УДК 519.6

Б. М. Подлевський

ОДИН ДВОСТОРОННІЙ АНАЛОГ МЕТОДУ ОБЕРНЕНИХ ІТЕРАЦІЙ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

Запропоновано двосторонній аналог методу обернених ітерацій для розв'язування задач на власні значення з нелінійним спектральним параметром. Побудовано та обґрунтовано ітераційні процеси двосторонніх наближень до простого власного значення нелінійної спектральної задачі. Отримано умови на початкове наближення, які гарантують квадратичну збіжність ітераційного процесу почергових наближень до власного значення.

Значна кількість практично важливих задач, які приводять до узагальнених задач на власні значення вигляду

$$T(\lambda)y = 0$$

з операторнозначною функцією $T : C \to X(H)$ (тут $X(H)$ − множина лінійних операторів в гільбертовому просторі H, $\lambda \in C$ − спектральний параметр), яка нелінійно залежить від параметра λ, стимулює розробку ефективних методів їх дослідження. Один із підходів дослідження таких задач пов'язаний з варіаційним описом спектра. При цьому суттєву роль відіграє належне узагальнення функціонала Релея (відмінне від класичного) на нелінійну задачу.

Такий підхід бере свій початок з роботи Р. Даффіна [11], де розглядалися сильно демпфовані динамічні системи і відповідна спектральна задача для квадратичних операторних пучків

$$P(\lambda) = \lambda^2 A_0 + \lambda A_1 + A_2$$

з лінійними обмеженими самоспряженими операторами $A_i : H \to H$, $i = 0,1,2$, деякого гільбертового простору H. Було показано, що власні значення такої задачі можна характеризувати мінімаксними значеннями деяких функціоналів $\lambda(y)$, які узагальнюють класичний функціонал Релея. Ці функціонали визначалися як корені квадратного рівняння

$$\lambda^2 a_0(y) + \lambda a_1(y) + a_2(y) ,$$

де $a_i(y) = (A_i y, y)$, $i = 0,1,2$, $\forall y \in H$, так що

$$\lambda_{1,2}(y) = \frac{1}{2a_0(y)}\left(-a_1(y) \pm \sqrt{a_1(y)^2 - 4a_0(y)a_2(y)}\right).$$

Відсутність загальних методів побудови узагальнених функціоналів стимулювала теоретичний розвиток вказаного напрямку, який полягає у тому, що наперед припускається існування таких функціоналів, які мають певні властивості. Так, наприклад, для операторнозначної функції T, визначеної на деякому інтервалі $[a,b]$ дійсної осі, зі значеннями у множині $B(H)$ усіх лінійних обмежених симетричних операторів ($T : [a,b] \to B(H)$), припускають [12], що існує такий неперервний функціонал $p : H \setminus \{0\} \to (a,b)$, який має такі властивості:

1) $p(\alpha y) = p(y), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0$;

2) $(T(p(y))y,\ y) = 0$;

3) $(T'(p(y))y,\ y) > 0$.

Зрозуміло, що функціонали з вказаними властивостями існують далеко не завжди. Однак, якщо відомо, що функціонал існує, то можна побудувати теорію, яка є аналогічною до екстремальної теорії власних значень самоспряжених операторів. Такий підхід розроблявся багатьма авторами (біб-

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2005. – 48, № 3. – С. 36-45.

ліографію див., наприклад, в [1]), оскільки має численні застосування. Одне з таких застосувань – наближені методи знаходження власних значень (див. [2–6, 8–10]).

У цій роботі побудовано узагальнені функціонали Релея як для вихідної нелінійної за спектральним параметром спектральної задачі, так і для деякої допоміжної задачі (також нелінійної за спектральним параметром). Досліджено їх властивості. Використовуючи ці властивості, побудовано ітераційні процеси за власним значенням двосторонніх почергових наближень до простого власного значення вихідної нелінійної спектральної задачі.

1. Нехай H – гільбертів простір, $B(H)$ – множина лінійних обмежених самоспряжених операторів в H. Розглянемо нелінійну задачу на власні значення

$$L(\lambda)y = 0, \qquad \lambda \in (a,b), \qquad y \in H, \tag{1}$$

з операторнозначною функцією $L : (a,b) \to B(H)$, неперервно диференційовною на (a,b).

