УДК 512.64

Н. С. Джалюк, В. М. Петричкович

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕННИХ РІВНЯНЬ І ПОДІБНІСТЬ МАТРИЦЬ

Описано розв'язки трикутного вигляду матричних многочленних рівнянь. Зокрема, встановлено умови, за яких розв'язки матричного многочленного рівняння з матрицями-коефіцієнтами трикутного вигляду є такого ж трикутного вигляду, та запропоновано спосіб їх знаходження. Вказано вигляд усіх розв'язків трикутного вигляду з одним елементарним дільником і простої структури матричного многочленного рівняння.

Нехай $\mathbf{P}$ – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль і

$$X^m A_0 + X^{m-1} A_1 + \ldots + X A_{m-1} + A_m = 0 \tag{1}$$

– матричне многочленне рівняння, де A_i – $(n \times n)$-матриці над полем $\mathbf{P}$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Матрицю

$$A(\lambda) = A_0 \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \ldots + A_{m-1}\lambda + A_m \tag{2}$$

називають характеристичною матрицею рівняння (1). Многочлен $\Delta(\lambda) = \det A(\lambda)$ називають характеристичним многочленом, а його корені – характеристичними коренями матриці $A(\lambda)$ і матричного рівняння (1) [4].

Матриця $D^A(\lambda)$ означатиме канонічну діагональну форму матриці $A(\lambda)$, тобто

$$D^A(\lambda) = U(\lambda)\, A(\lambda)\, V(\lambda) = \operatorname{diag}\left(\mu_1(\lambda), \mu_2(\lambda), \ldots, \mu_n(\lambda)\right),$$

а $\mu_i(\lambda)$ – її інваріантні множники, $\mu_i(\lambda) \mid \mu_{i+1}(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n-1$; $U(\lambda)$, $V(\lambda)$ – оборотні над $\mathbf{P}[\lambda]$ матриці.

Найпростіші матричні рівняння розв'язувались ще у другій половині XIX століття. Не маючи загального підходу і методів розв'язування рівнянь вигляду (1), кожне рівняння розв'язували у конкретному випадку. Так, Келі (A. Cayley) [12] вказав розв'язки для рівняння $X^2 = A$ для матриць 2-го і 3-го порядків. Ідеї Келі далі розвинув Сильвестр (J. J. Sylvester) [20], який, зокрема, розглянув рівняння $X^m = E$ та $X^m = 0$. Фробеніус (F. G. L. Frobenius) [15] знайшов всі розв'язки рівняння $X^2 = A$, коли A – неособлива матриця. Далі іншими авторами було розглянуто загальне двочленне рівняння $X^m = A$ і вказувались розв'язки з певними властивостями [1, 13, 18].

П. С. Казімірський з учнями [4, 6, 7] встановили критерій існування розв'язків рівняння $X^m = A$ у термінах степенів елементарних дільників матриці A.

Тройєнфельс (P. Treuenfels) [22] показав, що для існування хоча би одного розв'язку матричного рівняння $X^2 - 2AX + B = 0$ достатньо, щоб характеристичні корені матриці

$$R = \begin{Vmatrix} A & E \\ A^2 - B & A \end{Vmatrix}$$

були різними. М. Петков [8] цей результат поширив для матричного рівняння вигляду $X^2 - CX - D = 0$.

Для знаходження і повного опису розв'язків рівняння (1) необхідно їх класифікувати. Сильвестр встановив для рівняння (1) у випадку $m = 2$ і

$n = 2$, що кожний характеристичний корінь розв'язку B рівняння (1) є характеристичним коренем його характеристичної матриці (2). Бухгайм (A. Buchheim) довів цей факт у загальному випадку. Звідси одержуємо, що характеристичний многочлен $\det(E\lambda - B)$ розв'язку B рівняння (1) є дільником характеристичного многочлена $\det A(\lambda)$ його характеристичної матриці $A(\lambda)$. Отже, всі розв'язки рівняння (1) розбиваються на класи з тим самим характеристичним многочленом, який є дільником характеристичного многочлена матриці $A(\lambda)$. Такий підхід застосував П. С. Казімірський при розгляді рівняння (1) [2, 3].

