УДК 517.95

І. Є. Баранська

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови існування і єдиності розв'язку оберненої задачі визначення невідомого старшого коефіцієнта, що залежить від часу, в параболічному рівнянні в області з вільною межею.

Задачі з вільною межею появляються при дослідженні таких фізичних явищ, як танення льоду, плавлення твердих тіл. Прикладом задачі з вільною межею є задача Стефана [5]. Особливістю цих задач є те, що межа області невідома. Для її відшукання задають деякі додаткові умови. Таку задачу можна розглядати як обернену і до її дослідження застосувати методику дослідження обернених задач. У роботі [4] розглянуто обернені задачі для рівняння теплопровідності в області з відомою рухомою межею. Можна поєднати в одній задачі визначення невідомої межі та знаходження невідомого коефіцієнта параболічного рівняння і досліджувати її як обернену задачу з двома невідомими параметрами. Умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі з вільною межею для рівняння теплопровідності було встановлено в [1]. У праці [7] розглянуто обернену задачу визначення невідомої межі та ядра, залежного від часу, для параболічного рівняння з інтегральним доданком. У пропонованій роботі встановлено умови існування і єдиності розв'язку оберненої задачі визначення невідомої межі та невідомого старшого коефіцієнта рівняння параболічного типу. На відміну від задачі Стефана, умова на невідомій межі замінена інтегральною умовою.

1. Формулювання задачі. Розглянемо обернену задачу визначення невідомого коефіцієнта $a(t)$ рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

в області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t),\ 0<t<T<\infty\}$ з невідомою межею $x=h(t)$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)\,dx = \mu_4(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{5}$$

За допомогою заміни $y = \dfrac{x}{h(t)}$, $t = t$ задачу (1)–(5) зведемо до оберненої задачі стосовно невідомих $a(t), h(t), v(y,t) = u(yh(t),t)$:

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)} v_y + {}$$
$$+ c(yh(t),t)v + f(yh(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{6}$$

де $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1,\ 0 < t < T\}$,

$$v(y,0) = \varphi(h(0)y), \qquad y \in [0,1], \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(1,t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{8}$$

$$a(t)v_y(0,t) = \mu_3(t)h(t), \qquad t \in [0,T], \tag{9}$$

$$h(t)\int_0^1 v(y,t)\,dy = \mu_4(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{10}$$

Трійку функцій $(a(t),\ h(t),\ v(y,t)) \in C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, $h(t) > 0$, $a(t) > 0$, $t \in [0,T]$, що задовольняють умови (6)–(10), будемо називати розв'язком задачі (6)–(10).

2. Існування розв'язку.

Теорема 1. *При виконанні умов*

(***i***) $\mu_i \in C^1[0,T]$, $\quad \mu_i(t) > 0$, $\quad i = \overline{1,4}$, $\quad t \in [0,T]$;

(***ii***) $\varphi \in C^2[0,h_0]$, $\quad \varphi(x) > 0$, $\quad \varphi'(x) > 0$, $\quad x \in [0,h_0]$,

де $h_0 = h(0) > 0$ *є розв'язком рівняння* $\int_0^{h(0)} \varphi(x)\,dx = \mu_4(0)$;

(***iii***) $b,\ c,\ f \in C^{1,0}([0,H_1] \times [0,T])$, $f(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in [0,H_1] \times [0,T]$,

де $H_1 = \max_{[0,T]} \mu_4(t) \left\{ \min\left(\min_{[0,h_0]} \varphi(x),\ \min_{[0,T]} \mu_1(t),\ \min_{[0,T]} \mu_2(t) \right) \right\}^{-1}$;

(***iiii***) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\quad \varphi(h(0)) = \mu_2(0)$,

можна вказати таке число t_0, $0 < t_0 \le T$, *що розв'язок задачі* (6)–(10) *існує при* $0 \le y \le 1$, $0 \le t \le t_0$.