Означення 1. Нехай $p : H \setminus \{0\} \to (a,b)$ – неперервний функціонал. Якщо виконуються умови:

1°) $p(\alpha y) = p(y), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0$,

2°) $(L(p(y))y,\ y) = 0$,

3°) $(L'(p(y))y,\ y) \neq 0$,

то p називають *функціоналом Релея для оператор-функції* $L(\lambda)$, а пару (L,p) називають *системою Релея.*

Через

$$W = p(H \setminus \{0\})$$

позначимо множину значень функціонала p. Якщо $\lambda_* \in W$ і $y_* \neq 0$ – розв'язок рівняння (1), то λ_* називають власним значенням, а y_* – власним вектором, який відповідає власному значенню λ_*. Вважаємо також, що на деякому інтервалі U такому, що $W \subset U \subset (a,b)$, оператор-функція $L(\lambda)$ є тричі диференційовною, задовольняє умови

$$L'(\lambda) > 0, \qquad \lambda \in U, \tag{2}$$

або

$$L'(\lambda) < 0, \qquad \lambda \in U, \tag{3}$$

і для будь-якого $y \neq 0$ функція $(L(\lambda)\,y, y)$ має на U єдиний корінь.

Означення 2. Систему Релея називають *ізотонною за* λ *на* U, якщо виконуються умови (2), *і антитонною*, якщо виконуються умови (3).

Означення 3. Систему Релея називають *опуклою* (*вгнутою*) *за* λ *на* U, якщо

$$L''(\lambda) \geq 0 \qquad (L''(\lambda) \leq 0), \qquad \lambda \in U.$$

Поряд з нелінійною системою Релея (L,p) розглянемо лінійні системи Релея $\{L_\mu, p_\mu\}$ з компонентами

$$L_\mu(\lambda) = \lambda L'(\mu) - (\mu L'(\mu) - L(\mu)), \qquad p_\mu(y) = \mu - \frac{(L(\mu)y,y)}{(L'(\mu)y,y)},$$

для яких справджуються наступні твердження.

Лема 1. *Якщо* (L,p) – *антитонна та опукла або ізотонна та вгнута за* λ *на* U *система Релея, то її функціонал* p *зображується у вигляді*

$$p(y) = \max_{\mu \in U} p_\mu(y).$$

Лема 2. *Якщо* (L, p) − *антитонна та вгнута або ізотонна та опукла за* λ *на* U *система Релея, то її функціонал* p *зображується у вигляді*

$$p(y) = \min_{\mu \in U} p_{\mu}(y).$$

Д о в е д е н н я лем. Нехай (L, p) − антитонна та опукла (вгнута) за λ на U система Релея. Тоді функція

$$f(\lambda) = (L(\lambda)y, y)$$

є спадною і опуклою (вгнутою) за λ на U, тобто для будь-яких $\lambda, \mu \in U$

$$f'(\mu) < 0, \qquad f'(\mu)(\lambda - \mu) \le f(\lambda) - f(\mu) \qquad \Big(f'(\mu)(\lambda - \mu) \ge f(\lambda) - f(\mu) \Big).$$

Покладемо $\lambda = p(y)$. Оскільки $f(p(y)) = 0$, то останні дві нерівності набудуть вигляду

$$p(y) \ge \mu - \frac{f(\mu)}{f'(\mu)} = p_{\mu}(y) \qquad \left(p(y) \le \mu - \frac{f(\mu)}{f'(\mu)} = p_{\mu}(y) \right),$$

причому рівність досягається при $\mu = p(y)$. Звідси випливає твердження леми 1 (відповідно леми 2) для антитонних систем Релея. Для ізотонних систем Релея твердження лем встановлюються аналогічно. ◊

2. Розглянемо тепер оператор-функцію

$$Q(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{(L'(\lambda)y, y)}.$$

Якщо $p(y)$ − функціонал Релея для $L(\lambda)$, то $p(y)$ буде також функціоналом Релея для $Q(\lambda)$. Дійсно,

$$(Q(p(y))y, y) = \frac{(L(p(y))y, y)}{(L'(p(y))y, y)} = 0, \qquad y \ne 0,$$

$$(Q'(p(y))y, y) = 1 > 0, \qquad y \ne 0,$$

тобто виконуються умови ***2***° і ***3***° означення 1. Це означає, що, якщо $\langle \lambda_*, y_* \rangle$ − власна пара $L(\lambda)$, то $\langle \lambda_*, y_* \rangle$ буде також власною парою $Q(\lambda)$.

Знову ж таки поряд з нелінійною системою Релея (Q, p) розглянемо лінійні системи $\{Q_{\mu}, p_{\mu}\}$ з компонентами

$$Q_{\mu}(\lambda) = \lambda Q'(\mu) - (\mu Q'(\mu) - Q(\mu)), \qquad q_{\mu}(y) = \mu - \frac{(Q(\mu)y, y)}{(Q'(\mu)y, y)}$$

і встановимо таке твердження.

