

## К ТЕОРИИ СКОЛЬЖЕНИЯ С ГЛАДКИМИ И СИНГУЛЯРНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ НАГРУЖЕНИЯ

Дается краткое изложение результатов, полученных в рамках варианта теории скольжения [9, 19] с использованием некоторых частных типов функций упрочнения. Результаты сравниваются с аналогичными, вытекающими из известных теорий пластичности [1, 3–5, 27] с регулярными и сингулярными поверхностями нагружения.

1. При умеренных температурах и скоростях нагружения кристаллических тел основным в развитии пластической деформации является механизм скольжения. Первый вариант теории пластичности, основанный на указанном физическом механизме неупругого деформирования материалов, предложен в 1947 г. Батфордом и Будянским [25]. Фундаментальный вклад в дальнейшее развитие концепции скольжения в теории пластичности внесли Леонов [8, 9], Линь [28], Малмейстер [10, 11], Христианович [12–14], Шемякин [2, 14, 24] и др. Концепция скольжения является определяющей также в работах [9, 19], где предложены линейная и нелинейная модели плоскопластической среды с учетом взаимодействия систем скольжения.

Согласно [9, 19] в направлениях развивающихся скольжений  $m(\theta_0)$  сопротивление сдвигу  $R_m(\theta_0, t)$  и скорость его изменения  $\dot{R}_m(\theta_0, t)$  соответственно равны касательному напряжению  $\tau_m(\theta_0, t)$ , действующему по площадке скольжения, и скорости приращения касательного напряжения  $\dot{\tau}_m(\theta_0, t) = \partial \tau_m / \partial t$ , так что

$$R_m(\theta_0, t) = \tau_m(\theta_0, t), \quad (1)$$

$$\dot{R}_m(\theta_0, t) = \dot{\tau}_m(\theta_0, t). \quad (2)$$

Левые и правые части уравнений (1) и (2) определяются формулами

$$\dot{R}_m(\theta_0, t) = \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} R[\lambda_k(\xi), |\theta - \theta_0|] \phi'_t(\theta, t) d\theta, \quad (3)$$

$$R_m(\theta_0, t) = \int_{t_0 - \alpha_1(\xi)}^t \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} R[\lambda_k(\xi), |\theta - \theta_0|] \phi'_\xi(\theta, \xi) d\theta d\xi, \quad (4)$$

$$\tau_m(\theta_0, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)], \quad \dot{\tau}_m(\theta_0, t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos [\vartheta(t) - 2\theta_0 - 2\Phi_0], \quad (5)$$

где  $t_0$ ,  $t$  – начальный и произвольный моменты пластического деформирования;  $\phi'_t(\theta, t)$  – скорость изменения интенсивности сдвига;  $-\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  – границы множества направлений скольжения;

$$\begin{aligned} S(t) &= [S_1^2(t) + S_3^2(t)]^{1/2}, \quad S_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} [\sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t)], \quad S_3 = \sqrt{2} \sigma_{12}(t), \\ \Phi(t) &= \Phi_1(t) - \Phi_0, \quad 2\Phi_1 = \arctg[S_3(t) / S_1(t)], \quad \Phi_0 = \Phi_1(t_0), \\ \vartheta(t) &= \arctg[dS_3(t) / dS_1(t)], \quad dt = (dS_1^2 + dS_3^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Универсальная функция материала  $R$  представлена в виде произведения функции пластичности  $\Pi[\lambda_k]$  и упрочнения  $F(\omega)$ :

$$R[\lambda_k, \omega] = \Pi[\lambda_k] F(\omega). \quad (7)$$

Здесь  $\lambda_k$  – параметры истории нагружения или пластического деформирования,  $\omega = |\theta - \theta_0|$  – угол между направлением сдвига  $n(\theta)$  и произвольным направлением  $m(\theta_0)$  в плоскости деформирования. Функция  $\Pi$  определяется из эксперимента на знакопеременное кручение тонкостенной трубки [18, 22]. В качестве функции упрочнения  $F(\omega)$  используется [20–22] общевозможная

$$F(\omega) = k_1 \omega^{-h_1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \cos 2n\omega + k_2 \left( \frac{\pi}{2} - \omega \right)^{-h_2} \quad (8)$$

