

МЕТОД ОЦІНКИ КОНТАКТНОГО ТЕРМІЧНОГО ОПОРУ КОНТАКТНОЇ ПАРИ ЗА НАЯВНОСТІ СИСТЕМИ ПОВЕРХНЕВИХ КРУГОВИХ ВИЇМОК

Запропоновано метод визначення контактної термічної опору для випадку взаємодії двох напівбезмежних тіл за наявності системи кругових виїмок малої висоти на поверхні одного з тіл. Побудовано осесиметричну модель такого контакту, яка враховує сукупний вплив конгломерату неоднорідностей на локальний розподіл температурного поля в околі окремо взятого дефекту. На цій підставі сформульовано та розв'язано осесиметричну контактну задачу теплопровідності, яка методом інтегральних перетворень зведена до інтегрального рівняння Абеля. Визначення контактної термоопору поверхні спряження реалізується шляхом усереднення реального стрибка температури на окремій виїмці. Здійснено порівняльний аналіз результатів, отриманих на основі запропонованого підходу, з відомими в літературі.

Вступ. Розробка ефективних методик визначення зведених характеристик поверхні спряження тіл, що перебувають у контакті, є важливою теоретичною проблемою механіки контактної взаємодії. При тепловому контакті тіл такою інтегральною характеристикою поверхні спряження є контактна термічна провідність або обернена до неї величина – контактний термічний опір. Цей параметр, яким наділяють поверхню спряження, є у певному сенсі фіктивним, він є складовою математичної моделі процесу теплопередачі між тілами, яка достатньо добре описує теплообмін у багатьох практично важливих випадках. Поряд із математичною простотою це робить дану модель привабливою для використання в інженерних розрахунках.

Природа виникнення контактної термічної опору полягає у тому, що в реальних умовах механічний контакт тіл є недосконалим. Поряд з іншими чинниками однією з найважливіших причин цієї недосконалості є геометрична нерівність поверхонь. Для поверхонь реальних тіл притаманні різноманітні відхилення фактичного профілю від номінальної форми. За геометричними розмірами цих відхилень їх поділяють на три класи: макровідхилення, хвилястість і шорсткість. Наявність таких геометричних неоднорідностей границь тіл спричиняє появу просвіту між поверхнями, що контактують. Коли ж взаємодія тіл супроводжується ще й обміном тепловою енергією, міжповерхневий просвіт стає перешкодою на шляху цього процесу. Як наслідок між елементами контактної пари виникає додатковий перепад температури (додатковим він є у порівнянні з випадком, коли тепловий контакт тіл є ідеальним по всій поверхні спряження).

При побудові математичної моделі, щоб врахувати цей додатковий перепад температур, поверхні контакту приписується термічний опір. Це забезпечує при переході через неї появу стрибка температури, який і відповідає спостережуваному експериментально перепаду температур. Зрозуміло, що така модель не враховує реального розподілу температурних полів у приповерхневих шарах, але достатньо добре описує загальні тенденції розподілу температури в контактній парі в цілому. Часто цього достатньо для практичних потреб інженерів при розрахунках контактних вузлів, що працюють в умовах теплових навантажень.

Оскільки контактний термоопір пов'язаний із неповним механічним контактом тіл і наявністю між поверхнями просвіту, то очевидно, що він змінюється зі зміною механічного навантаження, так як у цьому разі змінюється ділянка прямого контакту поверхонь і розміри міжповерхневого просвіту. У зв'язку з цим для прогнозування термічної поведінки конкретних контактних пар необхідно знати закон зміни контактної термоопору в залежності від зовнішніх механічних зусиль. Зрозуміло, що це співвідно-

шення буде різним для різних типів геометричної структури поверхонь. Тому завдання полягає в тому, щоб для різних типів поверхонь, що характеризуються відповідними розмірами нерівностей, запропонувати методики визначення контактного термоопору як функції зовнішнього тиску.

При теоретичному вирішенні цієї проблеми виникає необхідність у постановці контактної задачі теплопровідності, яка би враховувала фактичну ділянку контакту. Але останню можна знайти лише після розв'язання відповідної задачі про механічний контакт тіл. У більшості відомих підходів роблять припущення про те, що фактичний контакт тіл реалізується уздовж мікровиступів і його площа складає малу частку від площі номінальної поверхні спряження. Тоді фактична ділянка контакту визначається з розв'язку задачі про втиснення системи штампів, які моделюють мікровиступи, у пружний півпростір. Такий підхід використовувався у монографії [5]. Однак він не є універсальним і годиться лише для врахування хвилястості та шорсткості поверхонь.

