УДК 512.64

Б. З. Шаваровський

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ПОДІБНОСТІ НАБОРІВ МАТРИЦЬ

Для виділеного класу многочленних матриць вказано канонічну форму відносно напівскалярно еквівалентних перетворень. Це дало можливість встановити канонічну форму стосовно одночасного перетворення подібності для відповідного класу наборів матриць над полем.

Розглянемо набір $(A_1, \ldots, A_s)$ матриць із кільця $M_n(\mathbb{C})$, де $\mathbb{C}$ − лінійно впорядковане лексикографічним способом поле комплексних чисел, і відповідний йому матричний многочлен $A(x) = E_n x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s$, де E_n − одинична матриця порядку n, який можна записати у вигляді многочленної матриці, тобто матриці над кільцем $M_n(\mathbb{C}[x])$. Ставиться питання про класифікацію таких наборів з точністю до подібності. При цьому, зрозуміло, маємо на увазі одночасну подібність, тому тут і надалі прикметник «одночасна» опускаємо. Оскільки подібність наборів матриць рівносильна напівскалярній еквівалентності відповідних многочленних матриць, то задача зводиться до задачі класифікації многочленних матриць з точністю до напівскалярної еквівалентності. Відомо [5], що трикутна (нижня) форма з інваріантними многочленами на головній діагоналі, до якої зводиться кожна неособлива многочленна матриця за допомогою напівскалярно еквівалентних перетворень, визначається неоднозначно. Тому виникає потреба уточнення її до канонічної (або побудови нової). У цій замітці для одного класу многочленних матриць трикутна форма доозначується до канонічної. Остання застосовується для класифікації наборів матриць − коефіцієнтів заданих многочленних матриць відносно перетворення подібності.

Класифікаційні задачі лінійної алгебри мають велику бібліографію (див., наприклад, роботи [1−3, 6−9]).

Нагадаємо деякі означення і твердження, які використовуємо у цій роботі.

Матрицю $A(x)$ називають регулярною, якщо A_0 − неособлива матриця, і унітальною, якщо $A_0 = E$ − одинична матриця [4].

Згідно з [5] (див. також [4, с. 131]) многочленні матриці $A(x)$, $B(x)$ називають напівскалярно еквівалентними, якщо вони задовольняють співвідношення $A(x) = LB(x)R(x)$, де L, $R(x)$ − оборотні матриці відповідно над $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}[x]$.

У роботі [4] наведено поняття значення многочленної матриці $G(x)$ на системі коренів многочлена $\varphi(x)$ (позначення $M_{G(x)}(\varphi(x))$, див. [4, р. II, § 2]). Якщо $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ − усі (різні) корені многочлена $\varphi(x)$ кратностей $k_1, \ldots, k_m$ відповідно, то

$$M_{G(x)} =$$

$$= \left\| G(\alpha_1) \;\; G^{(1)}(\alpha_1) \;\; \ldots \;\; G^{(k_1-1)}(\alpha_1) \;\; \ldots \;\; G(\alpha_m) \;\; G^{(1)}(\alpha_m) \;\; \ldots \;\; G^{(k_m-1)}(\alpha_m) \right\|^t,$$

де $G^{(i)}(\alpha_j)$ − значення i-ї похідної матриці $G(x)$ при $x = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, k_j - 1$; «t» − символ операції блочного транспонування. Для матриці $M_{G(x)}(\varphi(x))$ використовують також позначення $M_{G(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_m^{(k_m)}]$.

Твердження 1 ([4, р. II, § 2]). *Якщо* L, $R(x)$ − *оборотні матриці відповідно над* $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}[x]$ *і* $\varphi(x), \psi(x) \in \mathbb{C}[x]$, *то*

(*i*) $\operatorname{rang} M_{R(x)G(x)L}(\varphi(x)) = \operatorname{rang} M_{G(x)}(\varphi(x))$;

(*ii*) $\operatorname{rang} M_{G(x)\psi(x)}(\varphi(x)\psi(x)) = \operatorname{rang} M_{G(x)}(\varphi(x))$.