Теорема 1. (***i***) *Якщо* (L, p) − *антитонна та опукла або ізотонна та вгнута за* λ *на* U *система Релея, то існує такий окіл* $U_{\varepsilon} \subset U$, *що* (Q, p) *є ізотонною та опуклою за* λ *на* U_{ε} *системою Релея, а функціонал* p *зображується у вигляді*

$$\max_{\mu \in U_{\varepsilon}} p_{\mu}(y) = p(y) = \min_{\mu \in U_{\varepsilon}} q_{\mu}(y).$$

(***ii***) *Якщо* (L, p) − *антитонна та вгнута або ізотонна та опукла за* λ *на* U *система Релея, то існує такий окіл* $U_{\varepsilon} \subset U$, *що* (Q, p) *є ізотонною і вгнутою за* λ *на* U_{ε} *системою Релея, а функціонал* p *зображується у вигляді*

$$\max_{\mu \in U_{\varepsilon}} q_{\mu}(y) = p(y) = \min_{\mu \in U_{\varepsilon}} p_{\mu}(y).$$

Д о в е д е н н я. Нехай (L, p) − антитонна та опукла за λ на U система Релея. Тоді функція

$$f(\lambda) = (L(\lambda)y,\, y)$$

є спадною і опуклою за λ на U, тобто $f'(u) < 0$ і $f''(u) > 0$.

Оскільки функція

$$s(\lambda) = \frac{f(\lambda)f''(\lambda)}{(f(\lambda))^2}$$

при $\lambda = p(y)$ дорівнює нулеві, то існує такий окіл

$$U_\varepsilon(p(y)) = \{\mu : |\mu - p(y)| < \varepsilon(y)\}$$

значень функціонала $p(y)$ (з огляду на неперервність $s(\lambda)$), у якому

$$|\, s(\lambda)\,| = \left| \frac{f(\lambda)f''(\lambda)}{(f(\lambda))^2} \right| \le q < 1.$$

З цього випливає, що в околі $U_\varepsilon(p(y))$ функція $z'(\lambda) > 0$, оскільки

$$z'(\lambda) = 1 - \frac{f(\lambda)f''(\lambda)}{(f'(\lambda))^2}. \tag{4}$$

Тепер з теореми про середнє, застосованої до диференційовної на відрізку $[\mu, \lambda] \in U_\varepsilon(p(y))$ функції $z(\lambda) = (Q(\lambda)y, y)$:

$$z(\lambda) - z(\mu) = z'(\xi)(\lambda - \mu), \qquad \xi \in [\mu, \lambda],$$

випливає, що функція $z(\lambda)$ є зростаючою.

Розглянемо тепер поведінку функції $z'(\lambda)$ в околі $U_\varepsilon(p(y))$, враховуючи її зображення (4). Для будь-яких $\lambda < p(y)$ та $\lambda > p(y)$ отримуємо відповідно нерівності

$$z'(p(y)) - z(\lambda) = 1 - 1 + \frac{f(\lambda)f''(\lambda)}{(f'(\lambda))^2} = \frac{f(\lambda)f''(\lambda)}{(f'(\lambda))^2} > 0,$$

$$z'(\lambda) - z(p(y)) = 1 - \frac{f(\lambda)f''(\lambda)}{(f'(\lambda))^2} - 1 = -\frac{f(\lambda)f''(\lambda)}{(f'(\lambda))^2} > 0,$$

оскільки $f(\lambda) > 0$ для $\lambda < p(y)$ і $f(\lambda) < 0$ для $\lambda > p(y)$. З останніх двох нерівностей випливає, що в околі $U_\varepsilon \equiv U_\varepsilon(p(y))$ похідна $z'(\lambda)$ є зростаючою, а, отже, функція $z(\lambda)$ є опуклою в цьому околі значень функціонала $p(y)$.

Таким чином, функція $z(\lambda)$ є зростаючою та опуклою функцією, а, отже, і система Релея (Q, p) є ізотонною і опуклою за λ на U_ε. Тепер з леми 1 для системи Релея (L, p) і леми 2 для (Q, p) випливає твердження (***i***) теореми. Аналогічно доводиться твердження (***ii***) . ◊

3. Теорема 1 дозволяє побудувати та обґрунтувати ітераційний алгоритм двосторонніх наближень до власного значення нелінійної задачі (1). Для зручності обґрунтування алгоритму будемо будувати його аналогічно, як у роботі [8], тобто будемо припускати, що є відомим нове наближення до власного вектора $y^{(k)}$ і за ним визначати двосторонні наближення до власного значення $\lambda^{[k]} \equiv p(y^{(k)})$ у вигляді

$$\lambda^{(0)} < \lambda^{(2)} < \ldots < \lambda^{(2m)} < \ldots < \lambda^{[k]} < \ldots < \lambda^{(2m-1)} < \ldots < \lambda^{(3)} < \lambda^{(1)}. \tag{5}$$

Таким чином, алгоритм складається із зовнішніх ітерацій за власним вектором і внутрішніх − за власним значенням.

