УДК 517.95

О. М. Боценюк

ПРО ОЦІНКИ СПАДАННЯ ЗА ЧАСОМ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗМІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КВАЗІЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянуто змішану задачу для одного квазілінійного параболічного рівняння другого порядку в необмеженій області. Встановлено оцінки спадання розв'язків, які залежать від геометрії області.

Дослідженню стабілізації при $t \to \infty$ розв'язків різних змішаних задач для параболічних рівнянь в необмежених областях присвячено праці [1–3, 5] (див. також літературу в них). Характерною особливістю цих праць є те, що в оцінках спадання розв'язків враховується деяка геометрична характеристика області.

Формулювання задачі та основний результат. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, – необмежена область з достатньо гладкою межею Γ і $\Sigma = \Gamma \times (0, \infty)$, $Q = \Omega \times (0, \infty)$. Розглянемо в Q змішану задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \left(a_i(x,t,\nabla u) + g_i(x,t,u) \right) = 0, \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i(x,t,\nabla u) + g_i(x,t,u) \right) \nu_i = 0, \qquad (x,t) \in \Sigma, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{3}$$

Тут $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – одиничний вектор нормалі до межі $\Gamma = \partial\Omega$; $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$. Припускаємо, що функції $a_i(x,t,\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $g_i(x,t,\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,\ldots,n$, є типу Каратеодорі, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функції $\xi \to a_i(x,t,\xi)$, $\eta \to g_i(x,t,\eta)$ неперервні і $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $\forall \eta \in \mathbb{R}$ функції $(x,t) \to a_i(x,t,\xi)$, $(x,t) \to g_i(x,t,\eta)$ вимірні. Будемо припускати виконання таких умов:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i(x,t,\xi) - a_i(x,t,\xi^*) \right)(\xi_i - \xi_i^*) \ge \mu \left| \xi - \xi^* \right|^2, \qquad \mu > 0, \tag{4}$$

$$\left| a_i(x,t,\xi) - a_i(x,t,\xi^*) \right| \le M \left| \xi - \xi^* \right|, \qquad M > 0, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{5}$$

$$a_i(x,t,0) \equiv 0, \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{6}$$

$$\left| g_i(x,t,\eta) - g_i(x,t,\eta^*) \right| \le K \left(|\eta|^\alpha + \left|\eta^*\right|^\alpha \right) \left| \eta - \eta^* \right|, \quad \alpha > 0, \quad K > 0, \tag{7}$$

$$g_i(x,t,0) \equiv 0, \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{8}$$

Опишемо області, в яких розглядається задача (1)–(3). Розглянемо функцію $l(v) = \inf\{ \mathrm{mes}_{n-1}(\partial G \cap \Omega) : \mathrm{mes}_n G = v,\ G$ – довільна відкрита підмножина в $\Omega \}$. Нехай функція $g(v)$, $v > 0$, неперервна, монотонно неспадна і нехай існує таке $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \le 1/n$, що функція $v^{1-\varepsilon_0}/g(v)$ монотонно неспадна і $l(v) \ge g(v)$ $\forall v > 0$. Позначимо

$$P(v) = \int_0^v \frac{d\xi}{\xi} \int_0^\xi \frac{\theta\, d\theta}{g^2(\theta)}$$

і нехай неперервна функція $w(t),\ t > 0$, є оберненою до $P(v)$. Будемо припускати, що існує таке $æ > 0$, що функція $t \to t^{æ}/w(t)$ монотонно неспадна. Скажемо, що область Ω задовольняє умову **A**, якщо існують функції $g(v),\ w(t)$, які задовольняють перераховані вище умови.

Мета запропонованої роботи – знайти умови розв'язності задачі (1)–(3) і дослідити поведінку розв'язку при $t \to \infty$ залежно від геометрії межі Γ. У випадку $g_i(x,t,u) \equiv 0$ і при дещо загальніших припущеннях на $a_i(x,t,\xi)$ задачу (1)–(3) (з присутнім у правій частині рівняння (1) нелінійним членом $\lambda |u|^{q-1} u,\ q \ge 1,\ \lambda \ge 0$) досліджено в роботі [3].

