УДК 519.642

О. Б. Герасимчук, О. М. Рибицька

НОРМАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО РОДУ ЗІ СЛАБКОЮ ОСОБЛИВІСТЮ

На засадах мероморфного стосовно параметра регуляризації зображення розв'язку нормалізованого інтегрального рівняння типу Фредгольма другого роду проведено регуляризацію оберненого оператора Мура – Пенроуза зі слабкою особливістю та особливістю типу ньютонівського потенціалу, заданого на многовидах із краєм.

У задачах математичної фізики (як і в аналізі взагалі) некоректні задачі відіграють досить важливу роль. Одна з найпростіших некоректних задач – знаходження розв'язку рівняння

$$Tu = f ,$$

у якому T – цілком неперервний оператор, що діє із одного гільбертового простору в інший. Зокрема, таким рівнянням є інтегральне рівняння Фредгольма першого роду.

До некоректних задач відносять також й інтегральні рівняння першого роду типу ньютонівського потенціалу, заданого на многовидах із краєм. Вони знаходять широке застосування у зв'язку з нагальним розвитком методу граничних інтегральних рівнянь для розв'язання крайових задач. Цей метод має перевагу пониження на одиницю розміру вихідної крайової задачі. Зокрема, тривимірні контактні задачі теорії пружності, тривимірні задачі теплопровідності для безмежних тіл із плоскими тріщинами, нагрітими через їх поверхні (див. бібліографію у [17]), зводяться до розв'язання інтегральних рівнянь вигляду

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{u(\xi)}{|x-\xi|}\, d\xi = f(x) , \tag{1}$$

де Ω – плоска область, обмежена гладким контуром L; $f(x)$ – задана функція; $u(\xi)$ – невідома функція, яку потрібно визначити.

З огляду на довільність області Ω задача розв'язання рівняння (1) є досить складною, оскільки вимагає врахування контуру області Ω. Для часткових випадків цю задачу розв'язують методами теорії аналітичних функцій. Шляхом відображення і використання методів функціонального аналізу досліджено питання розв'язності рівнянь вигляду (1) для довільних областей Ω, а також вказано алгоритми побудови наближеного розв'язку таких рівнянь (див. роботу [17]).

У пропонованій роботі досліджується цілком інший підхід. Враховуючи те, що резольвента довільного цілком неперервного (компактного) оператора є мероморфною функцією від λ [3], проведено регуляризацію оберненого оператора Мура – Пенроуза для інтегрального рівняння першого роду зі слабкою особливістю. Цей метод принципово відрізняється від методу Тихонова [14]. Регуляризація некоректно поставлених задач за Тихоновим змінює оператор, тобто проводиться його збурення, однак сам алгоритм побудови наближеного розв'язку задачі не перетворюється в регулярний. Більше того, тихонівська регуляризація в нерозчленованому вигляді містить два цілком різні поняття: точність та стійкість, і відбувається підміна одного з цих понять іншим [10].

Новий метод регуляризації, який у роботі названо «зрізано-мероморфним розвиненням», позбавлений вказаних вад. Він нагадує ітераційний метод регуляризації [2] з тією методологічною різницею, що в ітераційному методі регуляризація здійснюється за рахунок вмілого вибору кількості кроків ітерації, у зрізано-мероморфному розвиненні регуляризація відбувається за рахунок вдалого підбору апроксимуючої послідовності раціональних функцій [8, 9,13].

1. Постановка задачі та основні обмеження. Нехай Ω − обмежена вимірна множина m-вимірного евклідового простору; x і ξ − її точки, $r = |x - \xi|$ − віддаль між цими точками; $A(x, \xi)$ − функція, задана та обмежена для $(x, \xi) \subset \Omega \times \Omega$:

$$|A(x, \xi)| \le C = \mathrm{const}\,. \tag{2}$$

Функцію точок x і ξ

$$\mathcal{K}(x, \xi) = \frac{A(x, \xi)}{r^{\alpha}}, \qquad \alpha = \mathrm{const}, \qquad 0 \le \alpha < m\,,$$

називають *ядром із слабкою особливістю*, а інтегральний оператор K, визначений формулою

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = \int_{\Omega} \frac{A(x, \xi)}{r^{\alpha}} u(\xi)\, d\xi\,,$$

називають *інтегральним оператором зі слабкою особливістю*.