и ее частные случаи, соответствующие различным значениям параметров  $k_1, k_2, h_1, h_2, a_{2n} \sim \text{const}; h_1, h_2 \leq 1$ . Графики качественного изменения  $F(\omega)$  показаны на рис. 1. Варьирование параметров  $k_1$  и  $h_1$  позволяет регулировать  $F(\omega)$  в окрестности точки  $\omega = 0$  и определять упрочнение материала по площадке скольжения в направлении сдвига  $m$ . Аналогично, параметры  $k_2$  и  $h_2$  определяют поведение  $F(\omega)$  в направлении  $-m$ , противоположном  $m$ , т. е. характеризуют на микроуровне эффект Баушингера. Входящий в формулу (8) ряд дает возможность как угодно изменять  $F(\omega)$  при  $\omega \in (0, \pi/2)$ . Так как упрочнение в направлении скольжения ( $\omega = 0$ ) приводит согласно эффекту Баушингера к разупрочнению в противоположном направлении ( $\omega = \pi/2$ ), то функция  $F(\omega)$  на промежутке  $[0, \pi/2]$  должна быть знакопеременной, что и показано на рис. 1.

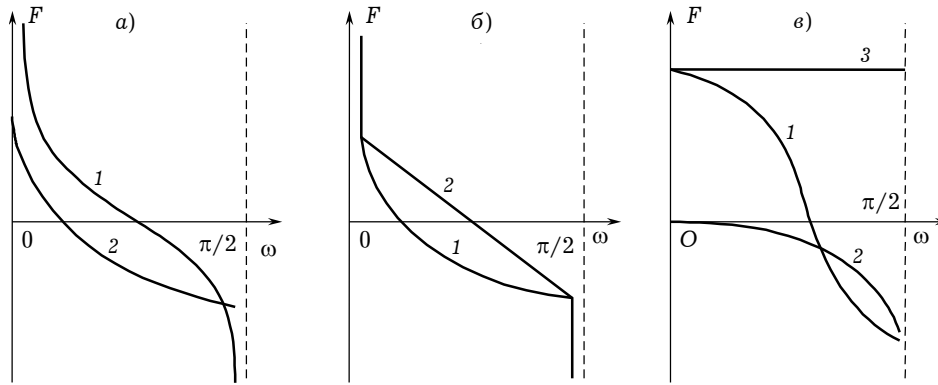


Рис. 1

Заложенная в теорию пластичности концепция скольжения в зависимости от поведения  $F(\omega)$  в окрестности точки  $\omega = 0$  может приводить [18, 22] как к сингулярным, так и регулярным поверхностям ( $\Sigma$ ) нагружения. Сингулярные поверхности получаем для всех возможных функций упрочнения, удовлетворяющих условиям  $0 \leq F(0) \leq \infty, 0 < F'(0) \leq \infty$  (рис. 1а, б), а регулярные – при  $F(0) \geq 0$  и  $F'(0) = 0$  (рис. 1в). По аналогии типы функций  $F(\omega)$ , показанные на рис. 1а, б, в дальнейшем будем называть сингулярными, а на рис. 1в – регулярными.

2. Рассмотрим сначала случай регулярных функций упрочнения. При этом для всевозможных  $F(\omega)$ , удовлетворяющих условию  $F'(0) = 0$  (рис. 1в), решение уравнений (1), (2) с учетом выражений (3)–(6) дается формулой

$$\phi'_t(\theta, t) = \frac{\sqrt{2}}{2\Pi} \cos[\vartheta(t) - 2\alpha_2(t) - 2\Phi_0] \delta[\alpha_2(t) - \theta], \quad (9)$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака. Границы  $\mp \alpha_{1,2}(t)$  множества направлений скольжений определяются уравнениями

$$\alpha_1(t) = -\alpha_2(t), \quad 2S(t) \sin 2[\alpha_2(t) - \Phi(t)] + L(t) = 0, \\ L(t) = \int_{t_0}^t F'(|\alpha_2(t) - \alpha_2(\xi)|) \cos[\vartheta(\xi) - 2\alpha_2(\xi) - 2\Phi_0] d\xi. \quad (10)$$