Водночас зустрічаються на практиці такі контактні пари [7, 8], для яких ділянка безпосереднього налягання поверхонь є співмірною з номінальною поверхнею спряження, а прямий контакт не реалізується лише вздовж локальних ділянок, де утворюються ізольовані міжповерхневі зазори. Зрозуміло, що методики визначення зведених параметрів таких контактних пар не можуть базуватись на моделях, згаданих вище. Один із підходів до побудови таких методик запропоновано в цій роботі.

Розглядається недосконалий тепловий контакт тіл за наявності конгломерату рівномірно розподілених кругових ізольованих міжповерхневих зазорів, породжених пологими виїмками малої висоти на границі одного з тіл. У п. 1 подано опис задачі, а п. 2 присвячено побудові осесиметричної моделі такого контакту та формулюванню відповідної задачі теплопровідності. Розв'язання задачі наведено в п. 3. Розподіли стрибків температури на поверхні спряження в залежності від насиченості поверхневих неоднорідностей проаналізовано у п. 4. Визначення контактного термоопору на основі отриманого розв'язку здійснено в п. 5. Порівняльний аналіз розв'язків задач теплопровідності – осесиметричної, сформульованої на основі запропонованої моделі, і просторової, відомої в літературі, здійснено у п. 6. Насамкінець наведено висновки досліджень.

1. Опис задачі. Розглянемо два напівбезмежні пружні ізотропні півпростори, поверхня одного з яких має множини рівномірно розподілених однакових кругових виїмків. Тіла перебувають у контакті внаслідок прикладених на нескінченності зусиль p . Крім механічного навантаження, тіла піддані дії теплового навантаження – на нескінченності задано однорідний тепловий потік q , спрямований перпендикулярно до поверхні контакту.

Через поверхневі геометричні нерівності безпосередній механічний контакт тіл реалізується не по всій поверхні спряження. Він відсутній на локальних ізольованих ділянках, уздовж яких утворюються міжповерхневі провіти. Таким чином, номінальна поверхня спряження поділяється на область безпосереднього налягання поверхонь та область міжповерхневих зазорів. У загальному випадку конфігурація і розміри ділянок зазорів змінюються зі збільшенням зовнішніх механічних зусиль. У цій роботі обмежимо розглядом випадку, коли ділянки зазорів у процесі навантаження залишаються круговими, а змінюються лише їх розміри. Причому трансформація усіх зазорів відбувається однаково.

Наявність міжповерхневих дефектів, у свою чергу, зумовлює недосконалість теплового контакту. Припускаємо, що теплопередача між тілами відбувається лише через область прямого налягання поверхонь, де виконуються умови ідеального теплового контакту, і відсутня на ділянках зазорів. Іншими словами, на поверхні спряження існує система термоізолюваних ідентичних кругових ділянок, розміри яких залежать від механічного навантаження. Схематично поверхня спряження показана на рис. 1.

Завдання полягає в тому, щоб, дослідивши закономірності процесу теплопередачі в такій структурі, запропонувати методику визначення контакт-ного термічного опору та встановити його залежність від зовнішнього механічного навантаження. У зв'язку з цим нас цікавитиме не стільки розподіл температури поблизу поверхні, скільки вплив системи недосконалостей теплового контакту на температурне поле в глибинних шарах порівняно із випадком ідеального теплового контакту.

2. Побудова осесиметричної моделі та формулювання задачі. Один із шляхів вирішення проблеми полягає у формулюванні та подальшому розв'язуванні відповідної тривимірної задачі теплопровідності. Її розв'язок точно описує температурне поле в тілах – як біля поверхні тіл, так і на глибині. Але зважаючи на те, що нас цікавить у першу чергу розподіл температури на певній віддалі від границі, виберемо інший шлях, який дозволить уникнути труднощів, пов'язаних із розв'язуванням просторової задачі. Побудуємо спрощену осесиметричну модель контакту.

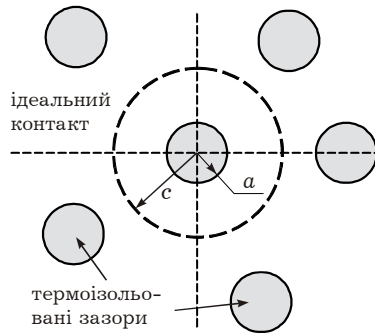


Рис. 1

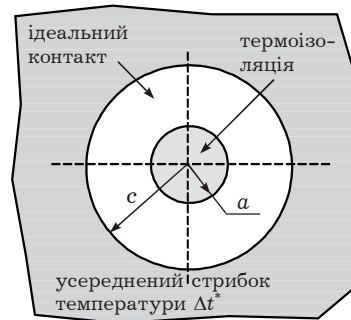


Рис. 2

Виберемо довільну зону термоізоляції і помістимо в її центрі початок циліндричної системи координат (r, φ, z) , скерувавши вісь z перпендикулярно до площини контакту. Надалі величини, які стосуються тіла, що займає область $\{z < 0\}$, позначатимемо індексом «1», а тіла в області $\{z > 0\}$ – індексом «2».