Мають місце наступні твердження [6].

1°. Інтегральний оператор зі слабкою особливістю визначений на всьому просторі $L_2(\Omega)$ і обмежений у ньому. Норма цього оператора не перевищує величини

$$\frac{C|S_1|H^{m-\alpha}}{m - \alpha}\,,$$

де C − стала з нерівності (2); H − верхня межа віддалей між точками (діаметр) множини Ω,

$$|S_1| = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,.$$

2°. Оператор зі слабкою особливістю цілком неперервний у просторі $L_2(\Omega)$.

Аналогічні особливості мають також оператори зі слабкою особливістю у просторі неперервних функцій.

Перш за все, розглянемо рівняння другого роду

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} \frac{A(x, \xi)}{r^{\alpha}} u(\xi)\, d\xi = f(x)\,, \tag{3}$$

у якому Ω − скінченна область m-вимірного евклідового простору або обмежена m-вимірна поверхня в $(m+1)$-вимірному евклідовому просторі.

При застосуванні теорії інтегральних рівнянь цікавим є випадок неперервності розв'язків рівняння (3). Найпростіший випадок такого типу описується наступним твердженням [6]:

Якщо в рівнянні (3) Ω − *обмежена замкнена множина, а функції* $f(x)$ *і* $A(x, \xi)$ *неперервні в* Ω, *то довільний розв'язок рівняння* (3), *що належить до класу* $L_2(\Omega)$, *неперервний в* Ω.

Відомо [4], що інтегральні рівняння Фредгольма

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} \mathcal{K}(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(x)\,, \tag{4}$$

де $\mathcal{K}(x, \xi)$ − ядро Фредгольма, а $f(x)$ і $u(x)$ належать до простору $L_2(\Omega)$, є важливими класами рівнянь із цілком неперервними операторами.

Якщо в (3) $\alpha < m/2$, то рівняння зі слабкою особливістю (3) є також рівнянням Фредгольма.

Але, як видно з вищевказаних тверджень, для $0 \le \alpha < m$ рівняння (3) є рівнянням із цілком неперервним оператором. Таким чином, оскільки теореми Фредгольма справджуються для рівнянь із цілком неперервними операторами, то вони мають місце і для рівнянь (3) зі слабкою особливістю.

2. Засадничі положення теорії операторних рівнянь першого роду. Характерною особливістю інтегральних рівнянь Фредгольма (3) зі слабкою особливістю є те, що невідома функція, яка визначається із цих рівнянь, і права частина рівнянь належать до одного й того ж простору. Це твердження є правильним і в загальному випадку (4).

Для інтегральних рівнянь першого роду це твердження не виконується. Теорія рівнянь першого роду є складнішою, ніж теорія інтегральних рівнянь другого роду. Це пов'язане з тим, що лінійний інтегральний оператор

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} \mathcal{K}(x,\xi) u(\xi)\, d\xi$$

не є нормально розв'язним, тобто область його значень не є замкненою множиною. Через те умови розв'язності рівнянь першого роду мають принципово інший характер порівняно з умовами розв'язності рівнянь другого роду.

Основним методом дослідження інтегральних рівнянь першого роду є *метод регуляризації.*

Сформулюємо основні положення цього методу на засадах досліджень, наведених у [4].

Розглянемо рівняння

$$Ku = f\,, \tag{5}$$

де $K : X \to Y$; u − невідомий елемент гільбертового простору X; f − відомий елемент гільбертового простору Y.

Оператор K допускає *ліву регуляризацію,* якщо існує такий обмежений оператор $S : X \to Y$, що $SK = I - C$, де I − тотожний, а C − цілком неперервний оператор в X. Якщо ж, крім цього, рівняння (5) і рівняння $SKu = Sf$ є еквівалентними для будь-якого елемента $f \in Y$, то S називають *лівим еквівалентним регуляризатором.* Тоді має місце рівність

$$u - Cu = Sf\,. \tag{6}$$

Для цього рівняння застосовні загальні методи дослідження рівнянь другого роду з цілком неперервним оператором.