Д о в е д е н н я. З умов (2), (5) і припущень теореми робимо висновок про існування єдиного значення $h_0 = h(0) > 0$, яке задовольняє рівняння $\int_0^{h(0)} \varphi(x)\,dx = \mu_4(0)$. За принципом максимуму для розв'язку задачі (6)–(8) у випадку довільних неперервної на $[0,T]$ функції $a(t) > 0$ та неперервно диференційовної на $[0,T]$ функції $h(t) > 0$ справджується оцінка

$$v(y,t) \ge M_0 > 0, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_T, \tag{11}$$

де $M_0 = \min\left\{ \min_{[0,h_0]} \varphi(x),\ \min_{[0,T]} \mu_1(t),\ \min_{[0,T]} \mu_2(t) \right\}$. Подамо (10) у вигляді рівняння

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y,t)\,dy}, \qquad t \in [0,T]. \tag{12}$$

Тоді з урахуванням (11) справджується оцінка

$$0 < h(t) \le H_1 < \infty, \qquad t \in [0,T], \tag{13}$$

де $H_1 = \dfrac{1}{M_0} \max_{[0,T]} \mu_4(t)$.

Пряма задача (6)–(8) еквівалентна рівнянню

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\xi,\tau) \left[\frac{b(\xi h(\tau),\tau) + \xi h'(\tau)}{h(\tau)} v_\xi(\xi,\tau) + \right.$$

$$\left. + c(\xi h(\tau),\tau) v(\xi,\tau) \right] d\xi\,d\tau, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_T, \tag{14}$$

де

$$v_0(y,t)=\int_0^1 G_1(y,t,\xi,0)\varphi(\xi h_0)\,d\xi+\int_0^t G_{1\xi}(y,t,0,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_0^t G_{1\xi}(y,t,1,\tau)\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_2(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\xi,\tau)f(\xi h(\tau),\tau)\,d\xi\,d\tau,\quad (y,t)\in\bar{Q}_T, \tag{15}$$

$$G_k(y,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(y-\xi+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(y+\xi+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),\quad k=1,2,\quad \theta(t)=\int_0^t\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\,d\tau, \tag{16}$$

$G_k(y,t,\xi,\tau)$ – функція Ґріна першої $(k=1)$ і другої $(k=2)$ крайових задач для рівняння

$$v_t=\frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy}+f(y,t). \tag{17}$$

Продиференціюємо рівняння (14) по y:

$$v_y(y,t)=v_{0y}(y,t)+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau)\left[\frac{b(\xi h(\tau),\tau)+\xi h'(\tau)}{h(\tau)}v_\xi(\xi,\tau)+\right.$$

$$\left.+c(\xi h(\tau),\tau)v(\xi,\tau)\right]d\xi\,d\tau,\qquad (y,t)\in\bar{Q}_T. \tag{18}$$

Для знаходження v_{0y} використаємо (15) і співвідношення

$$G_{1y}(y,t,\xi,\tau)=-G_{2\xi}(y,t,\xi,\tau),\qquad \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}G_{2\xi\xi}(y,t,\xi,\tau)=-G_{2\tau}(y,t,\xi,\tau).$$

Інтегруючи частинами, знаходимо

$$v_{0y}(y,t)=h_0\int_0^1 G_2(y,t,\xi,0)\varphi'(h_0\xi)\,d\xi-\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau)f(\xi h(\tau),\tau)\,d\xi\,d\tau,\qquad (y,t)\in\bar{Q}_T. \tag{19}$$

З умов теореми та рівності $\int_0^1 G_2(y,t,\xi,0)\,d\xi=1$, яку легко перевірити, випливає оцінка першого доданка рівності (19):

$$h_0\int_0^1 G_2(y,t,\xi,0)\varphi'(h_0\xi)\,d\xi\ge h_0\min_{[0,1]}\varphi'(h_0y)\equiv M_1>0,\quad (y,t)\in\bar{Q}_T. \tag{20}$$

