

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА ПРІ КОНВЕКТИВНОМУ НАГРІВАННІ

Визначено температурне поле та зумовлений ним напружено-деформований стан кругового термочутливого циліндра, поверхня якого зазнає сталого тиску і через неї здійснюється його нагрівання шляхом конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем, температура якого лінійно залежить від часу. Нелінійна задача теплопровідності розв'язується методом лінеаризуючих параметрів з використанням перетворення Лапласа. Квазістатична задача термопружності зведена до інтегрального рівняння Вольтерра другого роду, розв'язок якого побудовано методом простих ітерацій.

Вступ. Сучасний розвиток техніки і нових технологій ставлять підвищені вимоги до міцності та надійності конструкцій, виготовлення та експлуатація яких проходять у широких діапазонах температур за одночасної дії на них силових навантажень. За таких умов при визначенні полів температури та напружень необхідно враховувати температурну залежність характеристик матеріалів [1, 17]. При цьому особливу цінність мають аналітичні розв'язки задач термопружності. Вони зручні при числовому аналізі та є корисними при побудові розв'язків задач оптимального за швидкістю керування процесами нагрівання тіл при обмеженнях на температуру та напруження. Ці задачі зводяться до обернених задач термопружності, розв'язання яких суттєво спрощується, якщо відомі відповідні розв'язки прямих задач у напруженнях [4, 16].

Постановка задачі. Розглянемо задачу про визначення нестационарного температурного поля t та спричиненого ним напружено-деформованого стану безмежного циліндра радіуса r_0 , теплофізичні (коефіцієнт теплопровідності λ_t , об'ємна теплоємність c_v) і механічні (модуль зсуву G , коефіцієнт Пуассона ν , температурний коефіцієнт лінійного розширення α_t) характеристики матеріалу якого залежать від температури. Циліндр має рівномірний розподіл температури t_p , а його поверхня $r = r_0$ перебуває під дією тиску величини p_0 . У початковий момент часу $\tau = 0$ він починає конвективно обмінюватися теплом через поверхню $r = r_0$ із зовнішнім середовищем, температура якого лінійно зростає зі швидкістю V від початково сталого значення t_c . Використовуючи математичну модель термопружності термочутливого тіла, визначимо температурне поле циліндра та зумовлений ним і прикладений до поверхні $r = r_0$ тиском напружено-деформований стан.

Визначення температурного поля. Зумовлене такими діями температурне поле визначасмо з нелінійного рівняння теплопровідності [8, 9]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) = c_v(t) \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (1)$$

за граничних і початкової умов

$$\left[\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial r} + \alpha(t - (t_c + V\tau)) \right]_{r=r_0} = 0, \quad (2)$$

$$t \Big|_{r=0} \neq \infty, \quad \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad t \Big|_{\tau=0} = t_p,$$

де α – коефіцієнт теплообміну через поверхню $r = r_0$.

Виберемо за відлікову температуру деяке її значення t_0 , а за характерний розмір – радіус циліндра r_0 ; введемо безрозмірні температуру $T = t/t_0$, координату $\rho = r/r_0$ і подамо характеристики матеріалу циліндра у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T)$, де величини з індексом «0» мають відповідні розмірності, а величини з індексом «*» є функціями від безрозмірної температури, причому $\chi(t_p) = \chi_0$, $\chi^*(T_p) = 1$, де $T_p = t_p / t_0$.

Припустимо, що температурні залежності коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності є близькими ($\lambda_t^*(T) \approx c_v^*(T)$), а тому коефіцієнт температуропровідності вважаємо сталою величиною: $a = \lambda_t(t)/c_v(t) = \lambda_{t0} \lambda_t^*(T) / (c_{v0}(T) c_v^*(T)) \approx \lambda_{t0} / c_{v0}$. Це припущення, як зазначено в [14], добре виконується для чистих металів, деяких теплоізоляційних матеріалів і графіту [15]. Якщо, крім цього, ввести безрозмірний час $Fo = \frac{a\tau}{r_0^2}$ – критерій

Фур'є, безрозмірний коефіцієнт теплообміну $Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda_{t0}}$ – критерій Біо,

безрозмірну швидкість зміни температури оточуючого поверхню циліндра $\rho = 1$ середовища $Pd = \frac{Vr_0^2}{at_0}$ – критерій Предводителєва, то задача (1), (2)

набуває вигляду

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = c_v^*(T) \frac{\partial T}{\partial Fo}, \quad (3)$$

$$\left[\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} + Bi (T - (T_c + Pd Fo)) \right] \Big|_{\rho=1} = 0,$$

$$T \Big|_{\rho=0} \neq \infty, \quad \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad T \Big|_{Fo=0} = T_p, \quad (4)$$

де $T_c = t_c/t_0$.