Оператор K допускає *праву регуляризацію,* якщо існує такий обмежений оператор $T : X \to Y$, що $KT = I - D$, де D − цілком неперервний оператор в Y. Якщо ж, крім цього, для довільного елемента $f \in Y$ рівняння (5) і рівняння $KTv = f$ є еквівалентними у тому сенсі, що вони одночасно розв'язні або нерозв'язні, то D називають *правим еквівалентним регуляризатором.* Тоді розв'язок u рівняння (5) визначаться за розв'язком v рівняння

$$v - Dv = f \tag{7}$$

рівністю $u = Tv$.

Приклад [17]. Розглянемо рівняння

$$\int_a^b \mathcal{K}(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(x)\,. \tag{8}$$

Вважатимемо, що функція $\mathcal{K}(x,\xi)$ неперервна та задовольняє умови

$$\mathcal{K}(a,\xi) = \mathcal{K}(b,\xi) = \mathcal{K}(x,a) = \mathcal{K}(x,b) = 0\,.$$

Позначимо через C_0 множину двічі неперервно диференційовних функцій, які перетворюються в нуль у точках $x = a$ і $x = b$.

Нехай $\mathcal{K}(x,\xi)$ при $x \neq \xi$ має неперервні першу та другу похідні за x (за ξ) і функція

$$\frac{1}{r_1(x)} = \mathcal{K}'_x(x+0,x) - \mathcal{K}'_x(x-0,x) \qquad \left(\frac{1}{r_1(x)} = \mathcal{K}'_\xi(x+0,x) - \mathcal{K}'_\xi(x-0,x) \right)$$

неперервна і не перетворюється у нуль (частково обидві ці умови задовольняють функції Ґріна першої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку). У цьому випадку за лівий (правий) зручно взяти оператор

$$Su(x) = r_1(x)u''(x) \qquad \left(Tu(x) = \left(r_2(x)u(x)\right)'' \right).$$

Тоді, якщо $f \in C_0$, рівняння (8) еквівалентне рівнянням

$$u(x) = \int_a^b \mathcal{L}_1(x,\xi)u(\xi)\,d\xi + \varphi(x)\,,$$

$$v(x) = \int_a^b \mathcal{L}_2(x,\xi)v(\xi)\,d\xi + f(x)\,,$$

де

$$\mathcal{L}_1(x,\xi) = -\,r_1(x)\mathcal{K}''_{xx}(x,\xi), \qquad \varphi(x) = r_1(x)f''(x)\,,$$

$$\mathcal{L}_2(x,\xi) = -\,r_2(x)\mathcal{K}''_{\xi x}(x,\xi), \qquad u(x) = \left(r_2(x)v(x)\right)''.$$

Зауважимо, що отримані інтегральні рівняння для $u(x)$ і $v(x)$ є операторними рівняннями другого роду. Останні є простішими, ніж (8). ⊳

Розв'язки рівнянь (6) і (7) слід розглядати як часткові розв'язки операторного рівняння (5). Вони співпадають між собою, коли вихідне рівняння має єдиний розв'язок.

У випадку лівосторонньої регуляризації не відбувається втрати розв'язків, тобто всі розв'язки рівняння (6) – це розв'язки рівняння (5).

У випадку правосторонньої регуляризації можлива втрата розв'язків. Це безпосередньо випливає з того, що не всякий розв'язок можна подати у вигляді $u = Tv$.

Тому важливе значення мають питання рівносильної або еквівалентної регуляризації. Відповіді на них можна отримати з означення спряженого оператора. Спряженим до оператора K називають оператор K^*, який задовольняє умову

$$(Ku,f) = (u,K^*f)\,,$$

де (u,f) – скалярний добуток

$$(u,f) = \iint_\Omega u(\xi)\bar{f}(\xi)\,d\xi\,.$$

Якщо $K = K^*$, то оператор K називають самоспряженим.