Решта доданків у (18) і (19) при $t=0$ дорівнюють нулеві. Тому можна зробити висновок про існування деякого числа t_0, $0<t_0\le T$, такого, що при $(y,t)\in\bar{Q}_{t_0}\equiv\{[0,1]\times[0,t_0]\}$ справджується нерівність

$$\left| -\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)\,d\tau + \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)\,d\tau + \right.$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau) f(\xi h(\tau),\tau)\,d\xi\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau)\left[\frac{b(\xi h(\tau),\tau)+\xi h'(\tau)}{h(\tau)} v_\xi(\xi,\tau) + \right.$$

$$\left.\left. + c(\xi h(\tau),\tau) v(\xi,\tau)\right] d\xi\,d\tau \right| \le \frac{1}{2} M_1, \qquad (y,t)\in \bar{Q}_{t_0}. \tag{21}$$

Тоді зі співвідношень (18) і (19), враховуючи (20), (21), одержимо

$$v_y(y,t) \ge \frac{1}{2} M_1 > 0, \qquad (y,t)\in \bar{Q}_{t_0}, \tag{22}$$

що дає можливість записати (9) у вигляді

$$a(t) = \frac{h(t)\,\mu_3(t)}{w(0,t)}, \qquad t\in[0,t_0], \tag{23}$$

де позначено $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. Продиференціюємо рівність (10) по t, використовуючи (6) і позначаючи $p(t) = h'(t)$:

$$p(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\Bigg[\mu_4'(t) + \mu_3(t) - b(h(t),t)\mu_2(t) + b(0,t)\mu_1(t) -$$

$$- h(t)\int_0^1 f(yh(t),t)\,dy - h(t)\int_0^1 \Big(c(yh(t),t) -$$

$$\left. - b_\eta(\eta,t)\Big|_{\eta=yh(t)}\Big) v(y,t)\,dy - \frac{a(t)}{h(t)} w(1,t)\right], \qquad t\in[0,t_0]. \tag{24}$$

Рівняння (12) також будемо розглядати на проміжку $[0,t_0]$:

$$h(t) = \frac{\mu_4(t)}{\int_0^1 v(y,t)\,dy}, \qquad t\in[0,t_0]. \tag{25}$$

Подамо рівняння (14) і (18) у вигляді

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t\int_0^1 G_1(y,t,\xi,\tau)\left[\frac{b(\xi h(\tau),\tau)+\xi p(\tau)}{h(\tau)} w(\xi,\tau) + \right.$$

$$\left. + c(\xi h(\tau),\tau)\, v(\xi,\tau)\right] d\xi\,d\tau, \qquad (y,t)\in\bar{Q}_{t_0}, \tag{26}$$

$$w(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau)\left[\frac{b(\xi h(\tau),\tau)+\xi p(\tau)}{h(\tau)} w(\xi,\tau) + \right.$$

$$\left. + c(\xi h(\tau),\tau) v(\xi,\tau)\right] d\xi\,d\tau, \qquad (y,t)\in\bar{Q}_{t_0}. \tag{27}$$

Отже, задачу (6)–(10) зведено до системи рівнянь (23)–(27), тобто, якщо функції $(a(t), h(t), v(y,t)) \in C[0,t_0]\times C^1[0,t_0]\times C^{2,1}(\bar{Q}_{t_0})$, $h(t)>0$, $a(t)>0$, $t\in$ $\in[0,t_0]$, є розв'язком задачі (6)–(10), то функції $(a(t), h(t), p(t)\equiv h'(t), v(y,t)$, $w(y,t)\equiv v_y(y,t)) \in (C[0,t_0])^3 \times (C(\bar{Q}_{t_0}))^2$, $h(t)>0$, $a(t)>0$, $t\in[0,t_0]$, є розв'язком системи рівнянь (23)–(27). Правильним є й обернене твердження.

Нехай $(a(t), h(t), p(t), v(y,t), w(y,t)) \in (C[0,t_0])^3 \times (C(\bar{Q}_{t_0}))^2$, $h(t) > 0$, $a(t) > 0$, $t \in [0,t_0]$, є розв'язком системи рівнянь (23)–(27). Покажемо, що функції $(a(t), h(t), v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)–(10), тобто, що вони належать до класу $C[0,t_0] \times C^1[0,t_0] \times C^{2,1}(\bar{Q}_{t_0})$ і задовольняють умови (6)–(10).