Застосовуючи до нелінійної задачі (3), (4) перетворення Кірхгофа [3]

$$\theta = \int_{T_p}^T \lambda_t^*(T) dT \quad (5)$$

і враховуючи зроблені припущення, отримаємо таку крайову задачу на змінну θ :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}, \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + Bi (T(\theta) - (T_c + Pd Fo)) \right] \Big|_{\rho=1} = 0,$$

$$\theta \Big|_{\rho=0} \neq \infty, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad \theta \Big|_{Fo=0} = 0. \quad (7)$$

Тут $T(\theta)$ – вираз безрозмірної температури через змінну Кірхгофа θ , який для конкретної залежності $\lambda_t^*(T)$ знаходимо з рівняння (5).

Внаслідок зробленого перетворення нелінійне рівняння теплопровідності трансформувалося у лінійне на змінну θ ; нелінійна умова конвективного

теплообміну лінеаризувалася частково, а нелінійність в отриманій умові зосередилася у виразі шуканої температури на поверхні циліндра $\rho = 1$; граничні умови на осі циліндра залишилися лінійними, а початкова умова на змінну Кірхгофа стала однорідною.

Остаточну лінеаризацію першої з умов (7) здійснимо за допомогою заміни [13]

$$T(\theta) \Big|_{\rho=1} = (1 + \alpha) \theta \Big|_{\rho=1} + T_p, \quad (8)$$

де α – поки що невідома стала, тобто замість неї при побудові розв'язку крайової задачі (6), (7) використаємо граничну умову

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \text{Bi}^* (\theta - (\bar{T}_c^* + \text{Pd}^* \text{Fo})) \right] \Big|_{\rho=1} = 0. \quad (9)$$

Тут $\text{Bi}^* = (1 + \alpha)\text{Bi}$, $\text{Pd}^* = \frac{\text{Pd}}{1 + \alpha}$, $T_c^* = \frac{\bar{T}_c}{1 + \alpha}$, $\bar{T}_c = T_c - T_p$.

Для побудови аналітичного розв'язку цієї лінійної крайової задачі скористаємося перетворенням Лапласа [6] за часовою координатою. Застосувавши його, отримаємо таку задачу на трансформанту Лапласа змінної Кірхгофа:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} \right) - s \tilde{\theta} = 0, \quad (10)$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} + \text{Bi}^* \left(\tilde{\theta} - \left(\frac{\bar{T}_c^*}{s} + \frac{\text{Pd}^*}{s^2} \right) \right) \right] \Big|_{\rho=1} = 0, \quad \tilde{\theta} \Big|_{\rho=0} \neq \infty, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} = 0, \quad (11)$$

де $\tilde{\theta} = \int_0^\infty \theta e^{-s\text{Fo}} d\text{Fo}$; s – параметр перетворення Лапласа.

Рівняння (10) є модифікованим рівнянням Бесселя і його загальний розв'язок має вигляд

$$\tilde{\theta} = AI_0(\rho\sqrt{s}) + BK_0(\rho\sqrt{s}), \quad (12)$$

де $I_0(\cdot)$, $K_0(\cdot)$ – модифіковані функції Бесселя нульового порядку [10]; A , B – довільні сталі.

З другої і третьої умов (11) випливає, що стала $B = 0$. Після знаходження з першої із граничних умов (11) виразу для сталої A отримаємо зображення Лапласа змінної Кірхгофа

$$\tilde{\theta} = \text{Bi} \left[\frac{\bar{T}_c}{s} \frac{\Phi(s)}{\varphi(s)} + \text{Pd} \frac{\Phi(s)}{s^2 \varphi(s)} \right], \quad (13)$$

де $\Phi(s) = I_0(\rho\sqrt{s})$, $\varphi(s) = \sqrt{s} I_1(\sqrt{s}) + \text{Bi}^* I_0(\sqrt{s})$.

Оскільки обидва доданки в розв'язку (13) є відношеннями узагальнених поліномів відносно параметра s , причому поліноми знаменників не містять вільних членів, то для виконання оберненого перетворення Лапласа можна скористатись теоремою розкладу Ващенко – Захарченка [11]. Знаменники обох дробів мають корінь $s = 0$ (для знаменника першого дробу $s = 0$ – простий, а для другого – двократний корінь) і безмежну кількість простих коренів $s_n = -\mu_n^2$ ($\mu_n = i\sqrt{s}$, $i = \sqrt{-1}$), де μ_n є коренями рівняння