Оператор K називають нормально розв'язним, якщо для розв'язності рівняння (5) необхідно та достатньо, щоб його права частина була ортогональною до всіх нулів спряженого оператора K^*.

Із введенням поняття спряженого оператора поняття індексу оператора K можна сформулювати так.

Індексом оператора K називають різницю між кількістю нулів оператора K і кількістю нулів спряженого оператора K^*:

$$\operatorname{Ind} K = N(K) - N(K^*)\,.$$

У теорії одновимірних інтегральних рівнянь є проста формула для обчислення індексу одновимірного сингулярного оператора. У теорії двовимірних рівнянь такі результати відсутні. Практично намагаються опосередковано визначити індекс інтегрального оператора на підставі аналізу основного та спряженого до нього операторів, їхнього фізичного змісту тощо.

У зв'язку з труднощами при обчисленні індексу операторних рівнянь вводять поняття додатного та додатно визначеного оператора, які дозволяють виділити оператори з нульовим індексом.

Симетричний оператор K називають додатним [4], якщо він визначений на класах функцій $u \in X$ і має місце співвідношення

$$(Ku, u) \ge 0 .$$

Якщо ж має місце нерівність

$$(Ku, u) \ge C^2 \| u \|^2 ,$$

де C − додатна стала, то самоспряжений оператор називають додатно визначеним [4].

Якщо ж оператор K на множині функцій $u \in X$ додатно визначений, то операторне рівняння (5) має не більше ніж один розв'язок. Це означає, що

$$\operatorname{Ind} K = 0 .$$

Звідси випливає, що, коли симетричний оператор є додатно визначеним, то операторне рівняння (5) розв'язне і його розв'язок єдиний.

Виділяють особливий клас операторів, які називають *нетеровими*.

Нетеровим оператором називають оператор K, який є нормально розв'язним і має скінченний індекс. Це означає, що, коли задано операторне рівняння (5), то для нетеровості оператора K необхідно, щоб нулі спряженого оператора K^* були ортогональні до функції f, тобто $(f, \gamma) = 0$ для $\gamma \in \operatorname{Ker} K^*$, де $\operatorname{Ker} K := \{u \in D(K) : Ku = 0\}$, а величина $\operatorname{Ind} K = \operatorname{Ker} K - \operatorname{Ker} K^*$ була обмеженою. Тут $D(K)$ − область визначення оператора K. У зв'язку із введенням поняття нетерового оператора деякі твердження стають еквівалентними. Зокрема, якщо оператор має обернений, то він нетерів. Додатно визначений оператор також нетерів. Нетерів оператор із нульовим індексом є фредгольмовим.

Заданий оператор K має еквівалентний лівий регуляризатор тоді й тільки тоді, коли він нетерів і його індекс невід'ємний. Оператор K має еквівалентний правий регуляризатор тоді й тільки тоді, коли він нетерів і його індекс недодатний.

Запропонована в [11−15] теорія розв'язування лінійних операторних рівнянь першого роду (5) базується на скінченних збуреннях вигляду $\alpha I + K^* K$, де I − тотожний оператор.

У роботі [8] встановлено границю цього збурення при $\alpha \to +0$, тобто проведено регуляризацію псевдооберненого до K оператора:

$$K^+ = \lim_{\alpha \to +0} \left(\alpha I + K^* K\right)^{-1} K^* . \tag{9}$$

Тут K^+ є розширенням до K^{-1}.

Більш детально елементи теорії операторних рівнянь першого роду наведено в роботах [1, 5, 7, 11, 12, 16].

3. Інтегральні рівняння першого роду типу ньютонівського потенціалу. У переважній більшості випадків у застосуваннях зустрічаються інтегральні рівняння, ядрами яких є фундаментальні розв'язки класичних диференціальних рівнянь. Тому надалі інтегральне рівняння (4) називатимемо інтегральним рівнянням другого роду типу ньютонівського потенціалу, коли

$$\mathcal{K}(x,\xi) = \frac{1}{|x-\xi|} + \mathcal{K}_*(x,\xi)\,, \tag{10}$$

де $\mathcal{K}_*(x,\xi)$ – обмежена функція.