Позначення. Нехай Ω – задана область в $\mathbb{R}^n$. Норму в просторі $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, позначаємо через $|\cdot|_p = |\cdot|_{p,\Omega}$ і покладемо також $|\cdot| = |\cdot|_2$. Нехай $H^1(\Omega)$ є L^2-простором Соболєва. Позначимо через V замикання в $H^1(\Omega)$ за нормою $\|v\| = |\nabla v| + |v|$ множини функцій із класу $C_0^1(\mathbb{R}^n)$, неперервно диференційовних з компактним носієм в $\mathbb{R}^n$. Покладемо $H = L^2(\Omega)$. Простір V вкладений в H і щільний в ньому, причому вкладення неперервне. Нехай H^* і V^* позначають простори, спряжені до H і V. Ототожнюючи за теоремою Ріса H і H^*, приходимо до включень $V \subset H \subset V^*$. Через $\langle \cdot,\cdot \rangle$ позначимо скалярний добуток між V^* і V. Означимо оператори $A(t) : V \to V^*$ і $G(t) : V \to V^*$ за допомогою рівностей

$$\left\langle A(t)u, v \right\rangle = \sum_{i=1}^n \int_\Omega a_i(x,t,\nabla u) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = a(t; u, v) \qquad \forall u, v \in V\,,$$

$$\left\langle G(t)\, u, v \right\rangle = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega g_i(x,t,u) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = g(t; u, v)\,,$$

для $u \in V \cap L^\infty(\Omega),\ v \in V$ і для майже всіх $t > 0$. Через u' позначаємо похідну за змінною t в $\mathscr{D}^*(\,]0,T[\,; V^*) = L(\mathscr{D}(\,]0,T[\,); V^*)$.

Означення. *Слабким розв'язком* задачі (1)–(3) назвемо функцію $u(x,t)$ таку, що $u \in L^2(0,T;V)$, $u \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$, $u' \in L^2(0,T;V^*)$ $\forall T > 0$, $u(0) = u_0$, $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, і $u(t)$ задовольняє наступне рівняння:

$$u'(t) + A(t)u(t) = G(t)u(t) \qquad \text{в} \qquad \mathscr{D}^*(\,]0,T[\,; V^*)\,. \tag{9}$$

Теорема 1. *Нехай Ω задовольняє умову* **A** *і виконуються умови* (4)–(8). *Припустимо, що*

$$\sup_{t>0} \left[(w(t)+1)^{-\alpha} t^{1/2} \right] \le \mathcal{L}\,, \tag{10}$$

де $\mathcal{L}$ – стала. Тоді існує додатна константа δ така, що, якщо $|u_0|_1 + |u_0|_\infty < \delta$, то задача (1)–(3) *має єдиний слабкий глобальний розв'язок $u(x,t)$ і для нього виконується оцінка*

$$|u(t)|_\infty \le c\left(|u_0|_\infty + |u_0|_1\right)(w(t+1))^{-1}, \qquad t \ge 0\,. \tag{11}$$

Допоміжні твердження. Розглянемо задачу

$$u'(t) + A(t)u(t) = F(t), \qquad u(0) = 0\,, \tag{12}$$

де $F \in L^p(0,T;V^*)$ задається за допомогою рівності

$$\left\langle F(t), v \right\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} f_i(x,t) \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx \qquad \forall v \in V\,, \tag{13}$$

і $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ – задана функція, $\mathbf{f} \in L^p\big(0,T;L^\infty(\Omega) \bigcap L^2(\Omega)\big)$, $p > 2$, $T > 0$.

Позначимо $A_k(t) = \{x \in \Omega : |u(x,t)| > k\}$, $a_k(t) = \sup\limits_{0 \le s \le t} \operatorname{mes} A_k(s)$, $k \ge 0$, $t \ge 0$, $\zeta = (\operatorname{sgn} u) \max\{|u| - k, 0\}$. Надалі літерою c будемо позначати різні додатні сталі.