Для випадку антитонної та опуклої або ізотонної і вгнутої за λ на U системи Релея ітераційний процес за власним значенням запишемо у вигляді

$$\lambda^{(2m+1)} = \lambda^{(2m)} - \frac{(Q(\lambda^{(2m)})y^{(k)}, y^{(k)})}{(Q'(\lambda^{(2m)})y^{(k)}, y^{(k)})},$$

$$\lambda^{(2m+2)} = \lambda^{(2m+1)} - \frac{(L(\lambda^{(2m+1)})y^{(k)}, y^{(k)})}{(L'(\lambda^{(2m+1)})y^{(k)}, y^{(k)})}, \tag{6}$$

$$k,\ m = 0,1,2,\dots, \qquad \lambda^{(0)} \in (\lambda_* - \delta, \lambda_*),$$

а для випадку антитонної і вгнутої або ізотонної і опуклої за λ на U системи Релея − у вигляді

$$\lambda^{(2m+1)} = \lambda^{(2m)} - \frac{(L(\lambda^{(2m)})y^{(k)}, y^{(k)})}{(L'(\lambda^{(2m)})y^{(k)}, y^{(k)})},$$

$$\lambda^{(2m+2)} = \lambda^{(2m+1)} - \frac{(Q(\lambda^{(2m+1)})y^{(k)}, y^{(k)})}{(Q'(\lambda^{(2m+1)})y^{(k)}, y^{(k)})}, \tag{7}$$

$$k,\ m = 0,1,2,\dots, \qquad \lambda^{(0)} \in (\lambda_* - \delta, \lambda_*).$$

Зауваження 1. Якщо початкове наближення $\lambda^{(0)} \in (\lambda_*, \lambda_* + \delta)$, то для випадку антитонної та опуклої або ізотонної і вгнутої за λ на U системи Релея ітераційний процес за власним значенням запишеться у вигляді (7), а для випадку антитонної і вгнутої або ізотонної і опуклої за λ на U системи Релея − у вигляді (6).

Для обох випадків зовнішні ітерації, тобто ітерації за власним вектором, проводимо за формулою

$$Ay^{(k+1)} = By^{(k)}, \qquad k = 0,1,2,\dots, \tag{8}$$

де

$$A \equiv \lambda^{[k]}L'(\lambda^{[k]}) - L(\lambda^{[k]}), \qquad B \equiv L'(\lambda^{[k]}).$$

Отже, алгоритм складається з таких кроків.

Крок 1. Задаємо $\lambda^{(0)}$, $y^{(0)}$.

Крок 2. Для $k = 1,2,\dots$ знаходимо $y^{(k)}$ за формулою (8).

Крок 3. За знайденим $y^{(k)}$ для $m = 0,1,2,\dots$ знаходимо оцінки $\lambda^{(2m+1)}$ і $\lambda^{(2m+2)}$ за формулами (6) або (7).

Тепер сформулюємо твердження, яке обґрунтовує двосторонні наближення до власного значення задачі у вигляді (5). Для спрощення запису верхній індекс зовнішніх ітерацій (k) будемо опускати. Введемо такі позначення:

$$U_\delta(\lambda_*) = \{\lambda : |\lambda - \lambda_*| < \delta\},$$

$$m_1 = \min_{\lambda \in U_\delta(\lambda_*)} |(L'(\lambda)y, y)|, \qquad M_1 = \max_{\lambda \in U_\delta(\lambda_*)} |(L''(\lambda)y, y)|,$$

$$m_2 = \min_{\lambda \in U_\delta(\lambda_*)} |(Q'(\lambda)y, y)|, \qquad M_2 = \max_{\lambda \in U_\delta(\lambda_*)} |(Q''(\lambda)y, y)|.$$

Теорема 2. *Якщо для деякого* $\lambda^{(0)} \in U_\delta(\lambda_*)$ *виконуються умови*

$$\frac{(Q(\lambda^{(0)})y,y)}{(Q'(\lambda^{(0)})y,y)} > -\frac{2}{M_2}, \qquad \lambda^{(0)} \in (\lambda_* - \delta, \lambda_*), \tag{9}$$

$$\frac{1}{(Q'(\lambda^{(1)})y,y)} > N, \qquad \lambda^{(1)} \in (\lambda_*, \lambda_* + \delta), \tag{10}$$