Для таких рівнянь теорія інтегральних рівнянь типу Фредгольма застосовна в деякому узагальненні. Дійсно, нехай в (10) $\mathcal{K}_*(x,\xi) \equiv 0$, тобто $\mathcal{K}(x,\xi) = |x-\xi|^{-1}$. Легко переконатись, що тоді $\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |\mathcal{K}(x,\xi)|^2\, dx\, d\xi$ не є обмеженою величиною. Але, якщо від ядра $\mathcal{K}(x,\xi)$ перейти до ітерованого ядра, тоді теорія інтегральних рівнянь типу Фредгольма вже застосовна до таких рівнянь.

Дійсно, розглянемо інтегральне рівняння

$$u(x) - \lambda \int\limits_\Omega \frac{u(\xi)}{|x-\xi|}\, d\xi = f(x), \qquad x \in \Omega\,.$$

Запишемо його у символічному вигляді

$$(I - \lambda K)\, u = f\,. \tag{11}$$

До обох частин рівняння (11) застосуємо оператор $I + \lambda K$:

$$(I - \lambda^2 KK)\, u = F\,,$$

що у розгорнутому вигляді означає

$$u(x) - \lambda^2 \int\limits_\Omega \mathcal{K}_2(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = F(x), \qquad x \in \Omega\,, \tag{12}$$

де $F = (I + \lambda K) f$, $\mathcal{K}_2(x,\xi)$ – друге ітероване ядро для $\mathcal{K}(x,\xi) = |x-\xi|^{-1}$, тобто

$$\mathcal{K}_2(x,\xi) = \int\limits_\Omega \frac{d\eta}{|x-\eta|\,|\xi-\eta|}\,. \tag{13}$$

Аналіз ядра $\mathcal{K}_2(x,\xi)$ показує, що воно має вже слабшу особливість, ніж $|x-\xi|^{-1}$, принаймні логарифмічну. Тому інтегральне рівняння (12) належить уже до інтегральних рівнянь типу Фредгольма. Із (12) і (11) випливає, що будь-який розв’язок інтегрального рівняння (11) є розв’язком і рівняння (12). Обернене твердження не завжди має місце. Зокрема, існують розв’язки рівняння (12), які не задовольняють (11). Ці розв’язки містяться серед власних функцій інтегрального рівняння

$$(I + \lambda K)\, \gamma = 0\,.$$

Інтегральні рівняння із ядром $\mathcal{K}(x,\xi) = |x-\xi|^{-1}$ мають свої певні властивості. У теорії інтегральних рівнянь Фредгольма не акцентується увага на поведінці розв’язку в околі контуру Ω, а це виявляється суттєвим для інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу.

Дослідимо це питання докладніше.

У теорії інтегральних рівнянь типу Фредгольма виділяють особливий клас рівнянь, у яких ядро $\mathcal{K}(x,\xi)$ є симетричним, тобто задовольняє умову $\mathcal{K}(x,\xi) = \mathcal{K}(\xi,x)$. Таким воно є у рівнянні (11), але (11) не є фредгольмового типу.

Інтегральне рівняння (4) із симетричним ядром має цілу низку характерних властивостей:

– воно має хоча б одне власне значення, а, отже, однорідне для нього рівняння має завжди власні функції;

– власні функції такого рівняння завжди дійсні;

– власні функції рівняння, що відповідають різним власним значенням, ортогональні між собою.

Власні значення симетричних інтегральних рівнянь типу Фредгольма відіграють важливу роль. У багатьох випадках через власні значення і власні функції симетричних інтегральних рівнянь Фредгольма визначаються розв'язки інтегральних рівнянь першого роду з таким самим ядром.