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{\text{Bi}^*}, \quad (14)$$

яке отримане з рівняння $\varphi(s) = 0$; $J_0(\cdot)$, $J_1(\cdot)$ – функції Бесселя нульового і першого порядку [10]. Враховуючи сказане, знаходимо, що

$$\theta = \bar{T}_c^* + \text{Pd}^* \left[\text{Fo} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{\text{Bi}^*} - \rho^2 \right) \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{T}_c^* - \frac{\text{Pd}^*}{\mu_n^2} \right) A_n J_0(\rho \mu_n) e^{-\mu_n^2 \text{Fo}}, \quad (15)$$

де

$$A_n = \frac{2\text{Bi}^*}{\mu_n [(\text{Bi}^* + 1)J_1(\mu_n) + \mu_n J_1'(\mu_n)]} = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]}. \quad (16)$$

Перехід до останнього виразу зроблено на основі рекурентного співвідношення $xJ_1'(x) = xJ_0(x) - J_1(x)$ і характеристичного рівняння (14). Для числових досліджень зручно A_n записати у вигляді

$$A_n = \frac{2\text{Bi}^*}{(\text{Bi}^{*2} + \mu_n^2)J_0(\mu_n)}. \quad (17)$$

Знаючи змінну Кірхгофа, температуру за заданої температурної залежності коефіцієнта теплопровідності $\lambda_t^*(T)$ знаходимо з рівняння (5). Наприклад, якщо коефіцієнт теплопровідності є лінійною функцією температури $\lambda_t^*(T) = 1 + k(T - T_p)$, $k = \text{const}$, то із (5) отримаємо

$$T = k^{-1}(\sqrt{1 + 2k\theta} - 1) + T_p. \quad (18)$$

Знайдена змінна Кірхгофа (15) є функцією безрозмірних координати ρ та часу Fo , яка точно задовольняє рівняння (6) та умови (7) за винятком першої з них. Крім вхідних даних задачі $(\text{Bi}, T_c, \text{Pd}, T_p)$, вона містить довільний параметр α , який використовуємо, щоб задовольнити із заданою точністю нелінійну першу граничну умову (7). Підставивши вираз для температури (18) у першу з умов (7), врахувавши при цьому виконання умови (9), для визначення параметра α отримуємо рівняння

$$\theta \Big|_{\rho=1} = - \frac{2\alpha}{k(1 + \alpha)^2}. \quad (19)$$

Температуру нетермочутливого циліндра ($\lambda_t^*(T) = 1$) обчислюємо за формулою

$$T = \theta \Big|_{x=0} + T_p, \quad (20)$$

де $\theta \Big|_{x=0}$ знаходимо з (15). Вираз (20) при $\text{Pd} = 0$ співпадає з результатом роботи [11, с. 244, формула (25)], а при $T_p = T_c$ – з результатом роботи [11, с. 285, формула (4)].

Ряд у розв'язку (15) швидко збігається, тому, починаючи з деякого $\text{Fo} > \text{Fo}_1$, ним можна знехтувати. Час Fo_1 вважають часом настання квазі-стаціонарного [11] чи асимптотичного [12] режиму нагрівання. У цьому випадку змінна Кірхгофа має вигляд

$$\theta = \bar{T}_c^* + \text{Pd}^* \left[\text{Fo} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{\text{Bi}^*} - \rho^2 \right) \right], \quad (21)$$

де знайдене з рівняння (19)

$$\alpha = \frac{\frac{\text{Pd}}{\text{Bi}^*} + \frac{2}{k}}{\bar{T}_c^* + \frac{2}{k} + \text{Pd} \text{Fo}} - 1.$$

Визначення напружень. Для визначення напружень, спричинених знайденим осесиметричним температурним полем, прикладеними до поверхні циліндра зусиллями та діючими в його об'ємі масовими силами, скористаємось рівнянням рівноваги [2, 5]

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2 \sigma_r) = \rho(\sigma_r - f(\rho)), \quad (22)$$

співвідношеннями між діагональними компонентами e_r, e_φ, e_z тензора деформацій і компонентами $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ тензора напружень [2, 5]

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_z)] + \Phi(T) = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_r - \nu\sigma) - \nu e_z + (1+\nu)\Phi(T), \\ e_\varphi &= \frac{1}{E}[\sigma_\varphi - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \Phi(T) = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma - \sigma_r] - \nu e_z + (1+\nu)\Phi(T), \\ e_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)] + \Phi(T) = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma) + \Phi(T), \end{aligned} \quad (23)$$

та рівнянням суцільності [2, 5]

$$\rho \frac{de_\varphi}{d\rho} = e_r - e_\varphi,$$

яке після використання фізичних співвідношень (23) та рівняння рівноваги (22) можна записати у напруженнях:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1-\nu^2}{E} \sigma - \nu e_z + (1+\nu)\Phi(T) \right] = \frac{1}{2} \sigma_r \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{G} \right) - \frac{\rho}{G} f. \quad (24)$$

У рівняннях і співвідношеннях (22)–(24) $G = E/[2(1+\nu)]$ – модуль зсуву; $\sigma = \sigma_r + \sigma_\varphi$ – сумарне напруження; $\Phi(T) = t_0 \int_{T_p}^T \alpha_t(T) dT$ – об'ємна деформація; $f(\rho) = r_0 F(\rho, T(\rho, F_0))$ – масові сили розмірності напружень за рахунок переходу до безрозмірної координати ρ .