Узагальненням цього факту стала теорема Безу для матричних многочленів [16], із якої випливає, що матриця B є розв'язком рівняння (1) тоді й тільки тоді, коли $B(\lambda) = E\lambda - B$ є лівим дільником характеристичної матриці $A(\lambda)$ рівняння (1). У цій же роботі [16] стверджується, що інваріантні множники дільника $B(\lambda)$ матриці $A(\lambda)$ є дільниками відповідних інваріантних множників матриці $A(\lambda)$. На основі цього факту всі розв'язки рівняння (1) можна розбити на класи подібних між собою розв'язків.

Тому задача полягає в наступному: нехай d-матриця

$$\Phi(\lambda) = \mathrm{diag}\left(\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda)\right), \qquad \varphi_i(\lambda) \mid \varphi_{i+1}(\lambda), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$\deg\det\Phi(\lambda) = n$, є дільником канонічної діагональної форми $D^A(\lambda)$ характеристичної матриці $A(\lambda)$ і J_Φ − жорданова матриця, побудована за елементарними дільниками матриці $\Phi(\lambda)$. Тоді кожний розв'язок рівняння (1) із жордановою формою J_Φ має вигляд $B_i = S_i^{-1} J_\Phi S_i$, де S_i − неособливі матриці, які задовольняють матричне лінійне рівняння

$$J_\Phi^m S_i A_0 + J_\Phi^{m-1} S_i A_1 + \cdots + S_i A_m = 0. \tag{3}$$

Зрозуміло, що відшукання неособливих розв'язків S_i рівняння (3), а, отже, й усіх розв'язків рівняння (1) із жордановою формою J_Φ, пов'язане з певними труднощами. Але це можна зробити для розв'язків певних виглядів, зокрема трикутно подібних, тобто для матриць S трикутного вигляду.

Крім того, важливою є задача знаходження за даним розв'язком B_0 многочленного рівняння (1) інших його розв'язків, подібних до B_0. У цьому напрямку відомий лише такий результат Бейля (J. H. Bell) [11]: *Кожна матриця $C_i = S_i^{-1} B_0 S_i$, подібна до роз'язку B_0 рівняння* (1), *є розв'язком цього рівняння тоді й тільки тоді, коли мінімальний многочлен матриці B_0 є дільником елементів характеристичної матриці $A(\lambda)$ рівняння* (1).

На основі встановленої П. С. Казімірським та одним із авторів трикутної форми матриці $A(\lambda)$ щодо напівскалярної еквівалентності відповідне матричне многочленне рівняння (1) зводиться до еквівалентного рівняння з матрицями-коефіцієнтами трикутного вигляду.

Теорема 1 [5, 10]. *Для неособливої $(n \times n)$-матриці над $\mathbf{P}[\lambda]$ існують верхня унітрикутна матриця $U \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{P})$ та оборотна матриця $V(\lambda) \in \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{P}[\lambda])$ такі, що*

$$UA(\lambda)V(\lambda) = T(\lambda) = \begin{Vmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(\lambda)\mu_1(\lambda) & \mu_2(\lambda) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(\lambda)\mu_1(\lambda) & a_{n2}(\lambda)\mu_2(\lambda) & \ldots & \mu_n(\lambda) \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

де $\mu_i(\lambda)$ − інваріантні множники матриці $A(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Тоді многочленна матриця $T(\lambda)$, записана у вигляді матричного многочлена

$$T(\lambda) = T_0\lambda^s + T_1\lambda^{s-1} + \ldots + T_{s-1}\lambda + T_s$$

з трикутними матрицями-коефіцієнтами T_i, $i = 0,1,\ldots,s$, є характеристичною матрицею рівняння

$$X^sT_0 + X^{s-1}T_1 + \ldots + X\,T_{s-1} + T_s = 0\,. \tag{5}$$

Зрозуміло, що рівняння (1) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли має розв'язки рівняння (5), причому, якщо матриця C є розв'язком рівняння (5), то $B = U^{-1}CU$ є розв'язком рівняння (1), де U – верхня унітрикутна матриця зі співвідношення (4), тобто відповідні розв'язки рівнянь (1) і (5) є трикутно подібними.

У цій роботі вказуються умови, за яких розв'язки матричного многочленного рівняння (1) є трикутного вигляду, і пропонується метод їх знаходження.