Проілюструємо це для рівняння

$$Ku \equiv \int_\Omega \frac{u(\xi)}{|x-\xi|}\,d\xi = f(x), \qquad x \in \Omega. \tag{14}$$

Для цього зведемо це рівняння до вигляду

$$KKu \equiv \int_\Omega \mathcal{K}_2(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi = K f,$$

де $\mathcal{K}_2(x,\xi)$ має вигляд (13) і задовольняє умову

$$\int_\Omega |\mathcal{K}_2(x,\xi)|^2\,d\xi < B = \text{const}.$$

Тоді, використавши теорему Гільберта – Шмідта для симетричних інтегральних рівнянь Фредгольма, можна подати розв'язок рівняння (14) через співвідношення

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \varphi_k(x), \tag{15}$$

де f_k – коефіцієнт розвинення $f(x)$ за власними функціями інтегрального рівняння (11); λ_k – власні значення рівняння (11) [17].

Зауважимо, що результат (15) має місце лише в припущенні, що $u(x)$ – квадратично сумовна в області Ω функція, тобто належить до класу L_2.

Суттєвим є характер поведінки розв'язку в околі контуру області Ω.

Знаходити розв'язок $u(x)$, який необов'язково належить до класу L_2, пропонуємо шляхом регуляризації (9). Для (14) рівняння Ейлера матиме вигляд [9]

$$\alpha u_\alpha(\eta) + \int_\Omega \mathcal{K}_2(\eta,\xi)\,u_\alpha(\xi)\,d\xi = g(\eta), \tag{16}$$

де

$$K^*K \equiv K_2(\xi,\eta) = \int_\Omega \frac{1}{|x-\xi||x-\eta|}\,dx, \qquad g(\eta) = \int_\Omega \frac{f(x)}{|x-\eta|}\,dx.$$

Виконавши заміну змінних

$$u_\lambda(\eta) = \alpha u_\alpha(\eta), \qquad \lambda = -\frac{1}{\alpha}, \tag{17}$$

рівняння (16) зведемо до класичного виразу – інтегрального рівняння типу Фредгольма другого роду

$$u_\lambda(\eta) = g(\eta) + \lambda \int_\Omega \mathcal{K}_2(\eta,\xi)\,u_\lambda(\xi)\,d\xi. \tag{18}$$

4. Мероморфна регуляризація. Розглянемо, перш за все, інтегральне рівняння першого роду зі слабкою особливістю

$$(Ku)(x) \equiv \int_\Omega \frac{A(x,\xi)}{r^\alpha}\,u(\xi)\,d\xi = f(x), \qquad (x,\xi) \in \Omega\times\Omega, \tag{19}$$

де $0 \le \alpha \le m$, $|A(x,\xi)| \le c = \text{const}$ і множина Ω є обмеженою.

Для цього випадку нормальне рівняння

$$K^*Ku = K^*f$$

матиме вигляд

$$\int_\Omega \mathcal{K}_2(\eta,\xi) u(\xi)\,d\xi = g(\eta), \tag{20}$$

де

$$\mathcal{K}_2(\eta,\xi)=\int\limits_\Omega \frac{A(x,\eta)}{|x-\eta|^\alpha}\frac{A(x,\xi)}{|x-\xi|^\alpha}\,dx, \qquad g(\eta)=\int\limits_\Omega \frac{A(x,\eta)}{|x-\eta|^\alpha}f(x)\,dx,$$

а його тихонівське збурення запишеться через (18).

Отже, у двох випадках, а саме, коли рівняння (5) є інтегральним рівнянням із слабкою особливістю або типу ньютонівського потенціалу, рівняння (18) є фредгольмівським із симетричним додатним ядром. Таким чином, тут ядро $\mathcal{K}_2(\eta,\xi)$ є ядром Шмідта для ядер $\dfrac{A(x,\xi)}{r^\alpha}$ або $\dfrac{1}{|x-\xi|}$. Це ядро можна розвинути в білінійний ряд

$$\mathcal{K}_2(\eta,\xi)=\sum_{n=1}^\infty \frac{u_n(\eta)\overline{u_n(\xi)}}{\lambda_n}, \tag{21}$$

де λ_n і $u_n(\xi)$ – відповідно характеристичні числа та власні функції ядра $\mathcal{K}_2(\eta,\xi)$. Ряд (21) є збіжним у середньому за обома змінними. Якщо ж ядро $\mathcal{K}_2(\eta,\xi)$ є неперервним, а область Ω є скінченною, то ряд (21) збігається рівномірно за обома змінними (теорема Мерсера).