При известных  $\varphi'_t(\theta, t)$ ,  $\alpha_{1,2}(t)$  компоненты вектора  $\dot{\Gamma}^{(p)}(t)$  плоскопластической деформации даются квадратурами

$$\dot{\Gamma}_1^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_t(\theta, t) \cos 2(\theta + \Phi_0) d\theta, \\ \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_t(\theta, t) \sin 2(\theta + \Phi_0) d\theta. \quad (11)$$

С учетом (9) на основании (11) получаем

$$\dot{\Gamma}_1^{(p)} = \frac{1}{2\Pi} \cos[\vartheta(t) - 2\alpha_2(t) - 2\Phi_0] \cos 2[\alpha_2(t) + \Phi_0], \\ \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \frac{1}{2\Pi} \cos[\vartheta(t) - 2\alpha_2(t) - 2\Phi_0] \sin 2[\alpha_2(t) + \Phi_0]. \quad (12)$$

В локальной системе координат  $BS_\nu S_q$  (рис. 2) с началом в текущей точке нагружения  $B$  и повернутой относительно  $OS_1 S_3$  на угол  $2(\alpha + \Phi_0)$  формулы (12) принимают вид

$$2\Pi d\Gamma_\nu^{(p)} = dS_\nu, \quad d\Gamma_q^{(p)} = 0 \\ (d\Gamma^{(p)} = \dot{\Gamma}^{(p)} dt, \quad \alpha = \alpha_2(t)). \quad (13)$$

Пластическая деформация материала приводит к возникновению деформационной анизотропии. Для модели плоскопластической среды [9, 19] прочностной характеристикой, изменяющейся по-разному в различных направлениях в плоскости деформации  $m(\theta_0)$ , является сопротивление сдвигу  $R_m(\theta_0, t)$ . Для него на основании формул (4), (9) и (10) получаем

$$R_m(\theta_0, t) = \tau_s + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{t_0}^t F(|\theta_0 - \alpha_2(\xi)|) \cos[\vartheta(\xi) - 2\alpha_2(\xi) - 2\Phi_0] d\xi. \quad (14)$$

При известном  $R_m(\theta_0, t)$  линия нагружения ( $\Sigma$ ) в плоскости деформации определяется [22] уравнениями

$$S = \sqrt{2 \left[ R_m^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial R_m}{\partial \theta_0} \right)^2 \right]}, \quad \Phi = \theta_0 - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2R_m} \frac{\partial R_m}{\partial \theta_0} \right). \quad (15)$$

Так как согласно (15)  $R_m$  и  $\frac{\partial R_m}{\partial \theta_0}$  непрерывны для всех  $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ , в том числе и при  $\theta_0 = \alpha_2(t)$ , то линия нагружения  $\Sigma$  является гладкой. Кро-

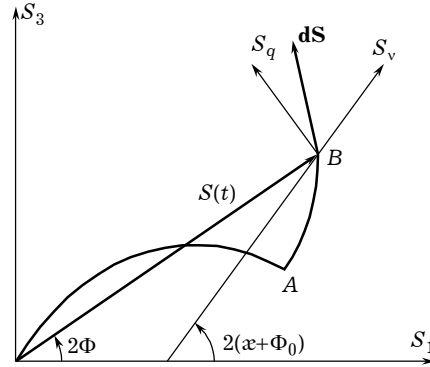


Рис. 2

ме этого, из уравнения (15) следует, что направление нормали  $\nu$  к линии  $\Sigma$  в точке нагружения  $B$  совпадает с направлением оси  $BS_\nu$  локальной системы координат  $BS_\nu S_q$  (рис. 2). С учетом этого формулы (13) в векторном виде представляются так:

$$d\Gamma^{(p)} = dS_\nu / 2\Pi, \quad (16)$$

где  $dS_\nu$  – составляющая вектора догрузки  $d\mathbf{S}$  в направлении нормали к линии нагружения  $\Sigma$  (принцип градиентности).