Оскільки на поверхні циліндра задане нормальне зусилля p_0 , то

$$\sigma_r \Big|_{\rho=1} = -p_0. \quad (25)$$

Осьове напруження σ_z повинно задовольняти інтегральну умову рівноваги, яка має вигляд [5]

$$\int_0^1 \rho \sigma_z(\rho) d\rho = p, \quad (26)$$

де $p = P/(2\pi r_0^2)$, а P – задане на торцях циліндра зусилля.

Зінтегрувавши рівняння рівноваги (22) з використанням граничної умови (25), отримуємо таке співвідношення між радіальними та сумарними напруженнями:

$$\sigma_r = \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \eta(\sigma - \eta f(\eta)) d\eta \quad (27)$$

та інтегральну умову рівноваги

$$\int_0^1 \rho(\sigma - \rho f(\rho)) d\rho = -p_0. \quad (28)$$

Інтегруючи рівняння суцільності (24) з використанням співвідношення (27) і міняючи порядок інтегрування у повторних інтегралах, отримуємо таке інтегральне рівняння Вольтерра другого роду для визначення сумарних напружень σ :

$$\begin{aligned} \sigma(\rho, F_0) - \frac{G(T(\rho, F_0))}{1 - \nu(T(\rho, F_0))} \int_0^\rho \eta(\varphi(\rho) - \varphi(\eta))\sigma(\eta, F_0) d\eta = \\ = \frac{G(T(\rho, F_0))}{1 - \nu(T(\rho, F_0))} \left\{ 2A + 2\nu(T(\rho, F_0))e_z - 2[1 + \nu(T(\rho, F_0))\Phi(T(\rho, F_0))] - \right. \\ \left. - \int_0^\rho \left[\frac{f(\eta)}{G(T(\eta, F_0))} + \eta^2(\varphi(\rho) - \varphi(\eta))f(\eta) \right] d\eta \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

де $\varphi(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{G(T(\eta, F_0))} \right) d\eta$; A , e_z – сталі, які визначаються з граничних умов (26), (28).

Для побудови розв'язку інтегрального рівняння (29) використовуємо метод простих ітерацій, який дозволяє знайти його розв'язок у вигляді послідовних наближень $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$, де n -не наближення σ_n визначається через $(n-1)$ -ше наближення з такого рекурентного співвідношення:

$$\begin{aligned} \sigma_n(\rho, F_0) = \frac{G(T(\rho, F_0))}{1 - \nu(T(\rho, F_0))} \left\{ 2A_n + 2\nu(T(\rho, F_0))e_{zn} + \right. \\ \left. + \int_0^\rho \eta(\varphi(\rho) - \varphi(\eta))\sigma_{n-1}(\eta, F_0) d\eta - 2[1 + \nu(T(\rho, F_0))]\Phi(T(\rho, F_0)) - \right. \\ \left. - \int_0^\rho \left[\frac{f(\eta)}{G(T(\eta, F_0))} + \eta^2(\varphi(\rho) - \varphi(\eta))f(\eta) \right] d\eta \right\}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (30)$$

За нульове наближення σ_0 приймаємо вираз

$$\begin{aligned} \sigma_0(\rho, F_0) = \frac{G(T(\rho, F_0))}{1 - \nu(T(\rho, F_0))} \left\{ 2A_0 + 2\nu(T(\rho, F_0))e_{z0} - \right. \\ \left. - 2[1 + \nu(T(\rho, F_0))]\Phi(T(\rho, F_0)) - \int_0^\rho \frac{f(\eta)}{G(T(\eta, F_0))} d\eta \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

який отримуємо з рівняння (29), коли в ньому знехтувати похідною $\frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{G(T(\rho, F_0))} \right)$.