Розглянемо круг радіуса c з центром у початку координат, цей круг називатимемо елементарним. Радіус c вибираємо з умови, щоб площа круга дорівнювала площі, на яку припадає один поверхневий дефект.

Щоб врахувати вплив інших ділянок термоізоляції на перебіг процесу теплопередачі в межах елементарного круга, задамо поза ним сталий стрибок температури Δt^* . Величина Δt^* наперед невідома і її потрібно знайти в процесі розв'язування задачі. Умовою, з якої визначається Δt^* , є умова самоузгодженості

$$\Delta t^* = \frac{1}{\pi c^2} \cdot 2\pi \int_0^a \rho \Delta t(\rho) d\rho, \quad (1)$$

де $\Delta t(r) = t^{(1)}(r, 0) - t^{(2)}(r, 0)$ – стрибок температури на ділянці термоізоляції. Умова (1) означає, що величина Δt^* дорівнює реальному стрибку температури, усередненому на елементарному крузі.

Схематично запропонована модель показана на рис. 2.

Запишемо граничні умови осесиметричної задачі теплопровідності для визначення температури $t^{(i)}(r, z)$, $i = 1, 2$:

$$z = \pm \infty : \quad -k_i \frac{\partial t^{(i)}}{\partial z} = q, \quad 0 < r < \infty,$$

$$\begin{aligned}
z = 0 : \quad & -k_1 \frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad -k_2 \frac{\partial t^{(2)}}{\partial z} = 0, \quad 0 < r < a, \\
& -k_1 \frac{\partial t^{(1)}}{\partial z} = -k_2 \frac{\partial t^{(2)}}{\partial z}, \quad a < r < \infty, \\
& t^{(1)} - t^{(2)} = \begin{cases} 0, & a < r < c, \\ \Delta t^*, & c < r < \infty. \end{cases} \quad (2)
\end{aligned}$$

Тут k_i – коефіцієнти теплопровідності, a – радіус ділянки термоізоляції.

3. Методика розв'язування. Виділивши основний і збурений $\tilde{t}^{(i)}(r, z)$ стани температурного поля

$$t^{(i)}(r, z) = (-1)^{i+1} \frac{\Delta t^*}{2} - \frac{qz}{k_i} + \tilde{t}^{(i)}(r, z), \quad (3)$$

задачу зведемо до визначення компонент $\tilde{t}^{(i)}(r, z)$. Граничні умови задачі для визначення $\tilde{t}^{(i)}(r, z)$ мають вигляд

$$\begin{aligned}
z = \pm \infty : \quad & -k_i \frac{\partial \tilde{t}^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad 0 < r < \infty, \\
z = 0 : \quad & -k_1 \frac{\partial \tilde{t}^{(1)}}{\partial z} = -q, \quad -k_2 \frac{\partial \tilde{t}^{(2)}}{\partial z} = -q, \quad 0 < r < a, \\
& -k_1 \frac{\partial \tilde{t}^{(1)}}{\partial z} = -k_2 \frac{\partial \tilde{t}^{(2)}}{\partial z}, \quad a < r < \infty, \\
& \tilde{t}^{(1)} - \tilde{t}^{(2)} = \begin{cases} -\Delta t^*, & a < r < c, \\ 0, & c < r < \infty. \end{cases} \quad (4)
\end{aligned}$$

Функції $\tilde{t}^{(i)}(r, z)$ шукаємо у вигляді

$$\tilde{t}^{(i)}(r, z) = \int_0^\infty \xi T^{(i)}(\xi) e^{-\xi|z|} J_0(\xi r) d\xi. \quad (5)$$

Після підстановки виразів (5) у граничні умови (4) отримаємо систему парних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}
& k_1 \int_0^\infty \xi^2 T^{(1)}(\xi) J_0(\xi r) d\xi = q, \quad 0 < r < a, \\
& -k_2 \int_0^\infty \xi^2 T^{(2)}(\xi) J_0(\xi r) d\xi = q, \quad 0 < r < a, \\
& \int_0^\infty \xi^2 (k_1 T^{(1)} + k_2 T^{(2)}) J_0(\xi r) d\xi = 0, \quad a < r < \infty, \\
& \int_0^\infty \xi (T^{(1)} - T^{(2)}) J_0(\xi r) d\xi = \begin{cases} -\Delta t^*, & a < r < c, \\ 0, & c < r < \infty. \end{cases} \quad (6)
\end{aligned}$$