Функція $v_0(y,t)$ є розв'язком задачі (17), (7), (8), тоді $v_0(y,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_{t_0})$. Продиференціювавши (26) по y, отримаємо, що $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. На підставі (26) робимо висновок, що $v(y,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_{t_0})$ є розв'язком рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yp(t)}{h(t)} v_y + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t),$$

$$(y,t) \in \bar{Q}_{t_0}, \tag{28}$$

і задовольняє умови (7), (8). З того, що $v(y,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_{t_0})$ і $\mu_4(t) \in C^1[0,T]$, з (25) випливає, що $h(t) \in C^1[0,T]$. Продиференціюємо рівняння (25) по t:

$$h'(t)\int_0^1 v(y,t)\,dy + h(t)\int_0^1 v_t(y,t)\,dy = \mu'_4(t).$$

Оскільки $v(y,t)$ є розв'язком рівняння (28), то отримаємо

$$h'(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\Bigg[\mu'_4(t) + \mu_3(t) - b(h(t),t)\mu_2(t) + b(0,t)\mu_1(t) -$$

$$- h(t)\int_0^1 f(yh(t),t)\,dy - h(t)\int_0^1 \Big(c(yh(t),t) -$$

$$- b_\eta(\eta,t)\Big|_{\eta=yh(t)}\Big) v(y,t)\,dy - \frac{a(t)}{h(t)} v_y(1,t) + \frac{\mu_4(t)}{h(t)}(p(t) - h'(t))\Bigg].$$

Віднімемо від цієї рівності рівняння (24):

$$p(t) - h'(t) = \frac{\mu_4(t)}{\mu_2(t)h(t)}(p(t) - h'(t)).$$

При виконанні умови

$$\frac{\mu_4(t)}{\mu_2(t)h(t)} - 1 \neq 0, \qquad t \in [0,t_0], \tag{29}$$

отримуємо $p(t) \equiv h'(t)$. Виконання умови (29) випливає з того, що

$$\mu_2(t) - \frac{\mu_4(t)}{h(t)} = v(1,t) - \int_0^1 v(y,t)\,dy = \int_0^1 y v_y(y,t)\,dy.$$

З оцінки (22) встановлюємо

$$\int_0^1 y v_y(y,t)\,dy \geq \frac{1}{2} M_1 \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{4} M_1 > 0.$$

Тоді функція $v(y,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_{t_0})$ задовольняє рівняння (6) та умови (7), (8). Виконання умов (9), (10) випливає з (23), (25) і раніше встановленої рівності $w(y,t) \equiv v_y(y,t)$. Отже, задача (6)–(10) еквівалентна системі рівнянь (23)–(27).

Для доведення існування розв'язку системи рівнянь (23)–(27) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора [2]. За принципом максимуму для розв'язку задачі (6)–(8) при довільних $(a(t),\ h(t)) \in C[0,T] \times C^1[0,T],\ a(t) > 0,\ 0 < h(t) \le H_1$, справджується оцінка

$$v(y,t) \le M_2 < \infty, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_T, \tag{30}$$

де стала $M_2 > 0$ визначається відомими величинами. Тоді з (25) отримаємо

$$h(t) \ge H_0 > 0, \qquad t \in [0,T], \tag{31}$$

де $H_0 = \dfrac{1}{M_2} \min\limits_{[0,T]} \mu_4(t)$.

Враховуючи оцінки (13), (22), з (23) знаходимо оцінку $a(t)$ зверху:

$$a(t) \le A_1 < \infty, \qquad t \in [0,t_0]. \tag{32}$$

Позначимо $W(t) = \max\limits_{y\in[0,1]} |w(y,t)|$ і оцінимо $p(t)$ згідно з (24), враховуючи (30):

$$|p(t)| \le C_1 + C_2 \frac{a(t)}{h(t)} W(t), \qquad t \in [0,t_0]. \tag{33}$$

Використовуючи нерівності [6]

$$G_2(y,t,\xi,\tau) \le C_3 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right),$$

$$\int_0^1 |G_{1y}(y,t,\xi,\tau)|\, d\xi \le C_4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right), \tag{34}$$