Теорема 2. *Для розв'язку* u *задачі* (12) *має місце оцінка*

$$|u(t)|_\infty \le$$

$$\le k + c\,(a_k(t))^{-1/q} \big(P(a_k(t))\big)^\gamma \left(\int_0^t |\mathbf{f}(s)|_q^p\, ds \right)^{1/p} \quad \forall k > 0, \quad \forall t \in [0,T]\,, \tag{14}$$

де $\gamma = (p-2)/2p$, $2 < p \le \infty$, $2p^{-1} + (\varepsilon_0 q)^{-1} < 1$, $\varepsilon_0 \le 1/n$, *а при* $p = \infty$ *замість інтеграла в* (14) *буде* $\sup\limits_{[0,t]} |\mathbf{f}(s)|_q$ і $\gamma = \dfrac{1}{2}$.

Д о в е д е н н я. Помноживши скалярно обидві частини рівняння (12) на ζ і враховуючи (13), (4), одержимо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\zeta(t)|^2 + \mu |\nabla\zeta(t)|^2 \le -\int_{A_k(t)} \mathbf{f} \cdot \nabla\zeta\, dx\,. \tag{15}$$

Маємо

$$\left| -\int_{A_k(t)} \mathbf{f} \cdot \nabla\zeta\, dx \right| \le \int_{A_k(t)} |\mathbf{f}|\, |\nabla\zeta|\, dx \le \frac{\varepsilon}{2} \int_{A_k(t)} |\nabla\zeta|^2\, dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{A_k(t)} |\mathbf{f}|^2\, dx \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} |\nabla\zeta(t)|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |\mathbf{f}(t)|_q^2 \left(\operatorname{mes} A_k(t)\right)^r \qquad \forall \varepsilon > 0\,, \tag{16}$$

де $r = (q-2)/q$. Із (15) за допомогою (16), вибравши ε достатньо малим, отримаємо

$$\frac{d}{dt}|\zeta(t)|^2 + c\,|\nabla\zeta(t)|^2 \le c\,|\mathbf{f}(t)|_q^2 \left(\operatorname{mes} A_k(t)\right)^r. \tag{17}$$

Позначимо $A_k^+(v) = \{x \in \Omega : v(x) > k\}$. У роботі [2] доведено нерівність

$$\int_{A_k^+(v)} (v(x) - k)^2\, dx \le c\, P\big(\operatorname{mes} A_k^+(v)\big) \int_{A_k^+(v)} |\nabla v|^2\, dx \qquad \forall v \in V\,. \tag{18}$$

Для функції $\zeta(t)$ за допомогою (18) отримаємо нерівність

$$|\zeta(t)|^2 \le c\, P\big(\operatorname{mes} A_k(t)\big)\, |\nabla\zeta(t)|^2\,, \qquad k \ge 0\,. \tag{19}$$

Із (17), враховуючи (19), випливає

$$\frac{d}{dt}|\zeta(t)|^2 + \frac{c\,|\zeta(t)|^2}{P\big(\operatorname{mes} A_k(t)\big)} \le c\,|\mathbf{f}(t)|_q^2 \left(\operatorname{mes} A_k(t)\right)^r. \tag{20}$$

Інтегруючи нерівність (20), отримуємо

$$|\zeta(t)|^2 \le c\int_0^t \exp\left(-c\int_s^t \frac{d\sigma}{P(\mathrm{mes}\,A_k(\sigma))}\right)|\mathbf{f}(s)|_q^2\,(\mathrm{mes}\,A_k(s))^r\,ds\,. \tag{21}$$

Оскільки функція P монотонно неспадна, то з (21) випливає

$$|\zeta(t)|^2 \le c\,a_k^r(t)\int_0^t \exp\left(-\frac{c(t-s)}{P(a_k(t))}\right)\,|\mathbf{f}(s)|_q^2\,ds\,. \tag{22}$$

Застосувавши до інтеграла в (22) нерівність Гельдера з показниками $p/(p-2)$ і $p/2,\ p>2$, одержимо

$$|\zeta(t)|^2 \le c\,a_k^r(t)\big(P(a_k(t))\big)^{(p-2)/p}\left(\int_0^t |\mathbf{f}(s)|_q^p\,ds\right)^{2/p}. \tag{23}$$