Після нескладних перетворень систему (6) зведемо до парних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \xi^2 \Delta T(\xi) J_0(\xi r) d\xi = \frac{q}{K}, \quad 0 < r < a, \\
& \int_0^\infty \xi \Delta T(\xi) J_0(\xi r) d\xi = \begin{cases} -\Delta t^*, & a < r < c, \\ 0, & c < r < \infty, \end{cases} \quad (7)
\end{aligned}$$

де $K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$, $\Delta T(\xi)$ – інтегральне перетворення Ганкеля нульового порядку від функції $\Delta t(r)$. Функція $\Delta T(\xi)$ зв'язана з $T^{(1)}(\xi)$, $T^{(2)}(\xi)$ співвідношеннями

$$T^{(i)}(\xi) = (-1)^{i+1} \frac{K}{k_i} \Delta T(\xi).$$

Подавши $\Delta T(\xi)$ у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta T(\xi) &= \xi \int_0^c (-\Delta t^*) r J_0(\xi r) dr + \int_0^a \theta(\rho) \sin(\xi \rho) d\rho = \\ &= -\xi \Delta t^* c J_1(\xi c) + \int_0^a \theta(\rho) \sin(\xi \rho) d\rho, \end{aligned} \quad (8)$$

парні інтегральні рівняння (7) зведемо до інтегрального рівняння Абеля

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} &= \frac{q}{K} + \Delta t^* c \int_0^\infty \xi J_1(\xi c) J_0(\xi r) d\xi = \\ &= \frac{q}{K} + \Delta t^* \frac{2}{\pi} \frac{c}{c^2 - r^2} E\left(\frac{r}{c}\right), \end{aligned}$$

розв'язок якого має вигляд [6]

$$\theta(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \left(\frac{q}{K} + \Delta t^* \frac{c}{c^2 - \rho^2} \frac{2}{\pi} E\left(\frac{\rho}{c}\right) \right) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \quad (9)$$

Тут $E(y)$ – еліптичний інтеграл другого роду.

Виразимо стрибок температури через функцію $\theta(r)$:

$$\begin{aligned} \Delta t(r) &= \Delta t^* + \int_0^\infty \xi \Delta T(\xi) J_0(\xi r) d\xi = \\ &= \Delta t^* - \Delta t^* + \int_0^a \int_0^a \theta(\rho) \sin(\xi \rho) d\rho J_0(\xi r) d\xi = \int_r^a \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Усереднимо його на елементарному крузі та прирівняємо до значення Δt^* :

$$\begin{aligned} \Delta t^* &= 2\pi \int_0^a r \frac{1}{\pi c^2} \int_r^a \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} dr = \frac{2}{c^2} \int_0^a r \int_r^a \frac{\theta(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} = \\ &= \frac{2}{c^2} \int_0^a \theta(\rho) d\rho \int_0^\rho \frac{r dr}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} = \frac{2}{c^2} \int_0^a \rho \theta(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (11)$$

Підставимо у формулу (11) замість $\theta(r)$ вираз (9). Проводячи обчислення, отримаємо

$$\Delta t^* = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{qa}{K} \alpha^2 + \frac{2\Delta t^* \alpha^3}{\pi(1 - \alpha^2 \tau^2)} E(\alpha \tau) \right) \tau \sqrt{1 - \tau^2} d\tau. \quad (12)$$

Тут позначено $\alpha = \frac{a}{c}$, $0 < \alpha < 1$.

Для обчислення останнього інтеграла розвинемо підінтегральну функцію у ряд за малим параметром α :

$$\begin{aligned} \frac{qa}{K} \alpha^2 + \frac{2\Delta t^* \alpha^3}{\pi(1 - \alpha^2 \tau^2)} E(\alpha \tau) &= \\ &= \frac{qa}{K} \alpha^2 + \Delta t^* \left(\alpha^3 + \frac{3}{4} \alpha^2 \tau^2 + \frac{45}{64} \alpha^7 \tau^4 + \frac{175}{256} \alpha^9 \tau^6 + o(\alpha^4) \right). \end{aligned}$$

Враховуючи останню рівність у співвідношенні (12), після обчислень відповідних інтегралів отримуємо рівняння відносно Δt^* :

$$\Delta t^* = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{4}{3} \frac{qa}{K} \alpha^2 + 4\Delta t^* \alpha^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10} \alpha^2 + \frac{3}{56} \alpha^4 + \frac{5}{144} \alpha^6 + o(\alpha^8) \right) \right\},$$

звідки остаточно знаходимо

$$\Delta t^* = \frac{4qa}{3K} \alpha^2 \left[\pi - 4\alpha^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10} \alpha^2 + \frac{3}{56} \alpha^4 + \frac{5}{144} \alpha^6 + o(\alpha^8) \right) \right]^{-1}. \quad (13)$$

Тепер знайдемо розподіл стрибка температури в межах елементарної комірки.

