УДК 517.948

О. С. Гаврилів

ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ І СИСТЕМ У ВИГЛЯДІ АБСТРАКТНОГО ВІНЕРІВСЬКОГО ІНТЕГРАЛА

Встановлено формули, якими подаються у вигляді абстрактного вінерівського інтеграла розв'язки нелінійного операторного рівняння досить широкого класу в банаховому просторі. Результат узагальнено для скінченних систем нелінійних операторних рівнянь у банаховому просторі та на декартових добутках банахових просторів.

Зображення розв'язків нелінійних операторних рівнянь і нелінійних операторних систем має важливе значення для теоретичної фізики, особливо розв'язування у вигляді вінерівських інтегралів, оскільки за допомогою них описується броунівський рух.

Розв'язання цієї проблеми започатковане Остромом, П. П. Козаком, Я. М. Чабанюком, Г. І. Білущак, Р. М. Кадоб'янським, О. С. Гавриливим [2].

Метою роботи є подати розв'язки нелінійних операторних рівнянь у вигляді абстрактного вінерівського інтеграла в максимально загальному вигляді за деяких обмежень, зумовлених потребами існування нелінійної заміни змінної інтегрування.

Нехай (i, H, B) – абстрактний вінерівський простір [4], p_t – абстрактна вінерівська міра з параметром t в $(i,\ H,\ B)$.

Розглянемо нелінійний оператор $A : B \to B$; f – лінійний оператор, $f : B \to H$, де H – гільбертів простір, B – відповідний банахів простір.

Теорема. *Нехай*

$$x = Ax + fx \tag{1}$$

– *нелінійне операторне рівняння в* B, $x \in B$, *де*

(***i***) $f'x \in H$;

(***ii***) $A'(B) \subset H$;

(***iii***) $A' \in \mathcal{L}_1(H)$, $\quad f' \in \mathcal{L}_1 : B \to H$;

(***iiii***) $\lambda = 1$ *не є власним числом оператора* $(A' + f')$.

Тоді

$$x = \int\limits_B u\rho(u,\ A' + f)\, p_t(du)\,, \tag{2}$$

$$\rho(u,\ A' + f) = \left|\det(I - A' - f)\right| \times$$
$$\times \exp\left[-(2t)^{-1}\left(-2((A' + f)u,\ u) + \left\langle (A' + f)\,u,\ (A' + f)\,u\right\rangle\right)\right],$$

де A' – *похідна Фреше оператора* A; $\mathcal{L}_1(H)$ – *простір ядерних операторів в* H; $\mathcal{L}_1 : B \to H$ – *оператор типу ядерного,* $H \subset B$; $\det(I - A' - f) = \prod\limits_j (1 - \lambda_j)$, λ_j – *власні числа оператора* $(A' + f)$; $\int\limits_B y(x)\, p_t(dx)$ – *інтеграл у сенсі Бохнера* [5]; $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – *скалярний добуток в гільбертовому просторі* H; $(\cdot\,,\cdot)$ – *канонічна білінійна форма, що зумовлює двоїстість просторів* B *і спряженого до нього* B^*.

Д о в е д е н н я. Розглянемо рівняння

$$Ix = Ax + fx\,, \tag{3}$$

яке одержуємо з вихідного рівняння (1). Тут I – лінійний оператор і при застосуванні похідної Фреше $I' = I$, $f' = f$. Застосовуючи до (3) похідну Фреше, отримуємо

$$x = A'x + fx. \tag{4}$$

Вираз (4) можна записати в вигляді $x = (A' + f)x$, причому $(A' + f)$ – лінійний оператор, $(A' + f) \in \mathcal{L}_1 : B \to H$, тобто до знаходження розв'язку рівняння (4) можна використати результат [2] про зображення розв'язку лінійного операторного рівняння в банаховому просторі, звідки одержуємо рівність (2).

Природно, що перевірка виконання вихідного рівняння (1) для одержаного розв'язку є суттєвою, оскільки одним із ефектів допоміжного диференціювання є перетворення у нуль деяких важливих доданків. ◊

Розглянемо декартові добутки $\left(i_{(\ell)},\ H_{(\ell)},\ B_{(\ell)}\right)$ абстрактних вінерівських просторів (i_j, H_j, B_j), $j = 1,\ldots,\ell$, абстрактну вінерівську міру $p_{\mathbf{t}}$, $\mathbf{t} = (t_1,\ldots,t_\ell)$ в $\left(i_{(\ell)},\ H_{(\ell)},\ B_{(\ell)}\right)$ та абстрактний вінерівський інтеграл $\int\limits_B y(x)\, p_{\mathbf{t}}(dx)$ [2, 3], який розуміємо в сенсі Бохнера.

Наслідок. *Нехай*

$$x = Ax + fx \tag{5}$$

– *система нелінійних операторних рівнянь у скінченному декартовому добутку* $B_{(\ell)} = \mathop{X}\limits_{j=1}^{\ell} B_j$ *банахових просторів, на основі яких в кожному конкретному випадку побудовано процедурою* [4] *абстрактний вінерівський простір* $\left(i_{(\ell)},\ H_{(\ell)},\ B_{(\ell)}\right)$, *де*

(***i***) $f'x \in H_{(\ell)}$;

(***ii***) $A'(B_{(\ell)}) \subset H_{(\ell)}$;

(***iii***) $A' \in \mathcal{L}_1(H_{(\ell)})$, $f' \in \mathcal{L}_1 : B_{(\ell)} \to H_{(\ell)}$;

(***iiii***) $\lambda = 1$ *не є власним числом оператора* $(A' + f')$.