де

$$N = \max_{\lambda \in (\lambda_* - \delta, \lambda_*)} \left| \frac{(Q(\lambda)y,y)(Q''(\lambda)y,y)}{(Q'(\lambda)y,y)^2} \right|,$$

причому

$$q_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1 M_2^2}{m_1 m_2^2}\right)^{1/3} \left|\lambda^{(0)} - \lambda^{[k]}\right| < 1, \qquad q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{M_2 M_1^2}{m_2 m_1^2}\right)^{1/3} \left|\lambda^{(1)} - \lambda^{[k]}\right| < 1, \tag{11}$$

то ітераційний процес (6) *альтернуючих наближень у вигляді* (5) *збігається до власного значення задачі* (1) *для кожного* $y^{(k)}$, *причому для похибок відповідно зліва та справа справджуються оцінки*

$$\left|\lambda^{(2m)} - \lambda^{[k]}\right| < q_0^{4^m - 1} \left|\lambda^{(0)} - \lambda^{[k]}\right|, \qquad \left|\lambda^{(2m-1)} - \lambda^{[k]}\right| < q_1^{4^m - 1} \left|\lambda^{(1)} - \lambda^{[k]}\right|. \tag{12}$$

Д о в е д е н н я. Спочатку доведемо, що парні наближення монотонно зростають, а непарні – монотонно спадають. Для цього розглянемо різницю $\lambda^{(2m+2)} - \lambda^{(2m)}$. Увівши позначення

$$z(\lambda) = (Q(\lambda)y, y),$$

з (6) отримуємо

$$\lambda^{(2m+2)} = \lambda^{(2m)} - z\left(\lambda^{(2m)} - \frac{z(\lambda^{(2m)})}{z'(\lambda^{(2m)})}\right) - \frac{z(\lambda^{(2m)})}{z'(\lambda^{(2m)})} \tag{13}$$

або

$$\lambda^{(2m+2)} - \lambda^{(2m)} = -\frac{z(\lambda^{(2m)})}{z'(\lambda^{(2m)})} \cdot \left(1 + \frac{z''(\xi^{(2m)})}{2} \frac{z(\lambda^{(2m)})}{z'(\lambda^{(2m)})}\right), \tag{14}$$

$$\lambda^{(2m)} < \xi^{(2m)} < \lambda^{(2m+1)}.$$

Доведемо за індукцією, що

$$\lambda^{(2m+2)} - \lambda^{(2m)} > 0 \tag{15}$$

для будь-якого m. Для $m = 0$ маємо

$$\lambda^{(2)} - \lambda^{(0)} = -\frac{z(\lambda^{(0)})}{z'(\lambda^{(0)})} \cdot \left(1 + \frac{z''(\xi^{(0)})}{2} \frac{z(\lambda^{(0)})}{z'(\lambda^{(0)})}\right).$$

За умовою теореми $\lambda^{(0)} \in (\lambda_* - \delta, \lambda_*)$, тому $-\dfrac{z(\lambda^{(0)})}{z'(\lambda^{(0)})} > 0$ і, враховуючи, що $z''(\xi^{(0)}) < M_2$, а також умову (9), отримуємо

$$1 + \frac{z''(\xi^{(0)})}{2} \frac{z(\lambda^{(0)})}{z'(\lambda^{(0)})} > 1 - \frac{z''(\xi^{(0)})}{M_2} > 0.$$

Отже, $\lambda^{(2)} - \lambda^{(0)} > 0$. Далі переконаємося, що

$$\lambda^{(2)} < \lambda^{[k]}. \tag{16}$$

З другої з рівностей (6) маємо

$$\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} = z(\lambda^{(1)})$$

або

$$\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} = \frac{f(\lambda^{(1)})}{f'(\lambda^{(1)})} - \frac{f(\lambda^{[k]})}{f'(\lambda^{(1)})}.$$

Застосувавши тепер теорему про середнє, отримуємо

$$\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} = \frac{(\lambda^{(1)} - \lambda^{[k]})f'(\xi^{(1)})}{f'(\lambda^{(1)})}, \tag{17}$$

де $\xi^{(1)} \in (\lambda^{[k]}, \lambda^{(1)})$. Оскільки $f(\lambda)$ − спадна та опукла або зростаюча та вгнута за λ на U функція, то $\frac{f'(\xi^{(1)})}{f'(\lambda^{(1)})} > 1$. Отже,

$$\frac{(\lambda^{(1)} - \lambda^{[k]})f'(\xi^{(1)})}{f'(\lambda^{(1)})} > \lambda^{(1)} - \lambda^{[k]}.$$

Тепер з (17) отримуємо, що

$$\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)} > \lambda^{(1)} - \lambda^{[k]},$$

звідки випливає потрібна нерівність (16).