Инвариантность записи формулы (16) позволяет распространить ее из частного случая плоскопластической деформации на общий случай пространственного нагружения.

Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим функцию упрочнения

$$F(\omega) = a + b \cos 2\omega, \quad a, b \sim \text{const}, \quad (17)$$

удовлетворяющую условиям  $F(0) > 0$ ,  $F'(0) = 0$ . Для такой функции  $F(\omega)$  на основании формул (13)–(15) получаем

$$d\Gamma_i^{(p)} = dS_{\nu i} / 2\Pi, \quad (18)$$

$$[S_i(t) - K_i(t)][S_i(t) - K_i(t)] = r^2(t), \quad (19)$$

$$r(t) = S_0 + 2a \int_{t_0}^t \Pi[\lambda_k(\xi)] \sqrt{\dot{\Gamma}_i^{(p)}(\xi) \dot{\Gamma}_i^{(p)}(\xi)} d\xi,$$

$$K_i(t) = 2b \int_{t_0}^t \Pi[\lambda_k(\xi)] \dot{\Gamma}_i^{(p)}(\xi) d\xi, \quad (20)$$

где по повторяющемуся индексу  $i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , выполняется суммирование.

Уравнение (19) – это уравнение гиперболы в девятимерном пространстве напряжений (в плоскости окружности  $OS_1 S_2$  (рис. 3)) с изменяющимся во времени радиусом  $r(t)$  и центром в точке  $O_1$ , координаты которой  $K_i$  определяются формулами (20). Показанная пунктиром окружность радиуса  $S_0 = \sqrt{2} \tau_s$  соответствует начальной поверхности нагружения  $\Sigma_0$ . Таким образом, функция упрочнения  $F(\omega)$  (17) приводит к комбинированному упрочнению: поверхность нагружения  $\Sigma$  в процессе пластического деформирования изотропно расширяется (сужается) и кинематически перемещается как жесткое целое.

Рассмотрим теперь формулы (18)–(20) при  $F(\omega)$  (17) и ее частных случаях.

1°. Если положить  $F(\omega) \equiv 1$  ( $a = 1$ ,  $b = 0$ ), то придем к изотропному упрочнению, при котором вектор  $dS_\nu$  коллинеарен вектору нагружения  $\mathbf{S}(t)$ . Предполагая далее существование универсальной функции материала  $\varepsilon_u^{(p)} = \Psi_*(\sigma_u)$  и полагая  $\Pi = \frac{1}{3} \Psi'_*(\sigma_u)$  ( $\Psi'_* = d\Psi_*/d\sigma_u$ ), приходим к теории пластичности Хальденмана – Линя – Прагера [12]. В компонентах девяти-

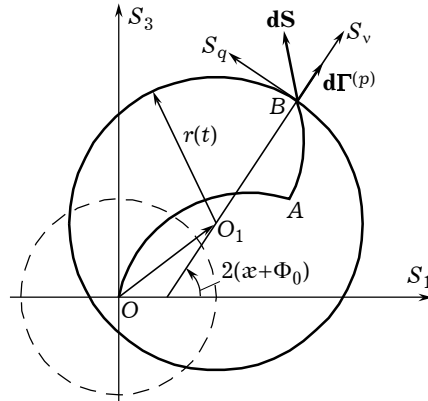


Рис. 3

ра напряжений  $s_{ij}$  и приращения пластической деформации  $d\varepsilon_{ij}^{(p)}$  она записывается так:

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{3}{2} \frac{\Psi'_*(\sigma_u)}{\sigma_u} s_{ij} d\sigma_u. \quad (21)$$