Твердження 2 ([4, р. IV, § 1]). *Унітальні многочленні матриці* $A(x)$, $B(x)$ *подібні тоді й тільки тоді, коли вони напівскалярно еквівалентні.*

Під взаємною (приєднаною) для квадратної матриці $G(x) = \| g_{ij}(x) \|$ розуміють матрицю $G_*(x) = \| G_{ij}(x) \|^{\top}$, де «$\top$» − символ операції транспонування, а $G_{ij}(x)$ − алгебраїчне доповнення елемента $g_{ij}(x)$ матриці $G(x)$.

Теорема 1 ([4, р. III, § 2, теорема 3]). *Нехай* $A(x)$ − *многочленна матриця порядку* n *і* $\Delta(x) = \det A(x)$ − *її характеристичний многочлен, причому* $\deg \Delta(x) = ns$. *Для того щоб для матриці* $A(x)$ *існувала матриця* $R(x) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}[x])$ *така, що добуток* $A(x)R(x)$ − *регулярна многочленна матриця, необхідно та достатньо, щоб*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)\| E_n \ \ xE_n \ \ \ldots \ \ x^{s-1}E_n \|}(\Delta(x)) = ns.$$

Теорема 2 ([4, р. III, § 3]). *Нехай* $\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \cdots (x - \alpha_m)^{k_m}$ − *канонічний розклад дільника степеня* nr *характеристичного многочлена* $\Delta(x) = \det A(x)$ *многочленної матриці* $A(x)$, *тобто* $\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x)$, $k_1 + \ldots + k_m = nr$. *Якщо*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)\| E_n \ \ xE_n \ \ \ldots \ \ x^{r-1}E_n \|}(\varphi(x)) = nr,$$

то має місце розклад $A(x) = P(x)Q(x)$, *де* $P(x) = E_n x^r + P_1 x^{r-1} + \ldots + P_r$, $\det P(x) = \varphi(x)$, *причому матричні коефіцієнти* $P_1, \ldots, P_r$ *можуть бути визначені у вигляді розв'язків лінійного матричного рівняння*

$$M_{A_*(x)\| E_n \ \ xE_n \ \ \ldots \ \ x^{r-1}E_n \|}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_m^{(k_m)}] \left\| \begin{matrix} P_r \\ \vdots \\ P_1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= -M_{x^r A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_m^{(k_m)}].$$

За таких умов дільник $P(x)$ *матриці* $A(x)$ *визначається дільником* $\varphi(x)$ *її характеристичного многочлена однозначно.*

Домовимось надалі нульові матриці різних вимірів і нульовий елемент поля $\mathbb{C}$ позначати одним символом $\mathbf{0}$.

Змістом цієї роботи є твердження теореми 3 та її застосування до задачі про подібність наборів матриць − теорема 4.

Теорема 3. *Нехай регулярна многочленна матриця* $A(x)$ *порядку* n *і степеня* s *має форму Сміта вигляду*

$$\operatorname{diag}\Big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_1(x)}_{k}, \underbrace{\varphi_2(x), \ldots, \varphi_2(x)}_{n-2k} \Big), \tag{1}$$

причому числа s, n, k *задовольняють умову* $n = k(s+2)$. *Тоді* $\deg \varphi_1(x) = s$, $\deg \varphi_2(x) = s + 1$, *і матриця* $A(x)$ *напівскалярно еквівалентними перетвореннями зводиться до вигляду*

$$F(x)=\left\| \begin{array}{ccccc} E_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varphi_1(x)E_k & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ f_1(x)E_k & \mathbf{0} & \varphi_2(x)E_k & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_s(x)E_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \varphi_2(x)E_k \end{array} \right\|, \tag{2}$$

де $\deg f_i(x)\le s$ *і для всіх коренів* $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\ \alpha_s$ *(з урахуванням кратностей) многочлена* $\varphi_2(x)$*, розміщених у порядку неспадання, виконуються умови*

$$f_i(\alpha_0)=0, \qquad f_i^{(r_i)}(\alpha_i)=1, \qquad f_m^{(r_i)}(\alpha_i)=0\,, \tag{3}$$

якщо $\alpha_i=\dots=\alpha_{i-r_i}$, $\alpha_i\ne\alpha_{i-r_i-1}$, $i=1,\dots,s$, $m=1,\dots,i-1,i+1,\dots,s$. *Матриця* $F(x)$ (2) *з умовами* (3) *визначається однозначно.*