Сталі A_n , e_{zn} , $n = 0, 1, \dots$, визначені з інтегральних умов (26) і (28), які повинні виконуватися для кожного наближення, мають вигляд

$$A_n = \frac{G_1 b_{1n} - G_2 b_{2n}}{\delta}, \quad e_{zn} = \frac{G_1 b_{2n} - G_2 b_{1n}}{\delta}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} \delta = 2(G_1^2 - G_2^2), \quad G_1 = \int_0^1 \frac{\rho G(T)}{1 - \nu(T)} d\rho, \quad G_2 = \int_0^1 \frac{\rho G(T)\nu(T)}{1 - \nu(T)} d\rho, \\ b_{10} = -p_0 + \int_0^1 \rho^2 f(\rho) d\rho + 2 \int_0^1 \frac{(1 + \nu(T))\rho G(T)\Phi(T)}{1 - \nu(T)} d\rho + \\ + \int_0^1 \frac{\rho G(T)}{1 - \nu(T)} \int_0^\rho \frac{f(\eta)}{G(T(\eta, F_0))} d\eta d\rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{20} &= p + 2 \int_0^1 \frac{(1 + v(T))\rho G(T)\Phi(T)}{1 - v(T)} d\rho + \int_0^1 \frac{\rho v(T)G(T)}{1 - v(T)} \int_0^\rho \frac{f(\eta)}{G(T(\eta, Fo))} d\eta d\rho, \\
b_{1n} &= -p_0 + \int_0^1 \rho^2 f(\rho) d\rho - \int_0^1 \frac{\rho G(T)}{1 - v(T)} \int_0^\rho \eta(\varphi(\rho) - \varphi(\eta)) \sigma_{n-1}(\eta, Fo) d\eta d\rho + \\
&\quad + 2 \int_0^1 \frac{(1 + v(T))\rho G(T)\Phi(T)}{1 - v(T)} d\rho + \int_0^1 \frac{\rho G(T)}{1 - v(T)} \int_0^\rho \left[\frac{f(\eta)}{G(T(\eta, Fo))} + \right. \\
&\quad \left. + \eta^2(\varphi(\rho) - \varphi(\eta))f(\eta) \right] d\eta d\rho, \\
b_{2n} &= p + \int_0^1 \frac{\rho v(T)G(T)}{1 - v(T)} \int_0^\rho \left[\frac{f(\eta)}{G(T(\eta, Fo))} + \eta^2(\varphi(\rho) - \varphi(\eta))f(\eta) \right] d\eta d\rho - \\
&\quad - \int_0^1 \frac{\rho v(T)G(T)}{1 - v(T)} \int_0^\rho \eta(\varphi(\rho) - \varphi(\eta)) \sigma_{n-1}(\eta, Fo) d\eta d\rho + \\
&\quad + 2 \int_0^1 \frac{(1 + v(T))\rho G(T)\Phi(T)}{1 - v(T)} d\rho, \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{33}$$

Оскільки механічні характеристики G , v , α_t залежать від температури, яка є функцією від координати ρ і часу Fo , то в інтегральних виразах формул (29)–(33), де в цьому була необхідність, змінна ρ замінена змінною інтегрування.

Зауважимо, що формула (27) при $\rho = 0$ і $\rho f(\rho) = 0$ після застосування правила Лопітала для розкриття невизначеності набуває вигляду

$$\sigma_r(0) = \sigma(0)/2. \tag{34}$$

Результати числових досліджень та висновки. Експериментальні температурні залежності (див. рис. 1) теплових і механічних характеристик заліза [7], з якого виготовлений циліндр, апроксимовано поліномами другого степеня відносно температури, за винятком коефіцієнта теплопровідності, який апроксимуємо поліномом першого степеня. Одиниці виміру величин на рис. 1 такі: α – [К⁻¹], E – [Па], v – безрозмірне, λ – [Вт/(м·К)]. Відповідні значення параметрів апроксимації, виконаної з використанням методу найменших квадратів [18], такі: $\lambda_{t0} = 77.25$ Вт/(м·К), $k = -0.2699$, $v_0 = 0.3205$, $v_{01} = 0.0275$, $v_{02} = 1.7886 \cdot 10^{-4}$, $E_0 = 2.3215 \cdot 10^{11}$ Па, $E_{01} = 0.0754$, $E_{02} = -0.622 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_{t0} = 1.19 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $\alpha_{t01} = 0.4639$, $\alpha_{t02} = -5.4908 \cdot 10^{-4}$.

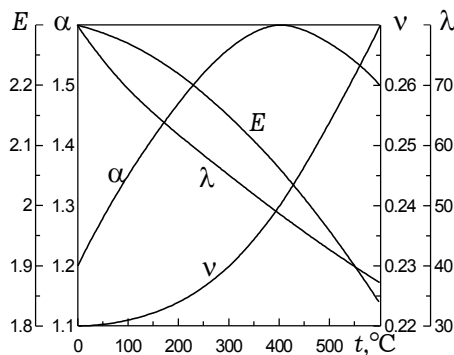


Рис. 1

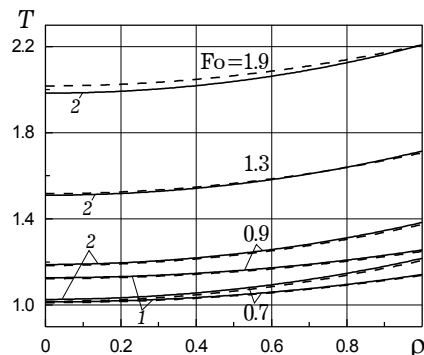


Рис. 2

Усі розрахунки проведено при $Bi = 1.3$, $a = 0.2196 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$. Початкову температуру нагрівачого середовища вважали рівною початковій температурі циліндра та відліковій температурі $t_0 = 20^\circ\text{C}$ (293 K), а, отже, $T_p = T_c = 1$.

