20) одержуємо, що $\deg \tilde{h}_1 > 0$.

***б***) $\tilde{q} = p_2$. Це означає, що $q_{1i} = 1$ для всіх $i = 1, \ldots, p_2$, тому $t_{1i} = 1$ для всіх $i = 1, \ldots, p_2$, тобто $r_2 = p_2 \ge 1$. Тоді

$$f + t \le m \tag{22}$$

і з (20) випливає, що $\deg \tilde{h}_1 > 0$, тобто $\mathcal{M}_{\tilde{h}_1} \neq \varnothing$.

Рядки підматриць $A_k(x)$ і $A_\ell(x)$ із формули (7) є попарно «зв'язними», тобто, якщо з $i$-го рядка $\boldsymbol{a}_i(x) = \| (x - \alpha_i)\tilde{a}_{i1}(x) \ \ldots \ (x - \alpha_i)\tilde{a}_{in}(x) \|$ матриці $A_k(x)$ винесено множник $x - \alpha_i$ (з матриці $TA(x)$ з формули (7) – відповідно множник вигляду $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, x - \alpha_i, 1, \ldots, 1)$), то, віднявши рядок $\tilde{\boldsymbol{a}}_i(x) = \| \tilde{a}_{i1}(x) \ \ldots \ \tilde{a}_{in}(x) \|$ матриці $A_\ell(x)$ від $(k+i)$-го рядка

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_{k+i}(x) = \| (x - \alpha_i)\tilde{a}_{k+i,1} + \tilde{a}_{i1}(x) \ \ldots \ (x - \alpha_i)\tilde{a}_{k+i,n}(x) + \tilde{a}_{in}(x) \|,$$

з отриманого рядка можна винести множник $x - \alpha_i$. Таку відповідність між множинами $\mathcal{K}_1$ і $\mathcal{M}_{\tilde{h}_1}$ будемо записувати так:

$$\mathcal{K}_1 \Leftarrow \mathcal{M}_{\tilde{h}_1}.$$

Припустимо, що

$$\mathcal{M}_{\tilde{h}_1} \bigcap \mathcal{K} = \varnothing ,$$

тобто $\tilde{h}_1 \mid d^{\tilde{A}_k}$. В іншому випадку все вже доведено.

Тепер утворимо многочлен

$$g_2(x) = \frac{\tilde{h}_1(x)}{\delta_1(x)}, \qquad \delta_1(x) = (\tilde{h}_1(x),\, d^{\tilde{A}_{k_1}}(x)). \tag{23}$$

Покажемо, що $\deg g_2 > 0$.

Нехай многочлени $g_1(x)$ із (9) і $\tilde{h}_1(x)$ із (17) такі, як і в попередніх випадках, тобто мають відповідно по $r_1$ і $r_2$ коренів із множини $\{\beta_1, \dots, \beta_{p_2}\}$. Тоді з (13) і (19) матимемо

$$\deg g_1 + \deg \tilde{h}_1 \geq (m-1)k_1 + m - (f+t) + r_1 + r_2 . \tag{24}$$

Звідси, враховуючи (21) і (22), одержуємо, що

$$\deg g_1 + \deg \tilde{h}_1 > (m-1)k_1 . \tag{25}$$

Тому на підставі (23) матимемо, що $\deg g_2 > 0$.

Множину коренів многочлена $g_2(x)$, яка не є порожньою, позначаємо через $\mathcal{M}_{g_2}$.

Кожний корінь із множини $\mathcal{M}_{g_2}$ можна виділити в підматриці $A_k(x)$ замість деяких коренів $\alpha_j \in \mathcal{K}$. Виберемо лише ті, які не належать $\mathcal{K}_1$. Множину таких коренів позначимо через $\mathcal{K}_2$. Оскільки $\deg g_2 > 0$, то $\mathcal{K}_2 \neq \varnothing$. Покладемо, що $\mathcal{K}_2 = \{\alpha_{k_1+1}, \alpha_{k_1+2}, \dots, \alpha_{k_2}\}$. Вищезазначену відповідність між елементами цих множин записуватимемо так:

$$\mathcal{K}_2 \Leftrightarrow \mathcal{M}_{g_2} .$$

Знову припускаємо, що $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_\ell$, і утворюємо многочлени $\tilde{h}_2(x)$ і $g_3(x)$, $\deg \tilde{h}_2 > 0$, $\deg g_3 > 0$, тобто $\mathcal{M}_{\tilde{h}_2} \neq \varnothing$ і $\mathcal{M}_{g_3} \neq \varnothing$, і т. д. Якщо на кожному кроці для многочленів $g_i(x)$ і $\tilde{h}_i(x)$ і множин їх коренів $\mathcal{M}_{g_i}$ і $\mathcal{M}_{\tilde{h}_i}$, $i = 1, \dots, t-1$, виконуються умови

$$\mathcal{K}_i \subset \mathcal{K}_\ell, \qquad \mathcal{M}_{\tilde{h}_i} \bigcap \mathcal{K} = \varnothing ,$$

то цей процес не обривається, тобто знову утворені многочлени $g_t(x)$ і $\tilde{h}_t(x)$ є степенів, більших ніж нуль, тобто $\mathcal{M}_{g_t} \neq \varnothing$ і $\mathcal{M}_{\tilde{h}_t} \neq \varnothing$, що доводимо подібно, як і в попередніх випадках. Таким чином, одержимо такі підмножини характеристичних коренів матриці $A(x)$ і відповідності між їх елементами:

$$\mathcal{K}_i \Leftrightarrow \mathcal{M}_{g_i}, \qquad \mathcal{K}_i \Leftarrow \mathcal{M}_{\tilde{h}_i}, \qquad i = 1, \dots, t , \tag{26}$$

де $\mathcal{K}_i = \{\alpha_{k_{i-1}+1}, \alpha_{k_{i-1}+2}, \dots, \alpha_{k_i}\}$ і $\mathcal{K}_i \bigcap \mathcal{K}_j = \varnothing,\ i \neq j$, при цьому покладаємо $k_0 = 0$.

Оскільки вищезазначений процес не обривається, то на деякому кроці одержимо, що

$$\mathcal{K}_t \not\subset \mathcal{K}_\ell , \qquad \text{тобто} \qquad \mathcal{K}_t \bigcap (\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_\ell) \neq \varnothing , \tag{27}$$

або

$$\mathcal{M}_{\tilde{h}_t} \bigcap \mathcal{K} \neq \varnothing. \tag{28}$$

Це випливає з того, що $k \geq \frac{n}{2}$, $k + \ell < n$. Тому $\ell < k$, тоді $\mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_\ell \neq \varnothing$.

Припустимо, що виконується умова (28). Матриця (7) розбивається на смуги:

$$T_1 TA(x) = \left\| \begin{array}{c} S_1(x) \\ S_2(x) \\ \cdots \\ S_{t-1}(x) \\ S_t(x) \\ * \\ \hline * \\ \tilde{S}_t(x) \\ \tilde{S}_{t-1}(x) \\ \cdots \\ \tilde{S}_2(x) \\ \tilde{S}_1(x) \\ \hline A_{n-(k+\ell)}(x) \end{array} \right\|, \tag{29}$$

де

$$S_r(x) = \left\| (x - \alpha_i)\tilde{a}_{ij}(x) \right\|_{k_{r-1}+1,1}^{k_r,n},$$

$$\tilde{S}_r = \left\| (x - \alpha_i)\tilde{a}_{k+i,j}(x) + \tilde{a}_{ij}(x) \right\|_{k_{r-1}+1,1}^{k_r,n},$$

тобто смуга $S_r(x)$ складена з рядків підматриці $A_k(x)$ з номерами $k_{r-1}+1, k_{r-1}+2, \ldots, k_r$, а $\tilde{S}_r(x)$ – із рядків підматриці $A_l(x)$ з номерами $k + k_{r-1} + 1$, $k + k_{r-1} + 2$, $\ldots$, $k + k_r$, $r = 1, 2, \ldots, t$, причому $k_0 = 0$.

Тоді в смузі $S_i(x)$ кожний характеристичний корінь із множини $\mathcal{M}_{g_i}$ можна виділити з деяких її рядків замість коренів із множини $\mathcal{K}_i$, а тоді відповідно в смузі $\tilde{S}_i(x)$ замість цього кореня із $\mathcal{K}_i$ виділяється деякий корінь із множини $\mathcal{M}_{\tilde{h}_i}$, $i = 1, \ldots, t$.