Припустимо тепер, що (15) виконується при $m = n - 1$ і доведемо, що (15) виконується для $m = n$, тобто $\lambda^{(2n+2)} - \lambda^{(2n)} > 0$.

Оскільки $\lambda^{(2n)} < \lambda^{[k]}$ і виконуються нерівності (15) для $m = 0, 1, \ldots, n - 1$, то неважко переконатися, використовуючи твердження теореми 1, що для антитонної та опуклої або ізотонної і вгнутої за λ на U системи Релея справджуються нерівності

$$-\frac{z(\lambda^{(2n)})}{z'(\lambda^{(2n)})} > 0, \qquad \left|\frac{z(\lambda^{(2n)})}{z'(\lambda^{(2n)})}\right| < \left|\frac{z(\lambda^{(0)})}{z'(\lambda^{(0)})}\right|.$$

Звідси випливає, що

$$\lambda^{(2n+2)} - \lambda^{(2n)} =$$

$$= -\frac{z(\lambda^{(2n)})}{z'(\lambda^{(2n)})} \cdot \left(1 - \frac{z''(\xi^{(2n)})}{2}\left|\frac{z(\lambda^{(2n)})}{z'(\lambda^{(2n)})}\right|\right) > 1 - \frac{z''(\xi^{(2n)})}{2}\left|\frac{z(\lambda^{(0)})}{z'(\lambda^{(0)})}\right|.$$

Тепер, враховуючи, що $z''(\xi^{(2n)}) < M_2$, а також умову (9), отримуємо

$$\lambda^{(2n+2)} - \lambda^{(2n)} > 1 - \frac{z''(\xi^{(2n)})}{M_2} > 0,$$

що й потрібно було довести. Нерівність $\lambda^{(2n+2)} < \lambda^{[k]}$ встановлюємо за тією ж схемою, що й нерівність (16). Таким чином, парні наближення монотонно зростають. Аналогічно доводимо, що непарні наближення монотонно спадають.

Оскільки парні наближення монотонно зростають і обмежені зверху числом $\lambda^{[k]} \equiv p(y^{(k)})$, а непарні − монотонно спадають і обмежені знизу цим же числом $\lambda^{[k]} \equiv p(y^{(k)})$, то вони мають границю, яка з огляду на неперервність функцій $f(\lambda)$ і $z(\lambda)$ та умови $f'(\lambda^{[k]}) = (L'(\lambda^{[k]})y^{(k)}, y^{(k)}) \neq 0$ (умова ***3°*** означення 1) і $z'(\lambda^{[k]}) = (Q'(\lambda^{[k]})y^{(k)}, y^{(k)}) \neq 0$ (теорема 1) співпадає з $\lambda^{[k]} \equiv p(y^{(k)})$.

Далі зауважимо, що (13) можна розглядати як частковий випадок методу простої ітерації

$$\lambda^{(2n+2)} = \varphi(\lambda^{(2n)}), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

а функцію $\varphi(\lambda)$ – як ітеровану функцію (див., наприклад, [7, с. 276]), тобто

$$\varphi(\lambda) = \varphi_1(\varphi_2(\lambda)),$$

де

$$\varphi_1(\lambda) = \lambda - \frac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}, \qquad \varphi_2(\lambda) = \lambda - \frac{z(\lambda)}{z'(\lambda)}.$$

Оскільки для методу Ньютона справджуються нерівності

$$\left|\varphi_1(\lambda^{(n)}) - \varphi(\lambda^{[k]})\right| \le \frac{M_1}{2m_1}\left|\lambda^{(n)} - \lambda^{[k]}\right|^2,$$

$$\left|\varphi_2(\lambda^{(n)}) - \varphi(\lambda^{[k]})\right| \le \frac{M_2}{2m_2}\left|\lambda^{(n)} - \lambda^{[k]}\right|^2,$$

то для ітерованої функції $\varphi(\lambda)$ отримуємо, що

$$\left|\varphi(\lambda^{(n)}) - \varphi(\lambda^{[k]})\right| \le \frac{M_1}{2m_1}\frac{M_2^2}{4m_2^2}\left|\lambda^{(n)} - \lambda^{[k]}\right|^4.$$

Отже,

$$\left|\lambda^{(2n+2)} - \lambda^{[k]}\right| = \left|\varphi(\lambda^{(2n)}) - \varphi(\lambda^{[k]})\right| \le \frac{M_1 M_2^2}{8m_1 m_2^2}\cdot\left|\lambda^{(2n)} - \lambda^{[k]}\right|^4.$$

Тепер при виконанні першої з умов (11) теореми отримуємо першу з оцінок (12). Аналогічно встановлюємо другу з оцінок (12).