Розподіл температури в циліндрі при асимптотичному тепловому режимі зображено на рис. 2. На цьому рисунку штриховими лініями зображено розподіли температури вздовж радіуса циліндра при сталих, а суцільними – при залежних від температури теплофізичних характеристиках матеріалу. Температурне поле обчислено на основі співвідношень (18), (19), (21) для значень критеріїв Фур'є $Fo = 0.7, 0.9, 1.3, 1.9$ і Предводителя $Pd = 0.5$, (криві 1), $Pd = 0.75$ (криві 2).

Як видно на рис. 2, при асимптотичному тепловому режимі температурна залежність теплофізичних характеристик матеріалу слабо впливає на температурне поле. Цей вплив зростає з ростом часу і швидкістю нагрівання. Якщо при сталих теплофізичних характеристиках матеріалу (величини $Pd^* = Pd$, $Bi^* = Bi$, $T_c^* = T_c$ – сталі) в умовах асимптотичного теплового режиму на основі формул (20), (21) розподіл температури у суцільному циліндрі при значенні критерію Фур'є Fo відрізняється від аналогічного розподілу температури при значенні критерію Фур'є Fo_0 на величину $Pd(Fo - Fo_0)$ для довільних значень радіальної змінної ρ , то для матеріалів із залежними від температури характеристиками (величини Pd^* , Bi^* , T_c^* залежать від температури і Fo) ця різниця нелінійно залежить від критерію Фур'є Fo .