Д о в е д е н н я. *Існування.* З очевидної рівності

$$k\deg\varphi_1(x)+(n-2k)\deg\varphi_2(x)=sn$$

та з умови, що $n=k(s+2)$, дістаємо рівність

$$\deg\varphi_1(x)+s\deg\varphi_2(x)=s(s+2)\,,$$

звідки випливає, що $\deg\varphi_1(x)=s$, $\deg\varphi_2(x)=s+1$. Нехай $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_s$ – усі корені (з урахуванням кратностей) останнього інваріантного многочлена матриці $A(x)$, причому $\alpha_{i-1}\le\alpha_i$, $i=1,\dots,s$. Оскільки на підставі теореми 1 з [4, р. IV, § 1] довільна неособлива многочленна матриця зводиться до нижньої трикутної форми з інваріантними многочленами на головній діагоналі, то, беручи до уваги вигляд (1) форми Сміта, матрицю $A(x)$ вказаними перетвореннями можна звести до вигляду

$$\left\| \begin{array}{ccccc} E_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ B_0(x) & \varphi_1(x)E_k & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ B_1(x) & \mathbf{0} & \varphi_2(x)E_k & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_s(x) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \varphi_2(x)E_k \end{array} \right\|, \tag{4}$$

де $B_j(x)$ – $(k\times k)$-блоки; $B_j(\alpha_0)=\mathbf{0}$, $j=0,1,\dots,s$; $\deg B_0(x)<s$, $\deg B_i(x)\le s$, $i=1,\dots,s$. Якщо $\alpha_0=\alpha_1$ (тобто α_0 – кратний корінь многочлена $\varphi_2(x)$), то ранг першої похідної блоку

$$\tilde B_1(x)=\left\| \begin{array}{c} B_1(x) \\ \vdots \\ B_s(x) \end{array} \right\|$$

матриці (4) при $x=\alpha_0$ є максимальним, тобто $\operatorname{rang}\tilde B_1^{(1)}(\alpha_0)=k$. Це випливає з того, що на підставі теореми 1 маємо

$$\operatorname{rang} M_{\left\| \tilde B_1(x)\;\; E_{n-2k} \right\| \left\| E_n\;\; xE_n\;\; \cdots\;\; x^{s-1}E_n \right\|}(\varphi(x))=sn\,,$$

де $\varphi(x)=\varphi_2(x)/\varphi_1(x)$. З тієї ж причини $\operatorname{rang}\tilde B_1(\alpha_1)=k$, якщо $\alpha_0\ne\alpha_1$ (тобто α_0 – простий корінь). В обох випадках існує така $(k\times k)$-підматриця $\bar B_1(x)$ матриці $\tilde B_1(x)$, що $\det\bar B_1^{(1)}(\alpha_0)\ne 0$, якщо $\alpha_0=\alpha_1$, і $\det\bar B_1(\alpha_1)\ne 0$, якщо $\alpha_0\ne\alpha_1$. Можемо вважати, що $\bar B_1(x)=B_1(x)$ (у супротивному разі це можна одержати перестановками рядків і відповідними перестановками стовпців матриці (4), не порушуючи її вигляду та наданих уже властивостей). Застосовуючи до матриці (4) скалярно еквівалентні перетворення і зберігаючи при цьому для перетвореної матриці попередні позначення, досягаємо того, що

$$B_1^{(1)}(\alpha_1) = E_k, \quad B_2^{(1)}(\alpha_1) = \ldots = B_s^{(1)}(\alpha_1) = \mathbf{0}, \qquad \text{якщо } \alpha_0 = \alpha_1,$$

і

$$B_1(\alpha_1) = E_k, \quad B_2(\alpha_1) = \ldots = B_s(\alpha_1) = \mathbf{0}, \qquad \text{якщо } \alpha_0 \neq \alpha_1.$$