з рівняння (27) отримуємо інтегральну нерівність

$$W(t) \le C_5 + C_6 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_7 \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right) \frac{1}{h(\tau)} W(\tau) d\tau +$$

$$+ C_8 \int_0^t \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\right) \frac{|p(\tau)|}{h(\tau)} W(\tau)\, d\tau. \tag{35}$$

З оцінок (31) і (32) випливає

$$1 + \frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} = \frac{1 + \sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \le \frac{C_9}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Тоді з урахуванням (33) нерівність (35) набуває вигляду

$$W(t) \le C_5 + C_{10} \int_0^t \left(1 + \frac{1}{h(\tau)} W(\tau) + \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} W^2(\tau)\right) \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{36}$$

Перетворимо цю нерівність аналогічно до наведеного в [1]. З рівняння (23) маємо $a(t) \ge \dfrac{C_{11}}{W(t)}$. Враховуючи це, нерівність (36) подамо у вигляді

$$W_1(t) \le C_{12} + C_{13} \int_0^t \frac{a(\tau) W_1^2(\tau)}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\, d\tau, \tag{37}$$

де $W_1(t) = W(t) + 1$. Піднесемо обидві частини нерівності (37) до квадрату, застосовуючи при цьому нерівність Коші:

$$W_1^2(t) \le C_{14} + C_{15} \left(\int_0^t \frac{a(\tau) W_1^2(\tau)}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\, d\tau \right)^2.$$

Звідси знаходимо

$$\int_0^t \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau \le$$

$$\le C_{16} + C_{17}\int_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\left(\int_0^\tau \frac{a(\sigma)W_1^2(\sigma)}{h^2(\sigma)\sqrt{\theta(\tau)-\theta(\sigma)}}\,d\sigma\right)^2 d\tau .$$

Скориставшись нерівністю Коші – Буняковського та рівністю

$$\int_\sigma^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)\sqrt{(\theta(t)-\theta(\tau))(\theta(\tau)-\theta(\sigma))}}\,d\tau = \pi ,$$

отримаємо

$$\int_0^t \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau \le C_{16} + C_{18}\int_0^t \frac{a(\sigma)W_1^4(\sigma)}{h^2(\sigma)}\,d\sigma .$$

З урахуванням (31), (32)

$$\int_0^t \frac{a(\tau)W_1^2(\tau)}{h^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\,d\tau \le C_{16} + C_{19}\int_0^t W_1^4(\sigma)\,d\sigma .$$

Тоді нерівність (37) набуває вигляду

$$W_1(t) \le C_{20} + C_{21}\int_0^t W_1^4(\sigma)\,d\sigma . \qquad (38)$$

Позначивши

$$r(t) = C_{20} + C_{21}\int_0^t W_1^4(\sigma)\,d\sigma ,$$

з (38) отримаємо, що

$$r'(t) \le C_{21} r^4(t).$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи це співвідношення, знаходимо оцінку

$$r(t) \le \frac{C_{20}}{\sqrt[3]{1-3C_{20}^3 C_{21} t}} . \qquad (39)$$

Якщо на число t_0, $0 < t_0 \le T$, накласти умову

$$1 - 3C_{20}^3 C_{21} t_0 > 0 , \qquad (40)$$

то з (38) і (39) отримаємо оцінки

$$r(t) \le C_{22} ,$$

$$|w(y,t)| \le W(t) \le M_3 < \infty, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_{t_0} . \qquad (41)$$

З рівняння (23) і нерівності (33), використовуючи (41), отримуємо оцінки

$$|p(t)| \le M_4 < \infty, \qquad t \in [0, t_0] , \qquad (42)$$

$$a(t) \ge A_0 > 0, \qquad t \in [0, t_0] . \qquad (43)$$

Отже, встановлено оцінки розв'язків системи рівнянь (23)–(27). Повернемося до нерівності (21). Врахувавши співвідношення (13), (30)–(32), (34), (41)–(43), одержимо

$$\Bigg| -\int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)\,d\tau + \int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\mu_2'(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau) f(\xi h(\tau),\tau)\,d\xi\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\xi,\tau)\left[\frac{b(\xi h(\tau),\tau)+\xi h'(\tau)}{h(\tau)}v_\xi(\xi,\tau)+c(\xi h(\tau),\tau)v(\xi,\tau)\right]d\xi\,d\tau\Bigg| \le$$