2°. При  $F(\omega) = \cos 2\omega$  ( $a = 0$ ,  $b = 1$ ) имеем кинематическое упрочнение: начальная поверхность нагружения  $\Sigma_0$  в пространстве девиатора напряжений перемещается как жесткое целое. Полагая далее  $2\Pi = H = \text{const}$ , на основании (18) получаем

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{1}{2H\tau_s^2} (s_{ij} - H\varepsilon_{ij}^{(p)}) (s_{mn} - H\varepsilon_{mn}^{(p)}) ds_{mn}. \quad (22)$$

В результате имеем теорию пластичности Ишлинского [3] для материалов с линейным упрочнением ( $E_{ut}$ ,  $E_{ut}^- \sim \text{const}$ ) и идеальным эффектом Баушингера ( $\sigma_u + \sigma_u^- = 2\sigma_s$ ).

3°. В случае функции упрочнения  $F(\omega)$  (17) и некоторых дополнительных предположениях относительно функции пластичности  $\Pi$  на основании формул (18)–(20) можно прийти к теориям пластичности Кадашевича – Новожилова [4] и Арутюняна – Вакуленко [1].

Естественное обобщение рассмотренных теорий [1, 3, 4, 27] дается формулами (18)–(20), которые представим в виде

$$d\varepsilon_{ij}^{(p)} = \frac{1}{2\Pi r^2(t)} (s_{ij} - k_{ij}) (s_{mn} - k_{mn}) ds_{mn},$$

$$k_{ij} = 2b \int_{t_0}^t \Pi [\lambda_k(\xi)] \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)} d\xi, \quad (23)$$

$$r(t) = \sqrt{2} \tau_s + 2a \int_{t_0}^t \Pi [\lambda_k(\xi)] \sqrt{\dot{\varepsilon}_{mn}^{(p)} \dot{\varepsilon}_{mn}^{(p)}} d\xi.$$

Функция пластичности  $\Pi$  определяется из эксперимента на знакопеременное нагружение, например, знакопеременное кручение тонкостенной трубки. Для нее можем получить [18]

$$\Pi = \frac{1}{3} \frac{E_u |E_{ut}|}{E_u - |E_{ut}|}, \quad (24)$$

где  $E_u = 3G$  – упругий,  $E_{ut} = E_{ut}(\varepsilon_u^{(p)})$  – касательный модуль диаграммы  $\sigma_u \sim \varepsilon_u^{(p)}$ , построенной при знакопеременном нагружении.

Записанные для регулярных функций упрочнения (гладких поверхностей нагружения) уравнения связи  $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\varepsilon}_{ij}$  принадлежат к числу дифференциально-линейных и могут быть представлены в виде

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijmn} \dot{\varepsilon}_{mn}, \quad (25)$$

где  $A_{ijmn}$  – определяемые формулами (23) функционалы по длине дуги  $s$  от параметров внутренней геометрии траектории нагружения.

3. Описание упругопластической деформации материалов с использованием сингулярных функций упрочнения дано в работах [9, 18–22] и др. Результаты записаны для общевозможной  $F(\omega)$  (8) и ее частных случаев. В качестве примера сингулярной функции упрочнения рассмотрим [20, 21]

$$F(\omega) = a_0 + a_2 \cos 2\omega + b\delta(\omega) + c\delta(\pi/2 - \omega), \quad (26)$$

где  $\delta$  – дельта-функция Дирака. Для указанной  $F(\omega)$  решение уравнения (2) с учетом (3)–(6) дается формулами

$$\begin{aligned} \text{П}\dot{\varphi}'_i(\theta, t) &= A_1 \cos[\vartheta(t) - 2\alpha(t) - 2\Phi_0] \cos 2[\theta - \alpha(t)] + \\ &+ B_1 \sin[\vartheta(t) - 2\alpha(t) - 2\Phi_0] \sin 2[\theta - \alpha(t)] + \\ &+ C_1 \cos[\vartheta(t) - 2\alpha(t) - 2\Phi_0], \end{aligned} \quad (27)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{b + 2a_0\alpha}{\left[ b + a_2 \left( \alpha + \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) \right] (b + 2a_0\alpha) - a_0 a_2 \sin^2 2\alpha},$$

$$B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{b + a_2 \left( \alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right)}, \quad C_1 = -A_1 \frac{\alpha_0 \sin 2\alpha}{b + 2a_0\alpha},$$

$$2\alpha = \alpha_2(t) + \alpha_1(t), \quad 2\alpha = \alpha_2(t) - \alpha_1(t).$$