У такому випадку на підставі досліджень [3] розв'язок рівняння (18) є мероморфною стосовно λ функцією.

Зауважимо один наслідок із формули (21): симетричне ядро $\mathcal{K}_2(\eta,\xi)$ є виродженим тоді й тільки тоді, коли воно має скінченне число характеристичних чисел. Тоді розв'язок рівняння (18) буде раціональною стосовно λ функцією.

За вказаних умов розв'язок рівняння (18) матиме вигляд

$$u_\lambda(\xi)=g(\xi)+\lambda\int\limits_\Omega R(\xi,\eta;\lambda)\,g(\eta)\,d\eta, \tag{22}$$

де резольвента ядра $Q(\xi,\eta)=\mathcal{K}_2(\xi,\eta)$ є мероморфною за λ функцією:

$$R(\xi,\eta;\lambda)=\frac{D(\xi,\eta;\lambda)}{D(\lambda)}, \tag{23}$$

де

$$D(\xi,\eta;\lambda)=\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!}B_m(\xi,\eta)\lambda^m, \tag{24}$$

$$D(\lambda)=\sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{m!}A_m\lambda^m. \tag{25}$$

У рівностях (24), (25) параметри A_m, $B(\xi,\eta)$ визначаються за рекурентними співвідношеннями

$$A_0=1, \qquad B_0(\xi,\eta)=Q(\xi,\eta),$$

$$A_m=\int\limits_\Omega B_{m-1}(\eta,\eta)\,d\eta,$$

$$B_m(\xi,\eta)=Q(\xi,\eta)A_m-m\int\limits_\Omega Q(\xi,\tau)B_{m-1}(\tau,\eta)\,d\tau. \tag{26}$$

Ряди (24), (25) збігаються для усіх скінченних значень параметра λ, а ряд (24), крім того, збігається для значень ξ і η рівномірно в $\Omega\times\Omega$.

Підставивши тепер (23) у (22), матимемо

$$u_\lambda(\xi) = \frac{1}{D(\lambda)}\left(D(\lambda)g(\xi) + \lambda\int_\Omega D(\xi,\eta;\lambda)g(\eta)\,d\eta\right) =$$

$$= \frac{g(\xi)\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}A_m\lambda^m + \int\limits_\Omega\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}B_m(\xi,\eta)g(\eta)d\eta\lambda^{m+1}}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}A_m\lambda^m} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\left(g(\xi)A_m\lambda^m + \lambda^{m+1}\int\limits_\Omega B_m(\xi,\eta)g(\eta)\,d\eta\right)}{\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}A_m\lambda^m} =$$

$$= \frac{g(\xi) + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\lambda^m}{m!}\left(\int\limits_\Omega mB_{m-1}(\xi,\eta)g(\eta)\,d\eta - A_m g(\xi)\right)}{1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m\,!}A_m\lambda^m}. \tag{27}$$

Означення. $[n-1/n]$-апроксимантою розв'язку рівняння (18) називатимемо дробово-раціональну за λ функцію

$$u_\lambda^{(n)}(\xi) = \frac{g(\xi) + \sum\limits_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m\lambda^m}{m!}\left(\int\limits_\Omega mB_{m-1}(\xi,\eta)g(\eta)\,d\eta - A_m g(\xi)\right)}{1 + \sum\limits_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{m!}A_m\lambda^m}. \tag{28}$$

Апроксиманта (28) споріднена з Паде-апроксимантою.

Теорема. *Нехай рівняння* (5) *є рівнянням першого роду зі слабкою особливістю* (19) *або типу ньютонівського потенціалу* (14).