$$\le\left[C_{23}\left(\max_{[0,T]}|\mu_1'(t)|+\max_{[0,T]}|\mu_2'(t)|\right)+C_{24}\left(\max_{[0,H_1]\times[0,T]}|b(x,t)|\frac{M_3}{H_0}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\max_{[0,H_1]\times[0,T]}|c(x,t)|M_2+\max_{[0,H_1]\times[0,T]}f(x,t)+\frac{M_3M_4}{H_0}\right)\right]\left(t+\frac{2H_1\sqrt{t}}{\sqrt{A_0}}\right).$$

Звідси легко встановити обмеження на число t_0, $0<t_0\le T$, при якому виконується нерівність (21).

Подамо систему рівнянь (23)–(27) у вигляді рівняння $\omega=\mathcal{P}\omega$, де $\omega=(a(t),\,h(t),\,p(t),\,v(y,t),\,w(y,t))$, а оператор $\mathcal{P}$ визначається правими частинами рівнянь (23)–(27). Позначимо $\mathcal{N}=\{(a(t),\,h(t),\,p(t),\,v(y,t),\,w(y,t))\in(C[0,t_0])^3\times(C(\bar{Q}_{t_0}))^2:A_0\le a(t)\le A_1,\ H_0\le h(t)\le H_1,\ |p(t)|\le M_4,\ M_0\le v(y,t)\le\le M_2,\ \frac{1}{2}M_1\le w(y,t)\le M_3\}$. З оцінок (13), (30)–(32), (41)–(43) випливає, що оператор $\mathcal{P}$ відображає множину $\mathcal{N}$ в себе. Те, що оператор $\mathcal{P}$ є цілком неперервним, доведено в [6]. Отже, за теоремою Шаудера існує розв'язок системи рівнянь (23)–(27), а, отже, й розв'язок задачі (6)–(10). Теорему доведено. ◊

3. Єдиність розв'язку. Встановимо умови єдиності розв'язку задачі (6)–(10).

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються умови*:

(***i***) $b,\ c,\ f\in C^{1,0}([0,+\infty)\times[0,T])$;

(***ii***) $\varphi\in C[0,+\infty),\quad \varphi(y)>0,\quad y\in[0,+\infty),\quad \mu_i(t)>0,\ i=\overline{2,4},\quad t\in[0,T]$.

Тоді розв'язок задачі (6)–(10) *єдиний.*

Д о в е д е н н я. Нехай $(a_i(t),\ h_i(t),\ v_i(y,t))$, $i=1,2$, – два розв'язки задачі (6)–(10). Позначимо

$$\frac{a_i(t)}{h_i^2(t)}=\tilde{a}_i(t),\qquad \frac{h_i'(t)}{h_i(t)}=q_i(t),\quad i=1,2.$$

Різниці

$$a(t)=\tilde{a}_1(t)-\tilde{a}_2(t),\qquad q(t)=q_1(t)-q_2(t),\qquad v(y,t)=v_1(y,t)-v_2(y,t)$$

задовольняють умови

$$v_t=\tilde{a}_1(t)\,v_{yy}+y\,q_1(t)\,v_y+a(t)\,v_{2yy}+y\,q(t)\,v_{2y}+$$
$$+\frac{b(y\,h_1(t),t)}{h_1(t)}v_{1y}-\frac{b(y\,h_2(t),t)}{h_2(t)}v_{2y}+c(yh_1(t),t)\,v_1-$$
$$-c(y\,h_2(t),t)\,v_2+f(y\,h_1(t),t)-f(y\,h_2(t),t),\quad (y,t)\in Q_T, \tag{44}$$

$$v(y,0)=0,\qquad y\in[0,1], \tag{45}$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0,\qquad t\in[0,T], \tag{46}$$

$$\tilde{a}_1(t)\,v_y(0,t)+a(t)\,v_{2y}(0,t)=\mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right),\qquad t\in[0,T], \tag{47}$$

$$\int_0^1 v(y,t)\,dy=\mu_4(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right),\qquad t\in[0,T]. \tag{48}$$