Отже, нехай виконується умова (28), тобто існує характеристичний корінь $\lambda_t \in \mathcal{M}_{\tilde{h}_t}$ такий, що $\lambda_t \in \mathcal{K}$. Очевидно, що $\lambda_t \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_\ell$. Зважаючи на спосіб утворення множин $\mathcal{M}_{\tilde{h}_i}$ і $\mathcal{K}_i$, $i = 1, \ldots, t$, проведемо заміни елементів між цими множинами наступним чином. Корінь $\lambda_t \in \left(\mathcal{M}_{\tilde{h}_t} \bigcap \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_\ell\right)$ у смузі $\tilde{S}_t(x)$ можна виділити з її деякого $(k + k_t)$-го рядка замість кореня $\alpha_{k_t} \in \mathcal{K}_t$. Тоді $\tilde{\mathcal{K}}_t$ – множина, одержана з $\mathcal{K}_t$ заміною $\alpha_{k_t}$ на $\lambda_t$. У смузі $S_t(x)$ із $k_t$-го її рядка замість кореня $\alpha_{k_t}$ можна виділити деякий корінь $\lambda_{t-1} \in \mathcal{M}_{g_t}$. Тоді $\tilde{\tilde{\mathcal{K}}}_t$ – множина, одержана з $\mathcal{K}_t$ заміною $\alpha_{k_t}$ на $\lambda_{t-1}$.

Зі способу утворення многочленів $g_i(x)$ випливає, що $g_{i+1} \mid \tilde{h}_i$, тобто $\mathcal{M}_{g_{i+1}} \subset \mathcal{M}_{\tilde{h}_i}$, $i = 1, \ldots, t-1$, і $g_1 \mid g$, де многочлен $g(x)$ визначений у (8).

Тому $\lambda_{t-1}$ є коренем многочлена $\tilde{h}_{t-1}(x)$, тобто $\lambda_{t-1} \in \mathcal{M}_{\tilde{h}_{t-1}}$.

Тепер у смузі $\tilde{S}_{t-1}(x)$ корінь $\lambda_{t-1} \in \mathcal{M}_{\tilde{h}_{t-1}}$ можна виділити з її $(k+k_{t-1})$-го рядка замість кореня $\alpha_{k_{t-1}} \in \mathcal{K}_{t-1}$. Тоді утворюємо множину коренів $\tilde{\mathcal{K}}_{t-1}$ із множини $\mathcal{K}_{t-1}$, замінюючи $\alpha_{k_{t-1}}$ на $\lambda_{t-1}$. У смузі $S_{t-1}(x)$ замість $\alpha_{k_{t-1}}$ із деякого її $k_{t-1}$-го рядка можна виділити деякий корінь $\lambda_{t-2} \in \mathcal{M}_{g_{t-1}}$, тому утворюємо множину коренів $\tilde{\tilde{\mathcal{K}}}_{t-1}$ з множини $\mathcal{K}_{t-1}$ заміною $\alpha_{k_{t-1}}$ на $\lambda_{t-2}$ і т. д. Нарешті $\lambda_1 \in \mathcal{M}_{\tilde{h}_1}$ у смузі $\tilde{S}_1(x)$ можна виділити з її $(k+k_1)$-го рядка замість кореня $\alpha_{k_1} \in \mathcal{K}_1$, і тому утворюємо множину коренів $\tilde{\mathcal{K}}_1$ із множини $\mathcal{K}_1$ заміною $\alpha_{k_t}$ на $\lambda_1$. У смузі $S_1(x)$ замість кореня $\alpha_{k_1} \in \mathcal{K}_1$ можна виділити з деякого рядка корінь $\lambda_0 \in \mathcal{M}_{g_1}$ і замість множини $\mathcal{K}_1$ будемо розглядати множину $\tilde{\tilde{\mathcal{K}}}_1$, у якій $\alpha_{k_t}$ замінено на $\lambda_0$.