Підставляючи вираз (9) для $\theta(r)$ у формулу (10), отримуємо

$$\Delta t(r) = \frac{2}{\pi} \int_r^a \int_0^\rho \left(\frac{q}{K} + \Delta t^* c \frac{2}{\pi} \frac{E\left(\frac{t}{c}\right)}{c^2 - t^2} \right) \frac{t dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}}.$$

Після заміни $\rho = ax$, $t = a\tau$ в інтегралах, матимемо

$$\Delta t(r) = \frac{2}{\pi} \int_{r/a}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - (r/a)^2}} \int_0^x \left\{ \frac{qa}{K} + \Delta t^* \alpha \frac{2}{\pi} \frac{E(\alpha\tau)}{1 - (\alpha\tau)^2} \right\} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}}.$$

Для обчислення цих виразів аналогічно, як і у випадку обчислення інтегралів у формулі (12), розвинемо підінтегральну функцію у ряд за малим параметром α :

$$\begin{aligned} \Delta t(r) &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{qa}{K} \int_{r/a}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - (r/a)^2}} \int_0^x \frac{\tau d\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} + \right. \\ &\left. + \Delta t^* \alpha \int_{r/a}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - (r/a)^2}} \int_0^x \frac{\tau d\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} \left(1 + \frac{3}{4} \alpha^2 \tau^2 + \frac{45}{64} \alpha^4 \tau^4 + \frac{175}{256} \alpha^6 \tau^6 + o(\alpha^8) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Обчислюючи відповідні інтеграли, остаточно знаходимо

$$\begin{aligned} \Delta t(r) &= \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - (r/a)^2} \left[\frac{qa}{K} + \Delta t^* \left\{ \alpha + \frac{1}{6} \alpha^3 \left(1 + 2 \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{3}{5 \cdot 8} \alpha^5 \left(1 + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{4}{3} \frac{r^2}{a^2} \left(1 + 2 \frac{r^2}{a^2} \right) \right) + \frac{5}{4 \cdot 7} \alpha^7 \left(1 + \frac{6}{5} \frac{r^2}{a^2} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{r^2}{a^2} \left(1 + 2 \frac{r^2}{a^2} \right) \right) \right) \right\} + o(\alpha^9) \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

При отриманні формули (14) використано значення таких інтегралів:

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{\tau^{2n+1}}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau, \quad L_n(y) = \int_y^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx,$$

які легко знайти за допомогою рекурентних співвідношень

$$I_n(x) = \frac{2n}{2n+1} x^2 I_{n-1}(x), \quad I_0(x) = 1,$$

$$L_n(y) = \frac{1}{2n+1} y^{2n} \sqrt{1-y^2} + \frac{2n}{2n+1} L_{n-1}(y), \quad L_0(y) = \sqrt{1-y^2}.$$

4. Аналіз результатів. На основі отриманого виразу для $\Delta t(r)$ можна проаналізувати вплив сукупності ділянок термоізоляції на розподіл стрибка температури в межах елементарного круга.

На рис. 3 показано залежність стрибка температури Δt від r для різних параметрів α . Нагадаємо, що $\alpha = a/c$ характеризує насиченість ділянок термоізоляції у площині контакту.

При обчисленнях введено безрозмірні параметри. Всі геометричні величини віднесено до a – радіуса ділянки термоізоляції, а температуру – до величини qa/K : $\bar{r} = r/a$, $\bar{c} = c/a$, $\Delta\bar{t}(r) = K\Delta t(r)/qa$. У цих позначеннях $\alpha = 1/\bar{c}$.