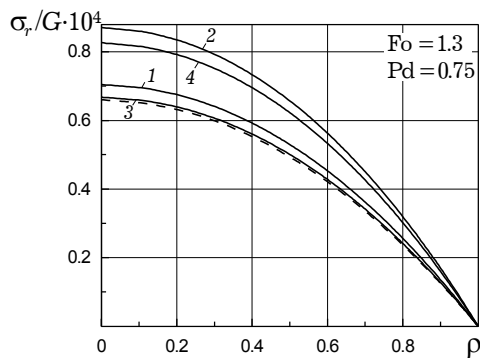


Рис. 3

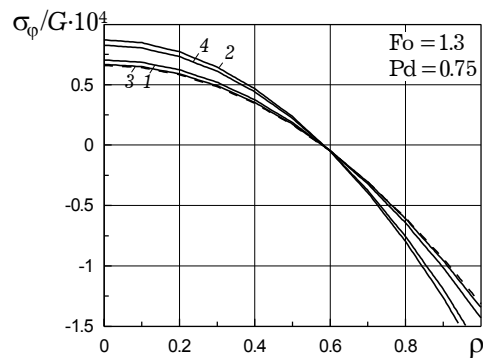


Рис. 4

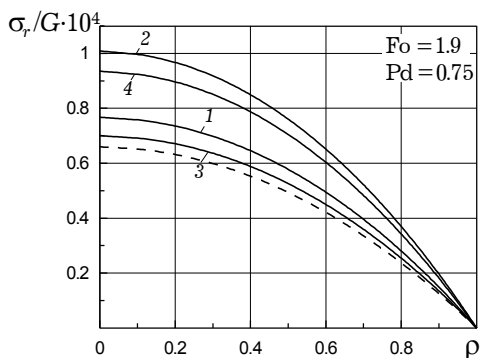


Рис. 5

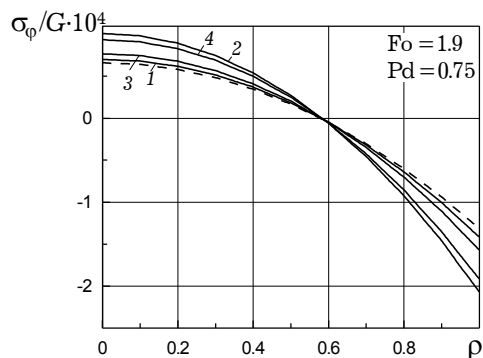


Рис. 6

На рис. 3–6 зображено розподіли радіальних σ_r (рис. 3, 5) і колових σ_φ (рис. 4, 6) термонапружень при значенні $Pd = 0.75$ за відсутності масових сил ($f(\rho) = 0$) і тиску ($p_0 = 0$) для $Fo = 1.3$ і $Fo = 1.9$. Штриховими лініями позначено розподіл термонапружень при всіх сталих характеристиках матеріалу. Криві 1 відповідають напруженням при залежних від температури теплофізичних ($\lambda_t = \lambda_t(T)$, $c_v = c_v(T)$) і сталих механічних ($E = \text{const}$, $\nu = \text{const}$, $\alpha_t = \text{const}$) характеристиках, криві 2 – при $\lambda_t = \lambda_t(T)$, $c_v = c_v(T)$ і $\alpha_t = \alpha_t(T)$, $E = \text{const}$, $\nu = \text{const}$, криві 3 – при $\lambda_t = \lambda_t(T)$, $c_v = c_v(T)$ і $E = E(T)$, $\nu = \text{const}$, $\alpha_t = \text{const}$, криві 4 – при залежних від температури всіх теплофізичних і механічних характеристиках: $\lambda_t = \lambda_t(T)$, $c_v = c_v(T)$, $E = E(T)$, $\nu = \nu(T)$, $\alpha_t = \alpha_t(T)$.

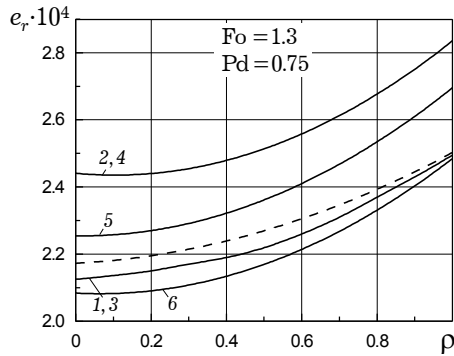


Рис. 7

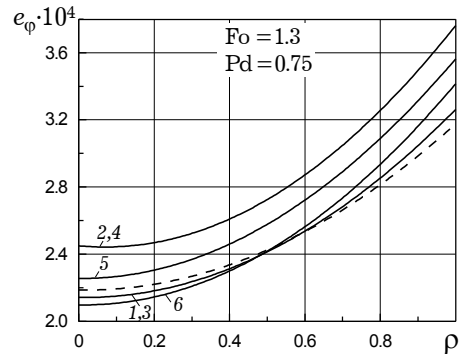


Рис. 8

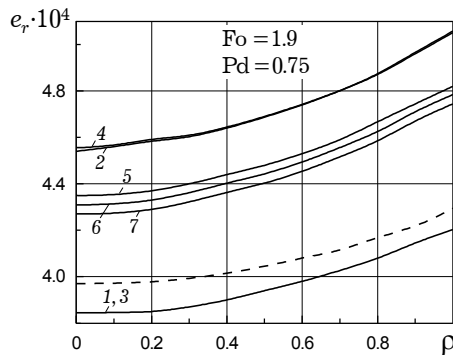


Рис. 9

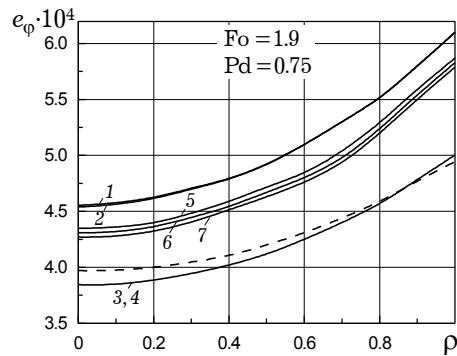


Рис. 10

На рис. 7–10 зображено розподіли деформацій у суцільному циліндрі при значеннях $Fo = 1.3$ (рис. 7, 8) і $Fo = 1.9$ (рис. 9, 10) та відсутності (криві 1–4) і наявності (криві 5–7) силових навантажень p_0 . Штриховими лініями показано розподіли радіальних e_r і колових e_φ деформацій при сталих характеристиках матеріалу. Криві 1 відповідають деформаціям при залежних від температури теплофізичних ($\lambda_t = \lambda_t(T)$, $c_v = c_v(T)$) і сталих механічних ($E = \text{const}$, $\nu = \text{const}$, $\alpha_t = \text{const}$) характеристиках, криві 2 – при $\lambda_t = \lambda_t(T)$, $c_v = c_v(T)$ і $\alpha_t = \alpha_t(T)$, $E = \text{const}$, $\nu = \text{const}$, криві 3 – при $\lambda_t = \lambda_t(T)$, $c_v = c_v(T)$ і $E = E(T)$, $\nu = \text{const}$, $\alpha_t = \text{const}$, криві 4 – при $\lambda_t = \lambda_t(T)$, $c_v = c_v(T)$, $E = E(T)$, $\nu = \nu(T)$, $\alpha_t = \alpha_t(T)$, криві 5–7 – при врахуванні температурних залежностей всіх характеристик матеріалу і стискуючих силових навантажень. На рис. 7, 8 криві 5, 6 відповідають зусиллям $p_0 = 5 \cdot 10^6$ і

$1.0 \cdot 10^7$ Па; на рис. 9, 10 криві 5–7 відповідають зусиллям $p_0 = 6 \cdot 10^6$, $7 \cdot 10^6$, $8 \cdot 10^6$ Па.