Зазначимо, що з (22) також випливає нерівність

$$|\zeta(t)|^2 \le c\,a_k^r(t)\,P(a_k(t))\,\sup_{[0,t]}|\mathbf{f}(s)|_q^2\,. \tag{24}$$

Якщо $h>k>0$, то $|\zeta(t)|^2 \ge (h-k)^2\,\mathrm{mes}\,A_h(t)$, і тому з (23) дістанемо

$$a_h(t) \le c\,(h-k)^{-2}\,a_k^r(t)\big(P(a_k(t))\big)^{\gamma}\left(\int_0^t |\boldsymbol{f}(s)|_q^p\,ds\right)^{2/p}, \tag{25}$$

де $\gamma=(p-2)/p$. Застосуємо до (25) такуу лему.

Лема 1. *Нехай* φ *– невід'ємна і монотонно незростаюча функція на* $[k_0,\infty)$ *така, що*

$$\varphi(h) \le C(h-k)^{-\alpha}\,\varphi^{\beta}(k)\big(P(\varphi(k))\big)^{\gamma}, \qquad h>k>k_0\,,$$

де $C,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ *– додатні сталі,* P *– невід'ємна монотонно неспадна функція на* $[0,\infty)$ *така, що* $\exists\varepsilon>0\ \ \forall\lambda\in(0,1],\ \ \forall\xi\ge 0\ \ P(\lambda\xi)\le\lambda^{\varepsilon}P(\xi)$. *Тоді* $\varphi(k_0+d)=0$, *де*

$$d^{\alpha} = 2^{\alpha-\mu}C(\varphi(k_0))^{\beta-1}\big(P(\varphi(k_0))\big)^{\gamma}, \qquad \mu=\alpha/(1-\beta-\varepsilon\gamma)<0\,. \tag{26}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо послідовність $k_r = k_0 + d - 2^{-r}d,\ r\in\mathbb{Z}_+$. За припущенням

$$\varphi(k_{r+1}) \le C\,2^{(r+1)\alpha}\,d^{-\alpha}\varphi^{\beta}(k_r)\big(P(\varphi(k_r))\big)^{\gamma}, \qquad r\in\mathbb{Z}_+\,. \tag{27}$$

Доведемо за індукцією, що

$$\varphi(k_r) \le 2^{r\mu}\varphi(k_0)\,, \qquad \text{де} \qquad \mu=\alpha/(1-\beta-\varepsilon\gamma)<0\,. \tag{28}$$

При $r=0$ нерівність (28) тривіальна. Припустимо, що вона вірна при $1,\dots,r$, і покажемо, що тоді вона виконується і при $r+1$. Дійсно, згідно з (27)

$$\varphi(k_{r+1}) \le C\,2^{(r+1)\alpha}\,d^{-\alpha}\,2^{r\mu\beta+r\mu\varepsilon\gamma}\,\varphi^{\beta}(k_0)\big(P(\varphi(k_0))\big)^{\gamma}$$

і, враховуючи (26), отримуємо, що $\varphi(k_{r+1}) \le 2^{(r+1)\mu}$. Права частина цього виразу прямує до нуля при $r\to+\infty$, і, отже, $0\le\varphi(k_0+d)\le\varphi(k_r)\to 0$. ◊

Застосувавши лему 1 до (25) ($\varphi(k)=a_k(T),\ C=c\left(\int_0^T |\mathbf{f}(s)|_q^p\,ds\right)^{2/p},\ \alpha=2$, $\beta=r,\ \ \varepsilon=2\varepsilon_0$), отримаємо $a_{k_0+d}(T)=0$, і тому $|u(t)|_{\infty}\le k_0+d\ \ \forall t\in[0,T]$, $\forall k_0>0$. Тоді, враховуючи (26), одержимо (14) при $2<p<\infty$. При $p=+\infty$ доведення аналогічне, тільки замість (23) розглядаємо (24). ◊

Оцінка розв'язків.