Для опису розв'язків рівняння (5) достатньо описати ліві лінійні унітальні дільники його характеристичної матриці $T(\lambda)$. Надалі під трикутними будемо розуміти нижні трикутні матриці.

Теорема 2. *Нехай* $T(\lambda) = \left\| t_{ij}(\lambda) \right\|_1^n$ – *трикутна матриця і її діагональні елементи зображаються у вигляді добутків*

$$t_{ii}(\lambda) = (\lambda - b_{ii})c_{ii}(\lambda), \qquad i = 1,\ldots,n\,,$$

і для матриці $T(\lambda)$ *існує лінійний унітальний дільник, тобто*

$$T(\lambda) = (E\lambda - B)\,C(\lambda), \qquad \det(E\lambda - B) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - b_{ii})\,.$$

Якщо виконується хоча б одна з умов:

(***i***) $\left((\det(E\lambda - B),\ \det C(\lambda)),\ d_{n-1}^T(\lambda)\right) = 1\,,$

(***ii***) $\left(\left(t_{ii}(\lambda), \prod_{j=i+1}^{n}(\lambda - b_{jj})\right), d_{n-1}^T(\lambda)\right) = 1, \qquad i = 1,\ldots,n-1\,,$

де $d_{n-1}^T(\lambda)$ – *найбільший спільний дільник мінорів* $(n-1)$*-го порядку матриці* $T(\lambda)$, *то дільник* $B(\lambda) = E\lambda - B$ *матриці* $T(\lambda)$ *є трикутного вигляду.*

Д о в е д е н н я одержується із теорем 1 та 2 із [9]. ◊

Трикутні дільники матриці $T(\lambda)$ визначаємо на основі такого твердження.

Теорема 3. *Нехай* $T(\lambda) = \left\| t_{ij}(\lambda) \right\|_1^n$ – *трикутна матриця і її діагональні елементи зображаються у вигляді добутків*

$$t_{ii}(\lambda) = (\lambda - b_{ii})c_{ii}(\lambda), \qquad i = 1,\ldots,n\,.$$

Тоді існує лівий лінійний унітальний дільник

$$E\lambda - B,\ \ \det(E\lambda - B) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - b_{ii})\,,$$

матриці $T(\lambda)$, *тобто*

$$\left\| \begin{matrix} t_{11}(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21}(\lambda) & t_{22}(\lambda) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1}(\lambda) & t_{n2}(\lambda) & \ldots & t_{nn}(\lambda) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \lambda - b_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ u_{21} & \lambda - b_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & \lambda - b_{nn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} c_{11}(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ v_{21}(\lambda) & c_{22}(\lambda) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1}(\lambda) & v_{n2}(\lambda) & \ldots & c_{nn}(\lambda) \end{matrix} \right\|, \tag{6}$$

тоді й тільки тоді, коли система рівнянь

$$u_{ij}(\lambda)\cdot c_{jj}(\lambda)+(\lambda-b_{ii})v_{ij}(\lambda)+\sum_{\ell=j+1}^{i-1}u_{i\ell}(\lambda)v_{\ell j}(\lambda)=t_{ij}(\lambda)\,,$$
$$i,j=1,\ldots,n,\qquad j<i\,, \tag{7}$$

має розв'язки відносно $u_{ij}(\lambda)$ *та* $v_{ij}(\lambda)$, $i,j=1,\ldots n$, $j<i$.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що з виконання рівності (6) випливає розв'язність системи рівнянь (7).

Нехай тепер система рівнянь (7) має розв'язки. Відшукання розв'язків цієї системи зводиться до послідовного розв'язування многочленних рівнянь вигляду

$$a(\lambda)x(\lambda)+b(\lambda)y(\lambda)=c(\lambda)\,.$$

У роботі [17] наведено алгоритм для знаходження розв'язків $x(\lambda)$ і $y(\lambda)$ такого многочленного рівняння. Зокрема, із (7) маємо многочленні рівняння

$$u_{ij}(\lambda)c_{jj}(\lambda)+(\lambda-b_{ii})v_{ij}(\lambda)=t_{ij}(\lambda),\qquad i,j=1,\ldots n,\qquad j<i\,. \tag{8}$$