Тепер неважко показати, що з матриці (29) можна виділити лінійний регулярний множник $H(x) = \tilde{B}_{k+\ell}(x) \oplus E_{n-(k+\ell)}$ порядку $k+\ell$ з характеристичними коренями з множин

$$\tilde{\mathcal{K}}_i, \quad \tilde{\tilde{\mathcal{K}}}_i, \quad i = 1,\ldots,t, \quad \mathcal{K} \setminus \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{K}_i \quad \text{і} \quad \mathcal{K}_\ell \setminus \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{K}_i$$

(з урахуванням їх кратностей), тобто для деякої матриці $T_2 \in \mathsf{GL}(n,\mathsf{P})$ одержимо зображення матриці $A(x)$:

$$T_2 T_1 T A(x) = \left\| \begin{matrix} \tilde{B}_{k+\ell}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_{n-(k+\ell)} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} G_{k+\ell}(x) \\ A_{n-(k+\ell)} \end{matrix} \right\|. \tag{30}$$

Оскільки корінь $\lambda_0$ у многочленах $g_1(x)$ і $d^{A_{k+\ell}}(x)$ має кратність 1 і є характеристичним коренем $\tilde{B}_{k+\ell}(x)$, то $d^{G_{k+\ell}}(\lambda_0) \neq 0$, тобто рядки матриці $G_{k+\ell}(\lambda_0)$ є лінійно незалежними. Тому з (30) одержимо наступний розклад:

$$T_3 T_2 T_1 T A(x) = \left\| \begin{array}{c:c:c} \tilde{B}_{k+\ell}(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hdashline * & x-\lambda_0 & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_{n-(k+\ell+1)} \end{array} \right\| C_{k+\ell+1}(x), \tag{31}$$

$T_3 \in \mathsf{GL}(n,\mathsf{P})$, тобто з матриці $A(x)$ виділено лінійний регулярний множник порядку $k+\ell+1$.

Подібним чином показуємо, що й у випадку, коли виконується умова (27), виходячи з (29), можна виділити з матриці $A(x)$ лінійний регулярний множник порядку $k+\ell+1$.

Тепер, якщо $k+\ell+1 < n$, аналогічно міркуючи, покажемо, що виходячи з (31), із матриці $A(x)$ можна виділити лінійний регулярний множник порядку $k+\ell+2$. Так поступаючи крок за кроком, виділимо з матриці $A(x)$ лінійний регулярний множник порядку $n$, який можна вважати унітальним, тобто

$$A(x) = (Ex - B_1)C_1(x). \tag{32}$$

Нагадаємо, що доведене вище стосується випадку, коли елементарні дільники матриці $A(x)$ є попарно взаємно простими. На основі леми 3 із [5] і результатів роботи [12] одержимо, що, якщо виділяється лінійний регулярний множник із матриці $A(x)$, елементарні дільники якої задовольняють умови (1), (2) і є попарно взаємно простими, то лінійний регулярний множник виділяється і з матриці $A(x)$, елементарні дільники якої задовольняють умови (1), (2) і не є попарно взаємно простими. Отже, з матриці $A(x)$ за умов теореми виділяється лінійний регулярний множник, тобто має місце зображення матриці $A(x)$ у вигляді (32).

Матриця $C_1(x)$ у (32) є степеня $m-1$ і її елементарні дільники є степенів, не більших ніж степені відповідних елементарних дільників матриці $A(x)$. Тому, якщо для елементарних дільників матриці $C_1(x)$ виконується умова (2) теореми, то з неї можна виділити лінійний унітальний множник $Ex - B_2$. Так міркуючи далі, одержимо розклад (3) матриці $A(x)$. Теорему доведено. ◊

Із теореми випливають такі наслідки.