Тоді його нормальний розв'язок визначається як границя

$$u^+(\xi) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{A_n}\left(A_{n-1}g(\xi) - (n-1)\int\limits_\Omega B_{n-2}(\xi,\eta)g(\eta)\,d\eta\right). \tag{29}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо $[n-1/n]$-апроксиманту (28) розв'язку регуляризованого рівняння (18). Згідно з (17) вираз (28) набуде вигляду

$$u_\alpha^{(n)}(\xi) =$$

$$= \frac{g(\xi)\alpha^{n-1} + \sum\limits_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^{m+1}}{m!}\left(\int\limits_\Omega mB_{m-1}(\xi,\eta)g(\eta)\,d\eta - A_m g(\xi)\right)\alpha^{n-m-1}}{\alpha^n + \sum\limits_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m+1}}{m!}A_m\alpha^{n-m}}. \tag{30}$$

Спрямувавши тепер в (30) $\alpha \to +0$, матимемо (за умови, що $A_n \neq 0$)

$$u_n^+(\xi) = \frac{n}{A_n}\left(A_{n-1}g(\xi) - (n-1)\int\limits_\Omega B_{n-2}(\xi,\eta)g(\eta)\,d\eta\right). \tag{31}$$

Якщо ж $A_n = 0$, а $A_{n-1} \neq 0$, то замість (31) слід вибирати апроксиманту Паде нижчого порядку, $[n-2/n-1]$:

$$u_{n-1}^+(\xi) = \frac{n-1}{A_{n-1}}\left(A_{n-2}g(\xi) - (n-2)\int\limits_\Omega B_{n-3}(\xi,\eta)g(\eta)\,d\eta\right)$$

і т. д.

Такий підхід дозволяє через апроксиманти Паде порядку $[m-1/m]$ проводити регуляризацію розв'язку некоректно поставлених задач першого роду.

Значення (29) випливає з умови (31), коли $n \to \infty$. ◊

1. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – Москва: Наука, 1977. – 224 с.
2. *Бакушинский А. В., Гончарский А. В.* Итерационные методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1989. – 127 с.
3. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – Москва: Мир, 1986. – 502 с.
4. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др.* Интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 448 с.
5. *Крупник И. Я.* Банаховы алгебры с символом и сингулярные интегральные операторы. – Кишинев: Штиинца, 1984. – 138 с.
6. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. – Москва: Наука, 1968. – 575 с.
7. *Пресдорф Э.* Линейные интегральные уравнения // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундамент. направления. – Москва: ВИНИТИ, 1988. – **27**. – С. 5–130.
8. *Рибицька О. М.* Дробово-аналітичний метод розв'язування лінійних функціональних рівнянь: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1995. – 21 с.
9. *Рибицька О. М., Сявавко М. С.* Мероморфний розв'язок лінійних інтегральних рівнянь другого роду і мероморфна регуляризація рівнянь першого роду // Дод. у кн.: *Сявавко М. С.* Інтегральні ланцюгові дроби. – Київ: Наук. думка, 1994. – С. 190–194.
10. *Сейсмическая* томография / Под ред. Г. Налета. – Москва: Мир, 1990. – 416 с.
11. *Сявавко М. С.* j-дробова регуляризація лінійних некоректних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 8. – С. 1130–1143.
12. *Сявавко М. С.* Узагальнення формули Крамера // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 662–679.
13. *Сявавко М. С., Пасечник Т. В., Рыбыцька О. М.* Псевдообратный оператор и рациональные алгоритмы нормального решения интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Электрон. моделирование. – 1995. – **17**, № 1. – С. 10–16.
14. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. – 1963. – **151**, № 3. – С. 501–504.
15. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – Москва: Наука, 1986. – 287 с.
16. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
17. *Хай М. В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1993. – 253 с.

НОРМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

На основании мероморфного относительно параметра регуляризации изображения решения нормализованного интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода проведена регуляризация обратного оператора Мура – Пенроуза со слабой особенностью, а также особенностью типа ньютоновского потенциала, заданного на многообразиях с краем.

NORMAL SOLUTION OF THE FIRST KIND INTEGRAL EQUATION WITH WEAK PECULIARITY

On the basis of meromorphic (relative to regularization parameter) solution representation to the normalized integral second kind Fredholm-type equation, the regularization of the Moor – Penrose inverse operator with weak peculiarity and also with peculiarity of Newtonian potential type, given on the manifold with an edge, has been carried out.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
20.07.04