Теорему доведено. ◊

У випадку антитонної і вгнутої або ізотонної та опуклої за λ на U системи Релея теорему про збіжність сформулюємо таким чином.

Теорема 3. *Якщо для деякого* $\lambda^{(0)} \in U_\delta(\lambda_*)$ *виконуються умови*

$$\frac{1}{(Q'(\lambda^{(0)})y, y)} > N_1, \qquad \lambda^{(0)} \in (\lambda_* - \delta, \lambda_*),$$

$$\frac{(Q(\lambda^{(1)})y, y)}{(Q'(\lambda^{(1)})y, y)} < \frac{2}{M_2}, \qquad \lambda^{(1)} \in (\lambda_*, \lambda_* + \delta),$$

де

$$N = \max_{\lambda \in (\lambda_*, \lambda_* + \delta)}\left|\frac{(Q(\lambda)y, y)(Q''(\lambda)y, y)}{(Q'(\lambda)y, y)^2}\right|$$

причому

$$q_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{M_2 M_1^2}{m_2 m_1^2}\right)^{1/3}\left|\lambda^{(0)} - \lambda^{[k]}\right| < 1, \quad q_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{M_1 M_2^2}{m_1 m_2^2}\right)^{1/3}\left|\lambda^{(1)} - \lambda^{[k]}\right| < 1,$$

то ітераційний процес (7) *альтернуючих наближень у вигляді* (5) *збігається до власного значення задачі* (1) *для кожного* $y^{(k)}$ *і для похибок відповідно зліва та справа справджуються оцінки* (12).

Д о в е д е н н я теореми 3 є аналогічним до доведення теореми 2.

4. Теореми 2 і 3 були доведені у припущенні, що початкове наближення знаходиться зліва від власного значення задачі. Аналогічні теореми збіжності (з урахуванням зауваження 1) справджуються також і в припущенні, що початкове наближення знаходиться справа від власного значення. У цьому випадку почергові наближення мають вигляд

$$\lambda^{(1)} < \lambda^{(3)} < \ldots < \lambda^{(2m-1)} < \ldots < \lambda^{[k]} < \ldots < \lambda^{(2m)} < \ldots < \lambda^{(2)} < \lambda^{(0)},$$

тобто почерговість наближень наступає уже з $m = 0$.

Неважко переконатися, що ітераційний процес (6) (ітераційний процес (7)) здійснює почергові наближення до власного значення задачі (1) для антитонної та опуклої або ізотонної і вгнутої (антитонної і вгнутої або ізотонної та опуклої) за λ на U оператор-функції також і у випадку, коли початкове наближення знаходиться справа від власного значення. Тоді почерговість наближень наступає, починаючи з $m = 1$.

Отже, отримані результати дозволяють при практичному застосуванні алгоритму задавати початкове наближення з будь-якої сторони від власного значення, а алгоритм сам налаштовується на почергові наближення, починаючи принаймні з $m = 1$.

5. Як тестовий приклад для запропонованого у роботі алгоритму розглянемо модельну задачу про поперечні коливання пружного стержня із шарнірно закріпленими кінцями з урахуванням кручення та зміною кута елемента стержня. Ця задача зводиться до квадратичної задачі на власні значення вигляду

$$c_1 y^{(IV)}(x) + \lambda\big(c_2 y''(x) - y(x)\big) + \lambda^2 c_3 y(x) = 0,$$

$$y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0, \qquad (18)$$

де c_1, c_2, c_3 – задані константи. Внаслідок апроксимації задачі (18) різницевою схемою на інтервалі (0,1) з кроком $h = 1/n$, $n = 50$, отримуємо квадратичний матричний пучок

$$L(\lambda)y \equiv \lambda^2 Dy + \lambda Ay + By = 0,$$

де D – діагональна матриця з елементами $d_{i,i} = c_3$, A – тридіагональна матриця з ненульовими елементами $a_{i-1,i} = a_{i,i+1} = c_2$, $a_{i,i} = -2c_2 - 1$, а B – п'ятидіагональна матриця з ненульовими елементами $b_{i-2,i} = b_{i,i+2} = c_1$, $b_{i-1,i} = b_{i,i+1} = -4c_1$, $b_{i,i} = 6c_1$.