Виразимо $h_i(t)$ через $q_i(t)$:

$$h_i(t) = h_i(0)\exp\left(\int_0^t q_i(\tau)\,d\tau\right), \qquad i = 1,2. \tag{49}$$

З умов теореми $h_1(0) = h_2(0) = h_0$. Використовуючи рівність

$$e^x - e^y = (x-y)\int_0^1 e^{y+\tau(x-y)}\,d\tau,$$

отримаємо

$$\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)} = -\frac{1}{h_0}\int_0^t q(\tau)\,d\tau\int_0^1 \exp\left(-\int_0^t \big(q_2(\tau)+\sigma q(\tau)\big)\,d\tau\right)d\sigma. \tag{50}$$

За допомогою функції Ґріна $G_1^*(y,t,\xi,\tau)$ розв'язок задачі (44)–(46) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} v(y,t) = \int_0^t\int_0^1 G_1^*(y,t,\xi,\tau)\Big[&a(\tau)\,v_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + \xi\,q(\tau)\,v_{2\xi}(\xi,\tau) + \\ &+ b(\xi\,h_1(\tau),\tau)v_{2\xi}(\xi,\tau)\left(\frac{1}{h_1(\tau)} - \frac{1}{h_2(\tau)}\right) + \\ &+ \frac{1}{h_2(\tau)}\,v_{2\xi}(\xi,\tau)\big(b(\xi\,h_1(\tau),\tau) - b(\xi\,h_2(\tau),\tau)\big) + \big(c(\xi\,h_1(\tau),\tau) - \\ &- c(\xi\,h_2(\tau),\tau)\big)\,v_2(\xi,\tau) + f(\xi\,h_1(\tau),\tau) - f(\xi\,h_2(\tau),\tau) + \\ &+ \frac{b(\xi\,h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}\,v_\xi(\xi,\tau) + c(\xi\,h_1(\tau),\tau)v(\xi,\tau)\Big]d\xi\,d\tau. \end{aligned} \tag{51}$$

З того, що $\mu_3(t) > 0$, з (9) випливає $v_{2y}(0,t) \ne 0$. Тоді, враховуючи (50), із (47) одержимо

$$\begin{aligned} a(t) = \frac{1}{v_{2y}(0,t)}\Bigg(&-\frac{\mu_3(t)}{h_0}\int_0^t q(\tau)\,d\tau\int_0^1 \exp\left(-\int_0^t (q_2(\tau)+\sigma q(\tau))\,d\tau\right)d\sigma - \\ &- \tilde{a}_1(t)\,w(0,t)\Bigg), \qquad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{52}$$

де $w(y,t) = v_y(y,t)$ визначається згідно з (51) за формулою

$$\begin{aligned} w(y,t) = \int_0^t\int_0^1 G_{1y}^*(y,t,\xi,\tau)\Big[&a(\tau)\,v_{2\xi\xi}(\xi,\tau) + \xi\,q(\tau)\,v_{2\xi}(\xi,\tau) + \\ &+ b(\xi\,h_1(\tau),\tau)v_{2\xi}(\xi,\tau)\left(\frac{1}{h_1(\tau)} - \frac{1}{h_2(\tau)}\right) + \frac{1}{h_2(\tau)}\,v_{2\xi}(\xi,\tau)\big(b(\xi\,h_1(\tau),\tau) - \\ &- b(\xi\,h_2(\tau),\tau)\big) + (c(\xi\,h_1(\tau),\tau) - c(\xi\,h_2(\tau),\tau))\,v_2(\xi,\tau) + \\ &+ f(\xi\,h_1(\tau),\tau) - f(\xi\,h_2(\tau),\tau) + \frac{b(\xi\,h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}\,w(\xi,\tau) + \\ &+ c(\xi\,h_1(\tau),\tau)v(\xi,\tau)\Big]d\xi\,d\tau. \end{aligned} \tag{53}$$