Границы  $\mp \alpha_{1,2}(t)$  определяются из уравнения (1) с учетом представлений (4) и (5). Соответствующая методика решения указанной задачи с использованием всевозможной  $F(\omega)$  (8) и ее частных случаев изложена в работах [20–22]. Так, при монотонной деформации  $\dot{\alpha}_{1,2}(t) \geq 0$  и функции упрочнения  $F(\omega)$  (26) имеем

$$\alpha_{1,2}(t) = \alpha(t) \mp \Phi(t), \quad \frac{(b + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha}{b + a_2 \left( \alpha_0 - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right)} = \frac{\sqrt{2} \tau_s}{S(t)}.$$

Согласно (11) и (27) для компонента скорости плоскопластической деформации получаем

$$\begin{aligned} \text{П}\dot{\Gamma}_1^{(p)} &= B_{11} \cos[\vartheta(t) - 2\alpha(t) - 2\Phi_0] \cos 2[\alpha(t) + \Phi_0] - \\ &- B_{12} \sin[\vartheta(t) - 2\alpha(t) - 2\Phi_0] \sin 2[\alpha(t) + \Phi_0], \\ \text{П}\dot{\Gamma}_3^{(p)} &= B_{11} \cos[\vartheta(t) - 2\alpha(t) - 2\Phi_0] \sin 2[\alpha(t) + \Phi_0] - \\ &- B_{12} \sin[\vartheta(t) - 2\alpha(t) - 2\Phi_0] \cos 2[\alpha(t) + \Phi_0], \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$B_{11}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} A_1 \left[ \left( \alpha + \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) - \frac{a_0 \sin^2 2\alpha}{b + 2a_0\alpha} \right],$$

$$B_{12}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} B_1 \left( \alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right).$$

В локальной системе координат  $BS_v S_q$  (рис. 2) зависимости (28) могут быть представлены так:

$$\text{П}d\Gamma_v^{(p)} = B_{11}(\alpha) dS_v, \quad \text{П}d\Gamma_q^{(p)} = B_{12}(\alpha) dS_q. \quad (29)$$

Формулы (29) инвариантны относительно преобразований вращения траектории нагружения  $OAB$  в плоскости  $OS_1 S_3$ , т. е. удовлетворяют постулату изотропии Ильюшина. Это позволяет обобщить их на случай произвольных плоских траекторий нагружения, как угодно расположенных в

пятимерном девиаторном пространстве напряжений. При монотонной деформации ( $\dot{\alpha}_{12}(t) \geq 0$ ) такое обобщение распространяется на пятимерные траектории нагружения.

Так как при не монотонной деформации границы множества направлений скольжения  $\mp \alpha_{1,2}(t)$  существенным образом зависят от ориентации вектора догрузки  $dS$  относительно предшествующей траектории  $OAB$  (рис. 2), то соотношение (29) для сингулярных функций упрочнения  $F(\omega)$  являются дифференциально-нелинейными. Полученные на их основе определяющие уравнения можно представить так:

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijmn} \dot{\epsilon}_{mn} - \psi_{ij}(\dot{\epsilon}_{mn}),$$

где  $A_{ijmn}$  – по-прежнему функционалы по длине дуги  $s$  от параметров внутренней геометрии траектории нагружения;  $\psi_{ij}(\dot{\epsilon}_{mn})$  – зависящие от истории нагружения однородные первой степени относительно  $\dot{\epsilon}_{mn}$  функции, тождественно равные нулю в зоне ( $\dot{\alpha}_{12}(t) \geq 0$ ) полного догрузки  $dS$ .