Д о в е д е н н я теореми 1. Використаємо метод зрізання. Для заданої додатної функції $m \in C([0,+\infty))$ означимо оператор S_m на V:

$$S_m(v) = \min\{\max\{v(x),\ -m(t)\},\ m(t)\}, \qquad v \in V, \quad t \ge 0.$$

Надалі припускаємо, що $0 < m(t) \le \bar{m}$ $\forall t \ge 0$, де $\bar{m} = \text{const}$. Розглянемо «апроксимуючу» задачу

$$u_m'(t) + A(t)u_m(t) = G(t)S_m(u_m(t)), \qquad u_m(0) = u_0. \tag{29}$$

Застосовуючи метод Фаедо – Гальоркіна, покажемо, що для всіх $u_0 \in L^2(\Omega)$ і $m(t)$ задача (29) має єдиний глобальний розв'язок $u_m \in L^2_{\text{loc}}(0,\infty; V)$, $u_m \in C([0,\infty); H)$. Нехай $\{w_1, w_2, \ldots\}$ – повна в V система лінійно незалежних функцій з компактним носієм в $\mathbb{R}^n$ і нехай V_k – лінійна оболонка множини $\{w_1, \ldots, w_k\}$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ означимо наближений розв'язок u_{mk} задачі (29) таким чином:

$$u_{mk}(t) \in V_k,$$

$$(u_{mk}', v_k) + a(t; u_{mk}(t), v_k) = g(t; S_m(u_{mk}(t)), v_k) \qquad \forall v_k \in V_k, \tag{30}$$

$$u_{mk}(0) = u_{0k}, \tag{31}$$

де через $(\cdot,\cdot)$ позначено скалярний добуток в $L^2(\Omega)$ і u_{0k} у (31) є ортогональною проекцією в H функції u_0 на V_k. Поклавши в (30) $v_k = u_{mk}(t)$ і застосувавши лему Ґронуолла, отримаємо апріорну оцінку

$$|u_{mk}(t)|^2 + \int_0^t |\nabla u_{mk}|^2\, ds \le c\,|u_0|^2 \exp(c\,\bar{m}^{2\alpha} t) \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{32}$$

Аналогічним способом, як при доведенні теореми 3.1 у [4, c. 226], виводимо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} \left| F\left[\chi_{[0,T]}(t) u_{mk}(t)\right](\tau)\right|^2 d\tau \le c(T) \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{4}, \tag{33}$$

де $\chi_{[0,T]}(t)$ – характеристична функція $[0,T]$ і $F[\varphi](\tau)$ – перетворення Фур'є функції $\varphi(t)$ за змінною t. Оцінки (32), (33) і теорема 2.2 з [4, c. 220] дозволяють стверджувати, що існують функція $u_m \in L^2(0,T;V)$, $u_m \in L^\infty(0,T;H)$ і підпослідовність $u_{mk'}$ такі, що $u_{mk'} \to u_m$ слабко в $L^2(0,T;V)$, $u_{mk'} \to u_m$ *-слабко в $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ і сильно в $L^2(0,T;L^2(\Omega'))$, $k' \to \infty$, де Ω' – будь-яка обмежена підобласть області Ω. Ці результати про збіжність дають можливість з використанням методу монотонності перейти до границі в (30), (31) і отримати існування глобального розв'язку задачі (29). Єдиність розв'язку доводимо за допомогою леми Ґронуолла.

Позначимо $\Omega(R) = \{x : |x| < R,\ x \in \Omega\}$ (вважаємо, що початок координат належить Ω). Нехай w_m є розв'язком такої задачі:

$$w_m' + A(t)w_m = G(t)\left(\chi_{\Omega(R_0)} S_m(w_m)\right), \quad w_m(0) = \chi_{\Omega(R_0)} u_0, \quad R_0 > 0, \tag{34}$$

де $\chi_{\Omega(R)}$ – характеристична функція $\Omega(R)$. Помножимо обидві частини рівняння (34) на $\theta^2(x) w_m(x,t)$, де

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & |x| \geq R + \rho, \\ (|x| - R)/\rho, & R < |x| < R + \rho, \\ 0, & |x| \leq R, \end{cases} \quad R > R_0, \quad \rho > 0 .$$