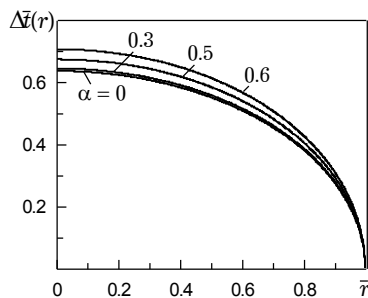


Рис. 3

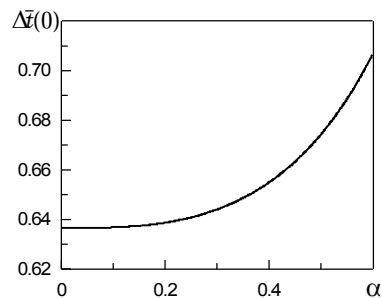


Рис. 4

З графіка видно, що стрибок температури є більшим для більших значень параметра α , тобто, коли ділянки термоізоляції знаходяться ближче одна до одної. Зі зменшенням α стрибок температури зменшується і стає таким, як у випадку одинарної ділянки термоізоляції ($\alpha = 0$). Вже для $\alpha = 0.3$ ця різниця є малопомітною.

Про монотонність залежності стрибка температури від параметра α можна зробити висновок на основі рис. 4, на якому зображено зміну максимального значення стрибка температури $\Delta\bar{t}(0)$ зі зміною α . Видно, що функція залежності $\Delta\bar{t}(0)$ від α є майже сталою для $0 < \alpha < 0.2$, і водночас характеризується високим градієнтом у діапазоні $0.4 < \alpha < 0.6$. Це можна пояснити власне впливом сусідніх ділянок термоізоляції.

5. Визначення контактної термічної опору. На основі отриманих результатів можна легко знайти контактний термічний опір. Пригадаємо, що контактний термічний опір R пов'язує стрибок температури, що виникає при переході через поверхню спряження (у нашому випадку Δt^*), із тепловим потоком q співвідношенням $\Delta t^* = Rq$, з якого маємо $R = \frac{\Delta t^*}{q}$. З урахуванням рівності (13) можемо записати вираз для контактної термічної опору

$$R = \frac{\frac{4}{3} \frac{a}{K} \alpha^2}{\pi - 4\alpha^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10} \alpha^2 + \frac{3}{56} \alpha^4 + \frac{5}{144} \alpha^6 + o(\alpha^8) \right)}. \quad (15)$$

Фізичний зміст контактної термічної опору полягає в наступному. Відгук системи на недосконалість теплового контакту (наявність термоізованих ділянок на поверхні розмежування), який досліджується на достатній віддалі від поверхні, є таким, якби на поверхні контакту існував термічний опір R . Встановлено, що для розглянутої системи ділянок термоізоляції він приблизно визначається формулою (15). Зауважимо, що у виразі (15) входять геометричні характеристики області контакту та коефіцієнти теплопровідності тіл.

Важливе значення у теорії контактної теплопередачі [5] має залежність контактної термоопору від зовнішнього механічного навантаження. Щоб отримати оцінку цієї залежності, скористаємось [2] розв'язком задачі пружності про взаємодію двох півпросторів за наявності однієї виїмки, що займає кругову ділянку радіуса b , форма якої задається виразом

$f(r) = h_0 \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right)^{3/2}$. Залежність радіуса зазору від зовнішнього тиску

$a = a(p)$ має вигляд $a = b \sqrt{1 - \frac{p}{p_{cr}}}$, де p_{cr} – критичне значення зовнішнього тиску, за якого закривається зазор. Якщо це співвідношення підставити в (15), то отримаємо залежність $R = R(p)$ (див. рис. 5).

У цьому випадку безрозмірні параметри вводили по іншому. Геометричні характеристики відносили до радіуса елементарного круга c : $\bar{a} = a/c$, $\bar{b} = b/c$ (тоді, очевидно, $\alpha = \bar{a}$). Контактний термоопір відносили до величини c/K : $\bar{R} = RK/c$, зовнішній тиск – до значення критичного навантаження: $\bar{p} = p/p_{cr}$. При обчисленнях покладали $\bar{b} = 0.8$ і розглядали такий діапазон зміни \bar{p} , щоб забезпечити виконання умови $0 < \bar{a} < 0.6$.

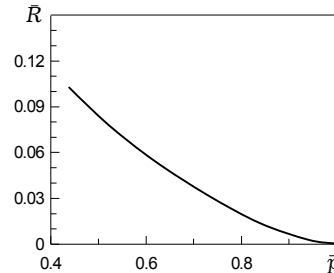


Рис. 5

На графіку бачимо, що залежність контактного термоопору від зовнішнього навантаження є строго нелінійною. На основі формул (15) можемо стверджувати, що для зовнішніх тисків, близьких до критичного значення, її можна оцінити, як $\bar{R} \approx (\sqrt{1 - \bar{p}})^3$.

Зауважимо, що отримана в цьому випадку залежність $R = R(p)$ не враховує механічного взаємовпливу зазорів.