Построенная при монотонной деформации для  $F(\omega)$  (26) сингулярная поверхность нагружения  $\Sigma$  показана на рис. 4. Она состоит из двух пятимерных гиперсфер радиусов  $R$  и  $R_1$ , гиперконуса с углом раствора  $2\beta^*$  и образующими, касательными к гиперсфере радиуса  $R$ . Параметры  $R, R_1, 2\beta^*$  по-

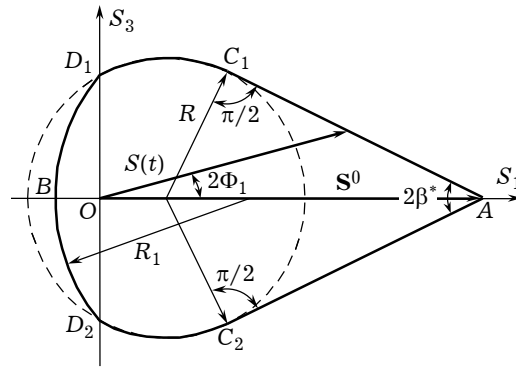


Рис. 4

верхности  $\Sigma$  зависят от длины вектора нагружения  $S^0$  и коэффициентов  $a_0, a_1, b, c$  функции упрочнения  $F(\omega)$ .

Как следует из работы [15], определяющие уравнения связи  $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}$ , построенные в рамках модели [19] для частной функции упрочнения  $F(\omega)$  (26) при  $\Pi \equiv 1$ , с точностью до обозначений совпадают с аналогичными соотношениями так называемой структурной теории пластичности [5]. Ее возможности могут быть значительно расширены, если отказаться от условия  $\Pi \equiv 1$  и определять функцию пластичности из эксперимента на знакопеременное нагружение тонкостенной трубки.

Показано [16, 17], что предложенный на основании моделей [9, 19] вариант теории пластичности удовлетворяет постулату Друккера [26], дифференциальной потенциальности определяющих уравнений связи  $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\epsilon}_{ij}$  и принципу макродетерминизма [6]. Этим самым обоснована корректность теорий, учитывающих перекрестное влияние механизмов пластического деформирования.

Экспериментальные исследования [7, 22, 23 и др.] подтверждают возможность и перспективность использования теории пластичности [9, 19, 22] для описания деформации широкого класса материалов при простом и сложном нагружениях.