На підставі теореми 1 і твердження 1, як і на першому етапі, можемо знайти в блоці

$$\tilde{B}_2(x) = \begin{Vmatrix} B_2(x) \\ \vdots \\ B_s(x) \end{Vmatrix}$$

матриці (4) таку $(k \times k)$-підматрицю $\bar{B}_2(x)$, що

$$\det \bar{B}_2^{(2)}(\alpha_2) \neq 0, \qquad \text{якщо } \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2;$$

$$\det \bar{B}_2^{(1)}(\alpha_2) \neq 0, \qquad \text{якщо } \alpha_0 \neq \alpha_1 = \alpha_2;$$

$$\det \bar{B}_2(\alpha_2) \neq 0, \qquad \text{якщо } \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Можемо вважати, що $\bar{B}_2(x) = B_2(x)$. Застосовуючи до матриці (4) скалярно еквівалентні перетворення і не порушуючи її вигляду і наданих уже властивостей блокам $B_i(x)$, $i = 1, \ldots, s$, добиваємося того, що в одержаній матриці (збережемо для неї позначення матриці (4)) виконуються умови:

$$B_2^{(2)}(\alpha_2) = E_k,\ B_1^{(2)}(\alpha_2) = B_3^{(2)}(\alpha_2) = \ldots = B_s^{(2)}(\alpha_2) = \mathbf{0}, \text{ якщо } \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2;$$

$$B_2^{(1)}(\alpha_2) = E_k,\ B_1^{(1)}(\alpha_2) = B_3^{(1)}(\alpha_2) = \ldots = B_s^{(1)}(\alpha_2) = \mathbf{0}, \text{ якщо } \alpha_0 \neq \alpha_1 = \alpha_2;$$

$$B_2(\alpha_2) = E_k, \quad B_1(\alpha_2) = B_3(\alpha_2) = \ldots = B_s(\alpha_2) = \mathbf{0}, \qquad \text{якщо } \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Продовжуючи так і надалі, через s кроків одержимо матрицю вигляду (4), у якій $B_j(\alpha_0) = \mathbf{0}$, $j = 0, 1, \ldots, s$, і

$$B_i^{(r_i)}(\alpha_i) = E_k, \qquad B_m^{(r_i)}(\alpha_i) = \mathbf{0},$$

якщо $\alpha_i = \ldots = \alpha_{i-r_i}$, $\alpha_i \neq \alpha_{i-r_i-1}$, $i = 1, \ldots, s$, $m = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, s$. Оскільки $\deg B_i(x) \leq s$, то насправді $B_i(x) = f_i(x) E_k$. Нарешті, з огляду на те, що $\deg B_0(x) < s$, додаванням деяких кратних останніх $n - 2k$ рядків (з множниками з $\mathbb{C}$) до перших $2k$ рядків та відповідними операціями над стовпцями матриці (4) можемо зробити блок $B_0(x)$ нульовим, не порушуючи при цьому решту її блоків.

Єдиність матриці $F(x)$ вигляду (2) з властивостями (3) очевидна, оскільки кожен із многочленів $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, s$, має степінь, що не перевищує s, і набуває фіксованих значень на всіх $s+1$ коренях многочлена $\varphi_2(x)$. ◊

Означення 1. Многочленну матрицю $F(x)$ вигляду (2) з властивостями (3) назвемо *канонічною* у класі напівскалярно еквівалентних матриць.

Наслідок 1. *Для напівскалярної еквівалентності многочленних матриць, які задовольняють умови теореми* 3, *необхідно та достатньо, щоб збігалися їхні форми Сміта.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність* очевидна.

Достатність випливає з того, що многочлени $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, s$, повністю визначаються останнім інваріантним многочленом $\varphi_2(x)$ вихідної матриці $A(x)$. ◊

Наслідок 2. *Нехай задано набори числових матриць*

$$(A_1, \ldots, A_s), \qquad (D_1, \ldots, D_s), \tag{5}$$

відповідні многочленні матриці яких

$$A(x) = E_n x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s, \qquad D(x) = E_n x^s + D_1 x^{s-1} + \ldots + D_s \tag{5'}$$

задовольняють умови теореми 3. *Для подібності наборів* (5) *необхідно та достатньо, щоб збігалися форми Сміта многочленних матриць* (5′).

Для д о в е д е н н я досить взяти до уваги твердження 2 і наслідок 1. ◊

Встановимо канонічну форму набору числових матриць відносно подібності у випадку, коли відповідна многочленна матриця задовольняє умови теореми 3.