6. Перевірка осесиметричної моделі. Запропонована модель теплового контакту тіл передбачає формулювання осесиметричної контактної задачі теплопровідності. Але для розглядуваної контактної пари в цілому не притаманна осьова симетрія і, взагалі кажучи, контактна задача теплопровідності вимагає просторової тривимірної постановки. У зв'язку з цим виникає питання стосовно правомірності застосування осесиметричної моделі. Щоб на нього відповісти, необхідно провести порівняльний аналіз розв'язків задач в осесиметричній і тривимірній постановках. У літературі відомі розв'язки просторових задач за наявності системи компланарних кругових дефектів, центри яких складають певну подвійно періодичну структуру, тобто є вузлами регулярних ґраток: трикутної, квадратної тощо.

Маючи на меті використати ці результати, розглянемо тепловий контакт двох півпросторів під дією теплового потоку q на безмежності за наявності системи кругових ділянок термоізоляції радіуса a , центри яких поміщені у вузлах трикутної або квадратної ґратки. Тіла віднесемо одночасно до двох систем координат: до циліндричної (r, φ, z) і декартової (x, y, z) зі спільною віссю z , введених так, щоб площина $z = 0$ збігалася із поверхнею спряження тіл.

Розподіл стрибка температури на ділянці термоізоляції зможемо записати на основі результатів робіт [3, 4]. У цих працях розглядалися задачі пружності для тіл із тріщинами та тонкими включеннями, зокрема наведено розв'язки задач пружності для тіла з подвійно періодичною системою кругових дефектів під дією зусиль на безмежності, скерованих перпендикулярно до площини неоднорідностей. Відомо [1], що інтегральні рівняння задачі пружності для цього випадку та задачі теплопровідності за дії теплового потоку, перпендикулярного до площини дефектів, у математичному сенсі однакові. Це дає підстави безпосередньо використати результати робіт [3, 4]. Таким чином, стрибок температури на ділянках термоізоляції дається виразами

$$\Delta t_{(\Delta)}(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \frac{q}{K} [1 + \pi^{-1} \lambda_{(\Delta)}^3 \{ (0.9183 + 0.1972 \lambda_{(\Delta)}^2) + 0.1409(x^2 + y^2)/d_{(\Delta)}^2 \}] + O(\lambda_{(\Delta)}^6), \quad (16)$$

$$\Delta t_{(\square)}(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \frac{q}{K} [1 + \pi^{-1} \lambda_{(\square)}^3 \{ (0.7528 + 0.1485 \lambda_{(\square)}^2) + 0.106(x^2 + y^2)/d_{(\square)}^2 \}] + O(\lambda_{(\square)}^6). \quad (17)$$

Тут нижні індекси (Δ) і (\square) відповідають трикутній і квадратній ґраткам, $2d$ – ребро ґратки, $\lambda = a/d$. Зауважимо, що з формул (16), (17) випливає, що стрибок температури для трикутної і для квадратної ґраток є осесиметричним з точністю до λ^5 .

Для того щоб порівняти розв’язок, отриманий на основі осесиметричної моделі та розв’язки просторових задач для квадратної і трикутної ґраток, необхідно узгодити геометричні параметри. Вимагатимемо, щоб відношення площі ділянки термоізоляції до площі області, на яку припадає один дефект, залишалась сталим для усіх трьох випадків.

Зручно при обчисленнях радіус ділянки термоізоляції a вибрати однаковим для всіх трьох випадків. Тоді інші геометричні параметри: c – радіус елементарного круга, $d_{(\Delta)}$, $d_{(\square)}$ – ребра ґраток, повинні задовольняти рівність

$$\pi c^2 = 4d_{(\square)}^2 = 2\sqrt{3} d_{(\Delta)}^2. \quad (18)$$

При розрахунках покладали $c = 1$. Параметри $d_{(\Delta)}$, $d_{(\square)}$ визначали на основі співвідношень (18). Параметр a пробігав множини значень $\{0.1, 0.2, \dots, 0.6\}$. Для кожного значення a порівняння результатів для кожного випадку здійснювали на основі двох характеристик: розподілі стрибка температури на ділянці термоізоляції і значенні стрибка температури, усередненого на елементарному крузі або на елементарній комірці.

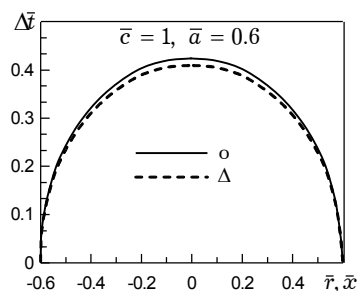


Рис. 6

На рис. 6 показано стрибок температури, обчислений для випадку трикутної ґратки (Δ) за формулою (16) і для осесиметричного випадку (O) – за формулою (14) для значення $\bar{a} = 0.6$. Саме в цьому разі різниця між розв’язками осесиметричної і просторової задач є найбільшою. При цьому в точці екстремуму вона не перевищує 3%.