Тоді отримаємо

$$|\theta w_m(t)|^2 + 2\mu \int_0^t \int_\Omega \theta^2 |\nabla w_m|^2 \, dx \, d\tau \leq 4M \int_0^t \int_\Omega |\nabla w| \, |\theta| \, |w| \, |\nabla \theta| \, dx \, d\tau . \qquad (35)$$

Із (35) так само, як у твердженні 3 з [5], виводимо $\forall R > R_0$ оцінку

$$\int_{\Omega_R^c} w_m^2(x,t) \, dx + \int_0^t \int_{\Omega_R^c} |\nabla w_m|^2 \, dx \, d\tau \leq c \, |u_0|^2 \exp\left(-c(R - R_0)^2/t\right), \qquad (36)$$

де $\Omega_R^c = \Omega \setminus \Omega(R)$. Помноживши обидві частини рівняння (34) на функцію $\psi(x) = 1 - \theta(x)$, $\rho = 1$, і проінтегрувавши на $\Omega \times [0,t]$, одержимо

$$\int_\Omega w_m(x,t) \psi(x) \, dx + \int_0^t a\left(\tau; w_m(\tau), \nabla \psi\right) d\tau = \int_{\Omega(R_0)} u_0(x) \, dx . \qquad (37)$$

Із (37), враховуючи (36), виводимо співвідношення

$$\lim_{R \to \infty} \int_\Omega w_m(x,t) \psi(x) \, dx = \int_{\Omega(R_0)} u_0(x) \, dx . \qquad (38)$$

Означимо $v^+ = \max\{v, 0\}$, $v^- = \min\{v, 0\}$. Нехай $\bar{w}_m$ і $\underline{w}_m$ − розв'язки задачі (34) з початковими умовами u_0^+ і u_0^- відповідно. Тоді завдяки принципу порівняння розв'язків для (34) маємо $\underline{w}_m(x,t) \leq w_m(x,t) \leq \bar{w}_m(x,t)$ для майже всіх $x \in \Omega$. Використовуючи (38) для $\bar{w}_m$ і $\underline{w}_m$, за допомогою теореми Фату виводимо

$$|\bar{w}_m|_1 \leq |u_0^+|_1 , \qquad |\underline{w}_m|_1 \leq |u_0^-|_1 \qquad \forall t \geq 0 .$$

Маємо

$$|w_m(t)|_1 \leq |\bar{w}_m|_1 + |\underline{w}_m|_1 \leq |u_0^+|_1 + |u_0^-|_1 = |u_0|_1 .$$

Отже, $|w_m(t)|_1 \leq |u_0|_1 \quad \forall t \geq 0$.

Виконаємо граничний перехід при $R_0 \to \infty$ в (34). Нехай $R_0 = k \in \mathbb{N}$ і w_{mk} − відповідний розв'язок задачі (34). Оскільки послідовності w_{mk} і w'_{mk}, $k \in \mathbb{N}$, обмежені в $L^2(0,T;V)$ і $L^2(0,T;V^*)$ відповідно, то, використовуючи теорему 2.1 з [4, с. 217], виділимо підпослідовність $w_{mk'}$ таку, що $w_{mk'} \to \tilde{u}_m$ слабко в $L^2(0,T;V)$ і сильно в $L^2(0,T;L^2(\Omega'))$, $k' \to \infty$, де Ω' − будь-яка обмежена підобласть області Ω. Ці результати про збіжність дозволяють перейти до границі в (34) і завдяки єдиності розв'язків матимемо, що $\tilde{u}_m = u_m$. Крім того, можемо вважати, що $w_{mk'}(t) \to u_m(t)$ сильно в $L^2(\Omega')$ $\forall t \in (0,T]$, $k' \to \infty$, $\Omega' \subset \Omega$. Тоді за допомогою теореми Фату виводимо, що

$$|u_m(t)|_{1,\Omega'} \leq |u_0|_{1,\Omega} \qquad \forall t \geq 0, \qquad \forall \Omega' \subset \Omega ,$$

звідки випливає оцінка $|u_m(t)|_{1,\Omega} \leq |u_0|_{1,\Omega} \quad \forall t \geq 0$.