**Наслідок 1**. *Регулярна матриця* $A(x) \in \mathsf{M}(n, \mathsf{P}[x])$, *яка має не більше як один елементарний дільник степеня* 3, *а решта її елементарних дільників є степенів, не більших ніж* 2, *розкладається у добуток лінійних регулярних множників.*

**Наслідок 2.** *Нехай*

$$A_0 Y^m + A_1 Y^{m-1} + \dots + A_{m-1} Y + A_m = 0,$$

$$Y^m A_0 + Y^{m-1} A_1 + \dots + Y A_{m-1} + A_m = 0 \qquad (33)$$

– *матричні рівняння і* $A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m$ – *відповідна їм многочленна матриця над* $\mathsf{P}[x]$, *тобто* $A_i \in \mathsf{M}(n, \mathsf{P})$, $i = 0, 1, \dots, m$. *Якщо елементарні дільники матриці* $A(x)$ *задовольняють умови* (1) *і* (2), *то матричні рівняння* (33) *мають розв'язки.*


1. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 29–40.
2. *Казимирский П. С., Петричкович В. М.* Одно достаточное условие разложимости матричного квадратного трехчлена на линейные множители // II Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей: Резюме сообщ., Кишинев, 21–25 авг. 1974 г. – Кишинев: Штиинца, 1974. – С. 29–30.
3. *Казимирский П. С., Петричкович В. М.* Разложимость полиномиальной матрицы на линейные множители // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – Вып. 8. – С. 3–9.
4. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
5. *Крупник И. Н.* О разложении матричного пучка на линейные множители // Мат. заметки. – 1991. – **49,** № 2. – С. 95–101.
6. *Маркус А. С., Мереуца И. В.* О некоторых свойствах простых $\lambda$-матриц // Мат. исследования. – 1975. – **10**, № 3. – С. 207–214.
7. *Петричкович В. М.* Про дільники та факторизації матричних многочленів // III Міжнар. алгебр. конф. в Україні: Суми, 2–8 липня 2001. – Суми: СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2001. – С. 228–229.
8. *Петричкович В. М.* Про характеристичні корені, елементарні дільники та структуру многочленних матриць // Міжнар. алгебр. конф. в Україні: Тези доп. (Ужгород, 27–29 серп. 2001 р.). – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2001. – С. 45.
9. *Сахнович Л. А.* О факторизации передаточной оператор-функции // Докл. АН СССР. – 1976. – **226**, № 4. – С. 781 – 784.
10. *Шаваровский Б. З.* О разложимых многочленных матрицах // Мат. заметки. 2000. – **68**, вып. 4. – С. 593–607.
11. *Krupnik I.* Decomposition of a monic matrix polynomial into a product of linear factors // Linear Algebra and Appl. – 1992. – **167**. – P. 239 – 242.
12. *Langer H.* Über Lancaster's Zerlegung von Matrizen-Scharen // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968, **29**, No 1. – P. 75–80.

## О КРАТНОСТЯХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ, СТЕПЕНЯХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ И ФАКТОРИЗАЦИИ МНОГОЧЛЕННЫХ МАТРИЦ

*Пусть* $A(x)$ *– регулярная многочленная матрица степени* $m$ *над кольцом многочленов* $\mathsf{P}[x]$, *где* $\mathsf{P}$ *– алгебраически замкнутое поле,* $(x-\beta_j)^{s_j}$ *– ее элементарные делители степеней* $s_j > 2,\ j = 1,\dots,p$, *а остальные ее элементарные делители имеют степени, не больше 2. Доказано, что, если* $s_1 + s_2 + \dots + s_p = s \le m + p$, *то матрица* $A(x)$ *разложима на множители* $A(x) = (Ex - B_1)\dots(Ex - B_t)C_t(x)$, $t \ge\ \ge m + p + 1 - s$, *где* $E$ *– единичная матрица.*

## ON MULTIPLICITIES OF CHARACTERISTIC ROOTS AND DEGREES OF ELEMENTARY DIVISORS AND FACTORIZATION OF POLYNOMIAL MATRICES

*Let* $A(x)$ *be a regular polynomial matrix of degree* $m$ *over the polynomials ring* $\mathsf{P}[x]$, *where* $\mathsf{P}$ *is an algebraically closed field. Let* $(x-\beta_j)^{s_j}$ *be their elementary divisors of degree* $s_j > 2,\ j = 1,\dots,p$, *whose remaining elementary divisors are of degree no more than 2. It is proved that if* $s_1 + s_2 + \dots + s_p = s \le m + p$, *then the matrix* $A(x)$ *can be factored into factors* $A(x) = (Ex - B_1)\dots(Ex - B_t)C_t(x)$, $t \ge m + p + 1 - s$, *where* $E$ *is the identity matrix.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.06.04