1. Арутюнян Р. А., Вакуленко А. А. О многократном нагружении упругопластической среды // Изв. АрмССР. Механика. – 1965. – № 4. – С. 53–61.
2. Жигалкин В. М., Усова О. М., Шемякин Е. И. Анизотропия упрочняющегося пластического материала. Влияние истории нагружения // Сообщ. 1: Препр. № 34. – 1989. – 28 с.; Сообщ. 2: Препр. № 35. – 1989. – 34 с.; Сообщ. 3: Препр. № 36. – 1989. – 42 с. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР.
3. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. – 1954. – 6, № 3. – С. 314–325.
4. Кадашевич Ю. И., Новожиллов В. В. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения // Прикл. математика и механика. – 1958. – 22, № 1. – С. 78–89.
5. Кадашевич Ю. И., Новожиллов В. В., Черняков Ю. А. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации // Прикл. математика и механика. – 1986. – 50, № 6. – С. 890–897.
6. Ключников В. Д. Физико-математические основы прочности и пластичности. (Элементы определяющих соотношений). – Москва: Изд-во МГУ, 1994. – 189 с.
7. Кудряшов Н. Н., Рычков Б. А., Швайко Н. Ю. Теоретическое и экспериментальное исследование законов деформации сплава АК-6 при сложном нагружении // Изв. АН КиргССР. – 1970. – № 1. – С. 28–35.
8. Леонов М. Я. Элементы аналитической теории пластичности // Докл. АН СССР. – 1972. – 205, № 2. – С. 303–306.
9. Леонов М. Я., Швайко Н. Ю. Сложная плоская деформация // Докл. АН СССР. – 1964. – 159, № 5. – С. 1007–1010.
10. Малмейстер А. К. Основы теории локальных деформаций. Обзор // Механика полимеров. – 1965. – № 4. – С. 12–27.
11. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Соппротивление жестких полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1972. – 500 с.
12. Христианович С. А. Деформация упрочняющегося пластического материала // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1974. – № 2. – С. 148–174.
13. Христианович С. А. Механика сплошной среды. – Москва: Наука, 1981. – 483 с.
14. Христианович С. А., Шемякин Е. И. О плоской деформации пластического материала при сложном нагружении // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1969. – № 5. – С. 138–149.
15. Швайко М. Ю. До теорії пластичності, заснованої на концепції ковзання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 1. – С. 114–124.
16. Швайко М. Ю. Про коректність теорій пластичності, які враховують взаємовплив механізмів непружного деформування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – 37, № 2. – С. 54–62.
17. Швайко М. Ю. Про стійкість деформування і диференціальну потенціальність визначальних рівнянь теорії пластичності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – 38, № 3. – С. 42–52.
18. Швайко Н. Ю. Концепция скольжения и некоторые особенности пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. – Москва: Изд-во Моск. гос. горн. ун-та, 2001. – С. 348–364.
19. Швайко Н. Ю. К теории пластичности, основанной на концепции скольжения // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 11. – С. 12–24.
20. Швайко Н. Ю. Методы решения уравнений, описывающих законы деформирования линейной анизотропно упрочняющейся плоскопластической среды // Сложная деформация твердого тела. – Фрунзе: Илим, 1967. – С. 3–34.
21. Швайко Н. Ю. О возможном общем виде функции упрочнения линейной плоскопластической среды // Гидроаэромеханика и теория упругости. – 1972. – № 14. – С. 109–120.
22. Швайко Н. Ю. Сложное нагружение и вопросы устойчивости. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. гос. ун-та, 1989. – 176 с.
23. Швайко Н. Ю., Макаренко А. Г., Гашко А. Л., Степаненко В. Ф., Тонконоженко А. М., Черняков Ю. А. О пределах применимости теории малых упругопластических деформаций при непропорциональном нагружении сплава ВТ-6с // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 2. – С. 48–53.
24. Шемякин Е. И. Анизотропия пластического состояния // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СОАН СССР. – 1973. – 4, № 4. – С. 150–162.



25. *Batdorf S. B., Budiansky B.* A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip // NASA Techn. Notes. – April, 1949. – No. 1871.  
То же: *Батдорф С. Б., Будянски Б.* Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // *Механика: Сб. пер. иностр. статей.* – 1962. – № 1. – С. 135–155.
26. *Drucker D. C.* A more fundamental approach to plastic stress-strain relations // Proc. 1<sup>st</sup> U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. ASME. – 1951. – P. 487–491.
27. *Handelman G. H., Lin C. C., Prager W.* On the mechanical behavior of metals in the strain-hardening range // *Quart. Appl. Math.* – 1947. – No. 4. – P. 397–407.
28. *Lin T. H.* Physical theory of plasticity // *Advanc. Appl. Mech.* – 1971. – **11**. – P. 255–311.

#### **ДО ТЕОРІЇ КОВЗАННЯ З ГЛАДКИМИ ТА СИНГУЛЯРНИМИ ПОВЕРХНЯМИ НАВАНТАЖЕННЯ**

*Подано стислий огляд результатів, одержаних в рамках варіанту теорії ковзання [9, 19] з використанням деяких часткових типів функції зміцнення. Наведено порівняння з аналогічними результатами, які впливають з відомих теорій пластичності [1, 3–5, 27] з регулярними і сингулярними поверхнями навантаження.*

#### **ON SLIDING THEORY WITH SMOOTH AND SINGULAR LOAD SURFACES**

*The results for the sliding plasticity theory [9, 19] using some particular types of hardening functions are briefly stated. The obtained results are compared with the similar ones for the known [1, 3–5, 27] plasticity theories with smooth and singular load surfaces.*

Днепропетр. нац. ун-т, Днепропетровск

Получено  
16.11.04