Позначимо через $v_m(t)$ розв'язок на $[s,T]$ такої задачі:

$$v'_m(t)+A(t)v_m(t)=G(t)S_m(u_m(t)), \qquad v_m(s)=0, \qquad 0\le s<T\,, \qquad (39)$$

де $u_m(t)$ − розв'язок задачі (29). Застосувавши нерівність (14) до (39), при $p=\infty$ і $q=\infty$ отримаємо

$$|v_m(t)|_\infty \le k + c\left(P\left(\sup_{s\le\tau\le T}\operatorname{mes}A_k(\tau)\right)\right)^{1/2}\sup_{[s,T]}|S_m(u_m)|_\infty^{1+\alpha} \quad \forall t\in[s,T]. \quad (40)$$

Маємо $|v_m(\tau)|_1 \le |v_m(\tau)-u_m(\tau)|_1+|u_m(\tau)|_1 \le 2|u_m(s)|_1 \le 2|u_0|_1 \quad \forall\tau>s$. Використавши нерівність Чебишова, одержимо

$$\sup_{s\le\tau\le T}\operatorname{mes}A_k(\tau)) \le \frac{1}{k}\sup_{s\le\tau\le T}|v_m(\tau)|_1 \le \frac{2}{k}|u_0|_1.$$

Покладемо $k_1=\frac{2}{k}|u_0|_1$. Тоді з (40) випливає нерівність

$$|v_m(t)|_\infty \le \frac{2}{k_1}|u_0|_1 + c\,(P(k_1))^{1/2}\sup_{[s,T]}|S_m(u_m)|_\infty^{1+\alpha}. \qquad (41)$$

Розглянемо розв'язок задачі (29) з $m(t)=m_0/(w(t)+1)$, де число $m_0>0$ виберемо нижче. Нехай $s=T/2$. Тоді аналогічно, як у [3, твердження 5], маємо

$$|u_m(T)-v_m(T)|_\infty \le c\,|u_m(T/2)|_1\,(w(T/2))^{-1} \le c\,|u_0|_1\,(w(T/2))^{-1}.$$

Поклавши в (41) $k_1=w(T/2)$, $t=T$, виводимо

$$w(T/2)\,|u_m(T)|_\infty \le c\,|u_0|_1 + c\,\mathcal{L}\,m_0^{1+\alpha}, \qquad (42)$$

де $\mathcal{L}$ − стала з умови (10). Нехай $s=0$. Тоді маємо $|u_m(T)|_\infty \le$ $\le |u_m(T)-v_m(T)|_\infty + |v_m(T)|_\infty \le |u_0|_\infty + |v_m(T)|_\infty$. Поклавши в (41) $k_1=1$, $t=T$, матимемо

$$|u_m(T)|_\infty \le |u_0|_\infty + 2|u_0|_1 + c\,(P(1))^{1/2}\,m_0^{1+\alpha}. \qquad (43)$$

Додамо до (43) нерівність (42) помножену на $2^{æ}$, і тоді, враховуючи, що $w(T)\le 2^{æ}\,w(T/2)$, отримаємо

$$(w(T)+1)\,|u_m(T)|_\infty \le |u_0|_\infty + c\,|u_0|_1 + c\,m_0^{1+\alpha} \qquad \forall T>0. \qquad (44)$$

Розглянемо функцію $f(x)=a_1x^{1+\alpha}-x+a_0$, де $a_0,a_1,\alpha>0$. Неважко довести наступну лему.

Лема 2. *Якщо виконується умова*

$$a_0 < \left(\frac{1}{a_1(1+\alpha)}\right)^{1/\alpha}\frac{\alpha}{1+\alpha}\,,$$

то $f(x_0)<0$, *де* $x_0=a_0(1+\alpha)/\alpha$.