У табл. 1 подано значення усередненого стрибка температури, обчислені для трикутної (Δ), квадратної (\square) ґраток і на основі осесиметричної моделі (O). З наведених даних випливає, що результати, отримані на основі осесиметричної моделі, добре узгоджуються з результатами, отриманими з розв’язків просторових задач.

Таблиця 1

a/c	O	Δ	\square
0.1	0.00042459	0.00042456	0.00042456
0.2	0.00340702	0.00340461	0.00340478
0.3	0.0115958	0.0115668	0.0115688
0.4	0.0279619	0.0277798	0.0277918
0.5	0.0562972	0.0554691	0.0555189
0.6	0.102306	0.099119	0.0992826

Висновки. Отже, для дослідження недосконалого теплового контакту тіл за наявності рівномірно розподілених кругових термоізованих міжповерхневих просвітів, породжених виїмками на поверхні одного з тіл, запропоновано осесиметричну модель такої взаємодії. Вона усереднено враховує сукупний вплив конгломерату поверхневих неоднорідностей на розподіл температурного поля в околі окремо взятого дефекту. Це реалізовано шляхом введення поняття елементарного круга – області, що містить один міжповерхневий просвіт, і задання поза ним наперед невідомого сталого стрибка температури, який виникає при переході через поверхню спряження. Розв'язання відповідної осесиметричної задачі, сформульованої на підставі побудованої моделі, дозволяє визначити контактний термічний опір.

Результати, отримані на основі запропонованої моделі, дають добре узгодження з відомими в літературі розв'язками відповідних просторових задач для певного діапазону співвідношення геометричних параметрів, що підтверджує правочинність використання осесиметричної моделі.

1. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 288 с.
2. Кит Г. С., Монастирський Б. Є. Контактна задача для півпростору та жорсткої основи з осесиметричною виїмкою // Мат. методи і фіз.-мех. поля – 1998. – **41**, № 4. – С. 7–11.
3. Панасюк В. В. Механика квазіхрупкого разрушения материалов – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
4. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – Киев: Наук. думка, 1986. – 216 с.
5. Шлыков Ю. П., Ганин Е. А., Царевский С. Н. Контактное термическое сопротивление. – Москва: Энергия, 1977. – 328 с.
6. Barber J. R. The solution of elasticity problems for a half-space by the method of Green and Collins // Appl. Sci. Res. – 1983. – **40**, No. 2. – P. 135–157.
7. Barber J. R. Thermoelasticity and contact // J. Therm. Stresses. – 1999. – **22**, No. 4-5. – P. 513–522.
8. Johnson K. L., Greenwood J. A., Higginson J. G. The contact of elastic regular wavy surfaces // Int. J. Mech. Sci. – 1985. – **27**, No. 6. – P. 383–396.

МЕТОД ОЦЕНКИ КОНТАКТНОГО ТЕРМИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КОНТАКТНОЙ ПАРЫ ПРИ НАЛИЧИИ СИСТЕМЫ ПОВЕРХНОСТНЫХ КРУГОВЫХ ВЫЕМОК

Предложен метод определения контактного термического сопротивления в случае взаимодействия двух полубесконечных тел при наличии системы круговых выемок на поверхности одного из них. Построена осесимметричная модель такого контакта, которая учитывает суммарное влияние конгломерата неоднородностей на распределение температуры в окрестности произвольно выбранного дефекта. На этом основании сформулирована и решена осесимметричная контактная задача теплопроводности, которая методом интегральных преобразований сведена к интегральному уравнению Абеля. Определение контактного термического сопротивления реализовано путем усреднения реального скачка температуры на отдельной выемке. Выполнен сравнительный анализ результатов, полученных на основании предложенного подхода, с известными в литературе.

METHOD FOR EVALUATION OF CONTACT THERMAL RESISTANCE OF CONTACT PAIR IN THE PRESENCE OF A SET OF SURFACE PENNY-SHAPED RECESSES

The paper presents a method for evaluation of contact thermal resistance in the case of interaction between two semi-infinite solids in the presence of a set of uniformly distributed surface penny-shaped recesses. The axially symmetric model of such thermal contact is constructed. It takes into account the total influence of the conglomerate of defects in the vicinity of arbitrary selected one. The corresponding axially symmetric problem is reduced to the integral Abel's equation. The procedure for determination of the contact thermal resistance is based on averaging a real temperature jump on the surface of defect. Comparison of the results obtained with that known in the literature is carried out.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
06.09.04