Відомо [17], що серед розв'язків кожного із цих рівнянь завжди існує такий, що $\deg u_{ij}(\lambda)<\deg(\lambda-b_{ii})$, тобто $u_{ij}(\lambda)=u_{ij}\in\mathbf{P}$, $i,j=1,\ldots n$, $j<i$. Тоді унітальна матриця

$$E\lambda-B=\begin{Vmatrix}\lambda-b_{11} & 0 & \ldots & 0\\ u_{21} & \lambda-b_{22} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & \lambda-b_{nn}\end{Vmatrix}$$

є лівим дільником матриці $T(\lambda)$. Теорему доведено. ◊

Далі опишемо всі розв'язки трикутного вигляду з одним елементарним дільником, а також розв'язки простої структури матричного многочленного рівняння (1).

Лема. *Трикутна матриця* $T=\left\|t_{ij}\right\|_1^n$ *трикутно подібна до трикутної матриці* $\tilde T=\left\|\tau_{ij}\right\|_1^n$, *де*

1) $\tau_{ii}=t_{ii}$, $i=1,\ldots,n$;

2) *якщо* $t_{ii}\neq t_{jj}$, $i\neq j$, *то* $\tau_{ij}=0$, $1\le j<i\le n$;

3) *якщо* $t_{ii}=t_{i+1,i+1}$ *та* $t_{i+1,i}\neq 0$ *для деякого* i, *то* $\tau_{i+1,i}=1$, $1\le i\le n-1$.

Д о в е д е н н я. Нехай $T=S^{-1}\tilde TS$, де $S=\left\|s_{ij}\right\|_1^n$ – неособлива трикутна матриця, або $ST-\tilde TS=0$. Це рівносильно рівностям

$$\sum_{k=j}^{i}(s_{ik}t_{kj}-\tau_{ik}s_{kj})=0,\qquad 1\le j\le i\le n\,,$$

з яких і випливає твердження. ◊

Наслідок 1. *Трикутна матриця* $T=\left\|t_{ij}\right\|_1^n$ *з одним елементарним дільником* $(\lambda-\alpha)^n$ *трикутно подібна до клітки Жордана*

$$J=\begin{Vmatrix}\alpha & & & \\ 1 & \alpha & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & 1 & \alpha\end{Vmatrix}.$$

Наслідок 2. *Трикутна матриця* $T = \| t_{ij} \|_1^n$ *простої структури трикутно подібна до діагональної матриці* $D = \operatorname{diag}(t_{11}, t_{22}, \ldots, t_{nn})$.

Д о в е д е н н я. Матриця $T = \| t_{ij} \|_1^n$ простої структури подібна до діагональної матриці $D = \operatorname{diag}(t_{11}, t_{22}, \ldots, t_{nn})$. Тоді на снові теореми Рота [19] та її узагальнення [14] випливає, що існує нижня унітрикутна матриця S така, що $STS^{-1} = D$. ◊

Зауважимо, що у роботі [21] для окремих класів трикутних матриць встановлено форми щодо їх трикутної подібності.

Теорема 4. *Нехай матриця* $\Phi(\lambda) = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, (\lambda - \alpha)^n)$ *є дільником канонічної діагональної форми* $D^A(\lambda)$ *характеристичної матриці* $A(\lambda)$ *матричного рівняння* (1) *і* J_Φ – *жорданова матриця, що відповідає матриці* $\Phi(\lambda)$. *Трикутні розв'язки* B_i *із жордановою нормальною формою* J_Φ *матричного рівняння* (1) *існують тоді й тільки тоді, коли лінійне матричне рівняння* (3) *має трикутні неособливі розв'язки* S_i. *Множина матриць*

$$\{B_i = S_i^{-1} J_\Phi S_i, \ i = 1, 2, \ldots\}, \tag{9}$$

де S_i *пробігає всі трикутні неособливі розв'язки лінійного матричного рівняння* (3), *є множиною усіх трикутних розв'язків із жордановою нормальною формою* J_Φ *матричного многочленного рівняння* (1).