Внаслідок того, що $(a_i(t), h_i(t), v_i(y,t))$, $i = 1,2$, є розв'язками задачі (6)–(10), справджуються рівності, аналогічні до (24):

$$q_i(t) = \frac{1}{h_i(t)\mu_2(t)}\Bigg[\mu_4'(t) + \mu_3(t) - b(h_i(t),t)\mu_2(t) + b(0,t)\mu_1(t) -$$

$$- h_i(t)\int_0^1 f(yh_i(t),t)\,dy - h_i(t)\int_0^1\Big(c(yh_i(t),t) -$$

$$- b_\eta(\eta,t)\Big|_{\eta=yh_i(t)}\Big)v_i(y,t)\,dy - \frac{a_i(t)}{h_i(t)}w_i(1,t)\Bigg], \qquad t\in[0,T],$$

де $w_i = v_{iy}$. Віднімаючи їх одну від другої, знаходимо

$$q(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\Bigg(-(\mu_4'(t)+\mu_3(t))\frac{1}{h_0}\int_0^t q(\tau)\,d\tau\int_0^1 \exp\Big(-\int_0^t (q_2(\tau)+\sigma q(\tau))\,d\tau\Big)d\sigma -$$

$$-\int_0^1\Big[c(y\,h_1(t),t)v(y,t) + \big(c(y\,h_1(t),t) - c(y\,h_2(t),t)\big)v_2(y,t) +$$

$$+ b(y\,h_1(t),t)v_{2y}(y,t)\Big(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\Big) + \frac{1}{h_2(t)}v_{2y}(y,t)\big(b(y\,h_1(t),t) -$$

$$- b(y\,h_2(t),t)\big) + \frac{b(y\,h_1(t),t)}{h_1(t)}v_y(y,t) + f(y\,h_1(t),t) -$$

$$- f(y\,h_2(t),t)\Big]dy - \tilde a_1(t)\,w_1(1,t) + \tilde a_2(t)\,w_2(1,t)\Bigg). \tag{54}$$

Умови теореми забезпечують виконання перетворень

$$f(y\,h_1(t),t) - f(y\,h_2(t),t) =$$

$$= y(h_1(t)-h_2(t))\int_0^1 f_x\big(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t\big)\,d\sigma,$$

$$b(y\,h_1(t),t) - b(y\,h_2(t),t) =$$

$$= y(h_1(t)-h_2(t))\int_0^1 b_x\big(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t\big)\,d\sigma,$$

$$c(y\,h_1(t),t) - c(y\,h_2(t),t) =$$

$$= y(h_1(t)-h_2(t))\int_0^1 c_x\big(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t\big)\,d\sigma,$$

$$h_1(t) - h_2(t) = h_0\int_0^t q(\tau)\,d\tau\int_0^1 \exp\Big(\int_0^t (q_2(\tau)+\sigma q(\tau))\,d\tau\Big)d\sigma,$$

$$\tilde a_1(t)\,w_1(1,t) - \tilde a_2(t)\,w_2(1,t) = \tilde a_1(t)\,w(1,t) + a(t)\,w_2(1,t). \tag{55}$$

Підставляючи (50) і (55) у (51)–(54), одержимо однорідну систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду (51)–(54) відносно $a(t)$, $q(t)$, $v(y,t)$, $w(y,t)$. З єдиності розв'язку таких систем випливає $a(t)\equiv 0$, $q(t)\equiv 0$, $v(y,t)\equiv 0$, $w(y,t)\equiv 0$, $y\in[0,1]$, $t\in[0,T]$. Отже, теорему доведено. ◊

1. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності. // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
4. *Малышев И. Г.* Обратные задачи для уравнения теплопроводности в области с подвижной границей // Укр. мат. журн. – 1975. – **27**, № 5. – С. 687–691.
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
6. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / Math. Studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – Vol. 10. – 238 p.
7. *Lorenzi L.* An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2001. – **9**, No. 6. – P. 1–27.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи определения неизвестного старшего коэффициента, зависящего от времени, в параболическом уравнении в области со свободной границей.

INVERSE PROBLEM FOR EQUATION OF PARABOLIC TYPE IN DOMAIN WITH FREE BOUNDARY

We establish the conditions for existence and uniqueness of solution to the inverse problem for a parabolic equation with the unknown time-dependent leading coefficient in the domain with free boundary.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
02.03.04