Застосуємо лему 2 до нерівності (44). Покладемо в лемі 2 $a_1=c$, $a_0=|u_0|_\infty+c\,|u_0|_1$. Тоді з (44) при $m_0=x_0=\left(|u_0|_\infty+c\,|u_0|_1\right)(1+\alpha)/\alpha$ випливає оцінка $(w(T)+1)|u_m(T)|_\infty<m_0$. Отже, $|u_m(T)|_\infty<m(T)\ \ \forall T>0$, і тому $S_m(u_m(x,t))=u_m(x,t)\ \ \forall t>0$. Тоді з (29) випливає, що функція $u_m(t)$ задовольняє рівняння (9) і для неї має місце оцінка (11). ◊

Про поведінку розв'язків при $|x| \to \infty$.

Твердження 1. *Припустимо, що виконуються умови теореми* 1 *і, крім того,* $g(v) = v^{1-\varepsilon_0}$, $\alpha > \varepsilon_0$, $u_0(x) = 0$ *при* $|x| > R_0$. *Нехай* $u(x,t)$ *є розв'язком задачі* (1)–(3), *який дається теоремою* 1. *Тоді* $\forall t > 0$ *і* $\forall R > R_0$ *має місце нерівність*

$$H_R(t) \equiv \int\limits_{\Omega_R^c} u^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_R^c} |\nabla u|^2\,dx\,d\tau \le c(u_0)\exp\left(-c(R-R_0)^2/t\right). \quad (45)$$

Д о в е д е н н я. Помножимо обидві частини рівняння (9) на $\theta^2(x)u(x,t)$, де $\theta(x)$ – функція, яка використовується при доведенні (35). Тоді, проінтегрувавши на $[0,t]$, матимемо

$$|\theta u(t)|^2 + 2\mu\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \theta^2|\nabla u|^2\,dx\,d\tau \le 4M\int\limits_0^t\int\limits_\Omega |\nabla u|\,\theta\,|u|\,|\nabla\theta|\,dx\,d\tau +$$

$$+ 2K\int\limits_0^t\int\limits_\Omega |\nabla u|\,\theta^2\,|u|^{1+\alpha}\,dx\,d\tau + 4K\int\limits_0^t\int\limits_\Omega |u|^{2+\alpha}\,|\nabla\theta|\,\theta\,dx\,d\tau\,. \quad (46)$$

Із (46) випливає нерівність

$$|\theta u(t)|_2^2 + c\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \theta^2|\nabla u|^2\,dx\,d\tau \le \frac{c}{\rho^2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \theta^2u^2dxd\tau + c\int\limits_0^t |u(\tau)|_\infty^{2\alpha}\,|\theta u(\tau)|_2^2\,d\tau\,. \quad (47)$$

Застосувавши до (47) лему Ґронуолла і врахувавши (11), отримаємо

$$H_{R+\rho}(t) \le \frac{c(u_0)}{\rho^2}\int\limits_0^t H_R(\tau)\,d\tau\,. \quad (48)$$

Із нерівності (48) аналогічно, як у твердженні 3 з [5], виводимо оцінку (45). ◊

1. *Гущин А. К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – **126**. – С. 5–45.
2. *Гущин А. К.* Об оценке интеграла Дирихле в неограниченных областях // Мат. сб. – 1977. – **99**, № 2. – С. 282–294.
3. *Тедеев А. Ф.* Оценки скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения второй смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 10. – С. 1795–1806.
4. *Темам Р.* Уравнения Навье – Стокса. – Москва: Мир, 1981. – 408 с.
5. *Ушаков В. И.* Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Мат. сб. – 1980. – **111**, № 1. – С. 95–115.

ОБ ОЦЕНКАХ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЙ ПО ВРЕМЕНИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрена смешанная задача для одного квазилинейного параболического уравнения второго порядка в неограниченной области. Установлены оценки убывания решений, которые зависят от геометрии области.

ON TIME DECAY ESTIMATES OF SOLUTIONS TO MIXED PROBLEM FOR ONE QUASI-LINEAR PARABOLIC SECOND-ORDER EQUATION

The mixed problem for one quasi-linear parabolic second-order equation in the unbounded domain is considered. The decay estimates which depend on the geometry of domain are established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
11.03.05