Означення 2. Набір числових матриць $(\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_s)$ назвемо *канонічним* для набору $(A_1, \ldots, A_s)$ у класі подібних, якщо він задовольняє рівність

$$M_{F_*(x)\left\| E \quad xE \quad \cdots \quad x^{s-1}E \right\|}(\Delta(x)) \left\| \begin{matrix} \bar{A}_s \\ \vdots \\ \bar{A}_1 \end{matrix} \right\| = -M_{x^s F_*(x)}(\Delta(x)), \tag{6}$$

де $F(x)$ – канонічна форма многочленної матриці $A(x) = Ex^s + A_1 x^{s-1} + {} + \ldots + A_s$ у класі напівскалярно еквівалентних (у сенсі означення 1), $\Delta(x) = \det A(x)$.

Зауважимо, що при побудові значень матриць на системі коренів многочлена $\Delta(x)$ в обох частинах рівності (6) слід дотримуватися того самого порядку підстановки коренів зазначеного многочлена.

Теорема 4. *Існує одна й тільки одна канонічна форма* $(\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_s)$ *набору числових матриць* $(A_1, \ldots, A_s)$ *у класі подібних, яка визначається рівністю* (6).

Д о в е д е н н я. Оскільки згідно з теоремою 1

$$\operatorname{rang} M_{F_*(x)\left\| E \quad xE \quad \cdots \quad x^{s-1}E \right\|}(\Delta(x)) = sn,$$

то існування та єдність канонічного набору $(\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_s)$ випливають з теореми 2, а подібність його до вихідного набору $(A_1, \ldots, A_s)$ – з твердження 2. ◊

Як ***приклад*** побудуємо канонічну форму $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)$ набору (A_1, A_2, A_3), де

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{matrix} \right\|,$$

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

у класі подібних (у сенсі означення 2). Для цього зведемо відповідну многочленну матрицю $A(x) = E_{10}x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3$ до канонічної форми (в сенсі означення 1), яку запишемо в блочному вигляді

$$F(x) =$$

$$= \begin{Vmatrix} E_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & x^2(x-1)E_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ x(x-1)^2E_2 & \mathbf{0} & x^2(x-1)^2E_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ x^2(-2x+3)E_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & x^2(x-1)^2E_2 & \mathbf{0} \\ x^2(x-1)E_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & x^2(x-1)^2E_2 \end{Vmatrix}.$$

Після цього, розв'язуючи рівняння вигляду (6) відносно невідомих $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2, \bar{A}_3$, знаходимо канонічну форму $(\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)$, де матриці $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ у блочному записі мають такий вигляд:

$$\bar{A}_1 = \begin{Vmatrix} -2E_2 & \mathbf{0} & E_2 & E_2 & E_2 \\ \mathbf{0} & -E_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2E_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -E_2 & E_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -E_2 \end{Vmatrix},$$

$$\bar{A}_2 = \begin{Vmatrix} E_2 & \mathbf{0} & -2E_2 & -E_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix}, \qquad \bar{A}_3 = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Vmatrix}.$$

1. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96,** № 1. – С. 63–74.
2. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Зап. науч. семин. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1977. – **71**. – С. 24–42.
3. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, № 2. – С. 3–60.
4. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
5. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
6. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Об одной задаче И. М. Гельфанда // Функц. анализ и его прилож. – 1973. – **7**, № 4. – С. 54–69.
7. *Belitskii G. R.* Normal forms in matrix spaces // Integr. Equat. and Oper. Theory. – 2000. – **38**, No. 3. – P. 251–283.
8. *Friedland S*. Simultaneous similarity of matrices // Adv. Math. – 1983. – **50.** – P. 189–265.
9. *Sergeichuk V. V*. Canonical matrices for linear matrix problems // Linear Algebra and Appl. – 2000. – **317**. – P. 53–102.

ЗАМЕЧАНИЕ К ПОДОБИЮ НАБОРОВ МАТРИЦ

Для выделенного класса многочленных матриц указана каноническая форма относительно полускалярно эквивалентных преобразований. Это дало возможность установить каноническую форму относительно одновременного преобразования подобия для соответствующего класса наборов матриц над полем.

NOTE ON SIMILARITY OF COLLECTIONS OF MATRICES

The canonical form is given for a certain class of polynomial matrices relatively to the semiscalar-equivalent transformations. It makes it possible to define the canonical form relatively to a simultaneous similarity transformation for the corresponding class of set of matrices over the field.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
16.04.03