Тоді

$$x = \int\limits_{B_{(\ell)}} u\,\rho(u,\ A' + f)\, p_{\mathbf{t}}(dy),$$

$$\rho(u,\ A' + f) = \left|\det(I - A' - f)\right| \exp\left[\sum_{n=1}^{\ell}\left(-(2t_n)^{-1}\right)\times\right.$$
$$\times\left(-2\sum_{j=1}^{l}\left((A'_{nj} + f_n.)\,u_j.,\ u_n.\right)_n\right) +$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{m=1}^{\ell}\left\langle (A'_{nj} + f_n.)\,u_j.,\ (A'_{nm} + f_n.)\,u_m.\right\rangle_n\right], \tag{6}$$

де

$$I = \begin{Vmatrix} I_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & I_\ell \end{Vmatrix}, \quad A' = \begin{Vmatrix} (A')_{11} & (A')_{12} & \ldots & (A')_{1\ell} \\ (A')_{21} & (A')_{22} & \ldots & (A')_{2\ell} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (A')_{\ell 1} & (A')_{\ell 2} & \ldots & (A')_{\ell\ell} \end{Vmatrix},$$

A' – *похідна Фреше оператора* A *в* $B_{(\ell)}$; $\mathcal{L}_1(H_{(\ell)})$ – *простір ядерних операторів в* $H_{(\ell)}$, $\mathcal{L}_1 : B_{(\ell)} \to H_{(\ell)}$ – *простір операторів типу ядерних*;

$\det(I - A' - f) = \prod_{j=1} (1 - \lambda_j)$, λ_j – *власні числа оператора* $(A' + f)$; $y =$
$= (y_{1\cdot}, y_{2\cdot}, \ldots, y_{\ell\cdot}) \in B_{(\ell)}$; $y_{j\cdot} \in B_j$, $j = 1, \ldots, \ell$; $\langle x_{j\cdot}, y_{j\cdot} \rangle_j$, $j = 1, \ldots, \ell$, – *скалярний добуток у гільбертовому просторі* H_j; $(\cdot\,,\cdot)_j$, $j = 1, \ldots, \ell$, – *канонічна білінійна форма, що зумовлює двоїстість банахового простору* B_j *і спряженого до нього* B_j^*; $|\cdot| = \sum_{j=1}^{\ell} |\cdot|_j$ – *норма в* H_+ *при нормах* $|\cdot|_j$ *в* H_j, *породжених відповідними скалярними добутками* $\langle x_{j\cdot}, y_{j\cdot} \rangle$ *в* H_j.

Д о в е д е н н я є аналогічним до доведення теореми. Враховуємо право користуватись операторами A' і f подібно, як у теоремі, оскільки всі аспекти збіжності в $(i_{(\ell)}, H_{(\ell)}, B_{(\ell)})$ у зв'язку зі скінченним числом співмножників декартового добутку $(i_{(\ell)}, H_{(\ell)}, B_{(\ell)})$ випливають зі збіжності в $(i_{(j)}, H_{(j)}, B_{(j)})$, $j = 1, \ldots, \ell$, кожному зокрема. Залишається застосувати підхід Острома до побудови розв'язків систем лінійних операторних рівнянь [2]. Наслідок доведено. ◊

Результати роботи застосовні в атомній фізиці та квантовій механіці. Перспективою дальших досліджень є побудова зображення розв'язків зліченних систем нелінійних операторних рівнянь у банаховому просторі у вигляді абстрактного вінерівського інтеграла.

1. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 679 с.
2. *Гаврилів О. С.* Зображення розв'язків системи операторних рівнянь в банаховому просторі у вигляді кратного абстрактного вінерівського інтеграла // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – № 8. – С. 3–5.
3. *Гаврилів О. С., Козак П. П.* Кратний абстрактний вінерівський інтеграл і його властивості // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1995. – № 2. – С. 3–6.
4. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховом пространстве. – Москва: Мир, 1979. – 176 с.
5. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 829 с.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ В ВИДЕ АБСТРАКТНОГО ВИНЕРОВСКОГО ИНТЕГРАЛА

Получены формулы решений нелинейного операторного уравнений достаточно широкого класса в банаховом пространстве в виде абстрактного винеровского интеграла. Результат обобщён для конечных систем нелинейных операторных уравнений в банаховом пространстве и на декартовых произведениях банаховых пространств.

REPRESENTATION OF SOLUTIONS TO NONLINEAR OPERATOR EQUATIONS AND SYSTEMS IN THE FORM OF ABSTRACT WIENER INTEGRAL

The formulas which present the solutions to the nonlinear operator equations of a sufficiently wide class in the Banach space are defined in the form of abstract Wiener integral. The result is generalized for the finite systems of nonlinear operator equations in Banach space and on Cartesian products of Banach spaces.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
11.10.04