Д о в е д е н н я. На основі наслідку 1 трикутні матриці B_i із жордановою формою J_Φ є трикутно подібними. Тому, якщо трикутна матриця B з жордановою нормальною формою J_Φ є розв'язком матричного рівняння (1), то B має вигляд $B = S^{-1} J_\Phi S$, де S – неособлива трикутна матриця, яка є розв'язком лінійного матричного рівняння (3). Справджується і обернене твердження: якщо S – неособливий трикутний розв'язок рівняння (3), то трикутна матриця $B = S^{-1} J_\Phi S$ є розв'язком матричного рівняння (1). Оскільки всі трикутні розв'язки B_i із жордановою формою J_Φ рівняння (1) є трикутно подібними, то множина матриць (9) вичерпує всі такі розв'язки рівняння (1). Теорему доведено. ◊

З урахуванням наслідку 2 аналогічно до теореми 4 описуються всі трикутні розв'язки простої структури матричного рівняння (1).

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
2. *Казимирский П. С.* К разложению квадратной полиномиальной матрицы в произведение линейных множителей // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 5. – С. 115–119.
3. *Казімірський П. С.* До розкладу поліноміальної матриці на лінійні множники // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 4. – С. 446–448.
4. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
5. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
6. *Казімірський П. С., Урбанович М. М.* Про розклад матричного двочлена на множники // Укр. мат. журн. – 1973. – **25,** № 4. – С. 451–461.
7. *Казімірський П. С., Ухансъка Д. В.* Критерій існування кореня m-го степеня для довільної матриці // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 8. – С. 711–712.
8. *Петков М.* Вьерху две квадратни матрични уравнения // Физ.-мат. списание. – 1975. – **18,** № 3. – С. 126–127.

9. *Петричкович В. М.* Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизация клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Мат. заметки. – 1985. – **37**, вып. 6 – С. 789–796.
10. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26 – С. 13–16.
11. *Bell J. H.* Families of solutions of the unilateral matrix equation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1950. – No 1. – P. 151–159.
12. *Cayley A.* A memoir on the theory of matrices // London Phil. Trans. – 1857. – **148**. – P. 17–37.
13. *Dickson L. E.* Modern algebraic theories. – Chicago, 1923. – 120 p.
14. *Feinberg R. B.* Equivalence of partitioned matrices // J. Res. Nat. Bul. Stand. – 1976. – **80B**, No 1. – P. 89–97.
15. *Frobenius F. G. L.* Über die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen // Sitzungsberichte der königl-preussischen Akademie der Wissenschaften. – Jahrgang, 1896. – S. 7–16.
16. *Ingraham M. N.* Rational methods in matrix equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – **47**. – P. 61–70.
17. *Kučera V.* Algebraic Theory of discrete optimal control for simple-variable systems. I. Preliminaries // Kybernetica. – 1973. – **9**, No. 2. – P. 94–107.
18. *Macduffee C. C.* The theory of matrices. – Berlin: Verlag von Julius Springer, 1933. – 110 p.
19. *Roth W. E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – No. 3. – P. 392–396.
20. *Sylvester J. J.* Sur les racines des matrices unitares // Compt. Rend. – 1882. – **94.** – P. 396–399.
21. *Thijsse Ph.* Upper triangular similarity of upper triangular matrices // Linear Algebra and its Appl. – 1997. – **260**. – P. 119–149.
22. *Treuenfels P.* On the solutions of the matrix equation $X^2 - 2AX + B = 0$ // Amer. Math. Monthly. – 1959. – **66.** – P. 145–147.

О РЕШЕНИЯХ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ И ПОДОБИИ МАТРИЦ

Описаны решения треугольного вида матричных многочленных уравнений. В частности, установлены условия, при которых решения матричного многочленного уравнения с матрицами-коэффициентами треугольного вида имеют такой же треугольный вид, и предложен метод их нахождения. Указан вид всех решений треугольного вида с одним элементарным делителем и простой структуры матричного многочленного уравнения.

ON SOLUTIONS OF MATRIX POLYNOMIAL EQUATIONS AND ON SIMILARITY OF MATRICES

The solutions of triangular form of the matrix polynomial equations are described. In particular, the conditions under which the solutions of matrix equation with matrix triangular coefficients have the same triangular form are established, and the method of finding them is proposed. The form of all triangular solutions of matrix equation with one elementary divisor and of simple structure is presented.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.09.05