З аналізу рис. 3–6 випливає, що врахування температурної залежності модуля пружності $E(T)$ приводить до менших змін термонапружень порівняно зі змінами від урахування температурної залежності коефіцієнта лінійного розширення $\alpha_t(T)$, що обумовлено меншими температурними змінами модуля пружності в досліджуваному діапазоні температур. Як видно на рис. 7–10, врахування температурної залежності модуля пружності $E(T)$ практично не впливає на розподіл деформацій, що й слід було очікувати з огляду на формули (23), (30). Силкові стискуючі навантаження зменшують деформації, викликані температурним полем. У наведених прикладах максимальні зміни напружень і деформацій, викликані врахуванням температурної залежності характеристик матеріалів, становлять відповідно $\approx 40\%$ і $\approx 15\%$. Результати обчислень показали швидку збіжність ітераційного процесу при обчисленні напружень (достатньо перших двох наближень), а також на необхідність врахування температурної залежності всіх характеристик матеріалу одночасно, оскільки спостерігаємо суттєві розбіжності між розподілами напружень при всіх залежних від температури характеристиках і при таких залежностях окремих з них.

1. *Абрамов В. В.* Напряжения и деформации при термической обработке стали. – Киев–Донецк: Вища шк., 1985. – 136 с.
2. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости. – Москва: Высш. шк., 1971. – 288 с.
3. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы теории теплопроводности: В 2 ч. – Москва: Высш. шк., 1982. – Ч. 1. – 327 с.
4. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
5. *Вігак В. С.* Розв'язок задач пружності та термопружності у напруженнях // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – Т. 9. – С. 34–131.
6. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. – Москва: Высш. шк., 1975. – 407 с.
7. *Зиновьев В. Е.* Теплофизические свойства твёрдых тел при высоких температурах. – Москва: Металлургия, 1989. – 384 с.
8. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 487 с.
9. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
10. *Коренев Б. Г.* Задачи теории теплопроводности и термоупругости. Решения в бесселевых функциях. – Москва: Наука, 1980. – 400 с.
11. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 600 с.
12. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
13. *Попович В. С., Гарматій Г. Ю.* Аналітично-чисельні методи побудови розв'язків задач теплопровідності термочутливих тіл при конвективному теплообміні. – Львів: 1993. – 66 с. – (Препр. / АН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; № 13-93).
14. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П.* Нелінійна прикладна термомеханіка. – Київ: НМЦ ВО МОНУ, 2000. – 280 с.
15. *Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике: Справочник* / Под ред. Б. Е. Неймарк. – Москва–Ленинград: Энергия, 1976. – 308 с.
16. *Ясінський А., Клімко І.* Оптимальне за швидкодією керування нагрівом неоднорідних термочутливих циліндричних тіл при обмеженнях на керування та напруження // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2003. – С. 431–432.
17. *Noda N.* Thermal stresses in functionally graded materials // Therm. Stresses'99: Proc. 3rd Int. Congr. on Thermal Stresses, Cracow (Poland), June 13–17, 1999. – Cracow: Cracow Univ. of Techn., 1999. – P. 33–38.
18. *Press William H., Flannery Brian P., Teukolsky Saul A., Vetterling William T.* Numerical recipes. The art of scientific computing. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. – 1530 p.

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ КОНВЕКТИВНОМ НАГРЕВЕ

Определено температурное поле и вызванное им напряженно-деформированное состояние кругового термочувствительного цилиндра, поверхность которого находится под постоянным давлением и через нее осуществляется нагрев путём конвективного теплообмена с внешней средой, температура которой линейно зависит от времени. Нелинейная задача теплопроводности решена методом линеаризующих параметров с использованием преобразования Лапласа. Квазистатическая задача термоупругости сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Решение последнего построено методом простых итераций.

THERMO-STRESSED STATE OF THERMOSENSITIVE CYLINDER UNDER CONVECTIVE HEATING

The temperature field and stress-strained state in a circular thermosensitive cylinder induced by it is determined. The surface of the cylinder is subjected to constant loading and through this surface the cylinder is heated by the convective heat exchange with the environment, the temperature of which is time-dependent. The nonlinear heat conduction problem is solved using the method of linearizing parameters and the integral Laplace transformation. The quasi-static thermoelasticity problem is reduced to solving the integral Volterra second-kind equation. The last one is solved using the direct iteration procedure.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
28.12.04