Найменше власне значення задачі (18) при $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = 2$ дорівнює $\lambda = 7.18573562$, а відповідний йому власний вектор дорівнює $y = \sin \pi x$. Для перевірки можливостей ітераційного алгоритму задавалися різні початкові наближення як власного вектора, так і власного значення. Задаючи різні початкові наближення (наприклад, $y^{(0)} = 1$, $y^{(0)} = x$, $y^{(0)} = x^3$), обчислювали за алгоритмом нормований власний вектор з точністю 10^{-6} за 5–9 ітерацій залежно від початкового наближення власного значення (наприклад, $\lambda^{(0)} = 0$, $\lambda^{(0)} = 5$, $\lambda^{(0)} = 9$), а самі власні значення, тобто їх двосторонні оцінки, обчислювали з точністю 10^{-6} за 5–6 ітерацій. У табл. 1 наведено двосторонні оцінки власного значення при виборі двох різних початкових наближень власного значення $\lambda^{(0)} = 0$ та $\lambda^{(0)} = 9$.

Таблиця 1

m	$\lambda^{(2m-1)}$	$\lambda^{(2m)}$	$\lambda^{(2m-1)}$	$\lambda^{(2m)}$
0		0.0		9.0
1	4.69523717	7.65236337	5.98123592	7.34298238
2	7.14562107	7.18598543	7.18164639	7.18573824
3	7.18573563	7.18573564	7.18573562	

Цей приклад, зокрема, підтверджує те, що алгоритм сам налаштовується на почергові наближення не залежно, з якої сторони від власного значення задається початкове наближення. Так, при виборі $\lambda^{(0)} = 0$ почерговість наближень настає, починаючи з $m = 1$, а при виборі $\lambda^{(0)} = 9$ почерговість наближень здійснюється відразу, тобто з $m = 0$.

1. *Абрамов А. А., Юхно Л. Ф.* Об одном методе отыскания наименьшего собственного значения нелинейной самосопряженной спектральной задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1998. – **38**, № 7. – С. 1095–1105.
2. *Абрамов Ю. Ш.* Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. – 180 с.
3. *Балинский А. И., Подлевский Б. М.* Метод последовательных приближений в задаче о собственных значениях пучка дифференциальных операторов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1983. – Вып. 18. – С. 18–21.
4. *Даутов Р. З., Ляшко А. Д., Соловьев С. И.* Сходимость метода Бубнова – Галеркина с возмущениями для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 7. – С. 1144–1153.
5. *Иванов Б. А.* О приближенном вычислении позитивного собственного значения положительного оператора при нелинейном вхождении параметра // Зап. науч. семин. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1976. – Вып. 58. – С. 37–39.
6. *Картышов С. В.* О кубической сходимости метода обратных итераций для решения нелинейной спектральной задачи // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1994. – **34**, № 6. – С. 815–826.
7. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – Москва: Мир, 1969. – 448 с.
8. *Подлевський Б. М.* Чисельний метод розв'язування одного класу нелінійних спектральних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 2. – С. 34–38.
9. *Подлевський Б. М.* Числові методи розв'язування узагальнених спектральних задач для поліноміальних пучків самоспряжених операторів: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1995. – 111 с.
10. *Соловьев С. И.* Аппроксимация симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 10. – С. 60–68.
11. *Duffin R. J.* A minimax theory for overdamped networks // J. Ration. Mech. and Anal. –1964. – **16**. – P. 89–96.
12. *Rodgers E. H.* A minimax theory for overdamped systems // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1955. – **4**, № 2. – P. 221–233.

ОДИН ДВУСТОРОННИЙ АНАЛОГ МЕТОДА ОБРАТНЫХ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Предложен двусторонний аналог метода обратных итераций для решения задач на собственные значения с нелинейным спектральным параметром. Построены и обоснованы итерационные процессы двусторонних приближений к простому собственному значению нелинейной спектральной задачи. Получены условия на начальное приближение, которые гарантируют квадратичную сходимость итерационного процесса альтернирующих приближений к собственному значению.

ONE BILATERAL ANALOG OF INVERSE ITERATION METHOD FOR SOLUTION OF NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS

The bilateral analog of the inverse iteration method for solution of the eigenvalue problems with nonlinear entrance of a spectral parameter is offered. The iterative processes of bilateral approximations to the simple eigenvalue of spectral problem are constructed and justified. The conditions on the initial approximation which guarantee quadratic velocity of convergence of iterative process of alternating approximations to the eigenvalue are obtained.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
17.05.04