УДК 512.64

В. Р. Зеліско[1], В. П. Щедрик[2]

МАТРИЦЯ ЗНАЧЕНЬ НА СИСТЕМІ КОРЕНІВ ДІАГОНАЛЬНИХ ЕЛЕМЕНТІВ МАТРИЦІ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Вводиться поняття значення матриці на системі коренів діагональних елементів матриці, яке базується на відомому означенні П. С. Казімірського значення матриці на системі коренів многочлена. Завдяки цьому суттєво спрощується процес встановлення умов регуляризації матричного многочлена, пошуку унітальних дільників, факторизації симетричних матриць і знаходження жорданової форми числової матриці.

Проблема виділення регулярного множника із матричного многочлена досліджувалась багатьма авторами й різними методами, що було викликано як задачами прикладного характеру, так і потребами побудови теорії розкладності матричних многочленів на множники та розв'язності матричних многочленних рівнянь. Найбільш вагомі результати при розв'язанні цих задач було отримано П. С. Казімірським [4, 5]. Алгебраїчний підхід і введене ним поняття значення матриці на системі коренів многочлена дозволили йому розв'язати проблему виділення регулярного множника із матричного многочлена. Опираючись на це, вводимо поняття значення матриці на системі коренів діагональних елементів матриці. Це дозволяє суттєво спростити процес встановлення умов регуляризації матричного многочлена, пошук унітальних дільників, факторизацію симетричних матриць і знаходження жорданової форми числової матриці.

Нехай $G(x)$ – $(n \times n)$-матриця над кільцем $\mathbb{C}[x]$ і $g_i(x)$ – її i-й рядок, $i = 1, \ldots, n$. Символом $M_{g_i(x)}(\varepsilon_i)$ будемо позначати значення матриці $g_i(x)$ на системі коренів многочлена $\varepsilon_i(x)$ [4, 5].

Означення. *Значенням матриці $G(x)$ на системі коренів діагональних елементів матриці* $\Psi(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x))$, $\varepsilon_i(x) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, називається числова матриця

$$M_{G(x)}(\Psi) = \left\| \begin{matrix} M_{g_1(x)}(\varepsilon_1) \\ \cdots \\ M_{g_n(x)}(\varepsilon_n) \end{matrix} \right\|,$$

де блок $M_{g_k(x)}(\varepsilon_k)$ відсутній, якщо $\varepsilon_k(x) \in \mathbb{C}^*$, $1 \le k \le n$.

Нехай $A(x) \in M_n(\mathbb{C}[x])$ – неособлива матриця. Матрицю $A(x)$ будемо називати унітальною, якщо в її записі у вигляді матричного многочлена $A(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \ldots + A_0$ старший коефіцієнт A_k дорівнює одиничній матриці E. Окрім того, будемо говорити, що матриця $A(x)$ регуляризується справа, якщо існує така оборотна матриця $U(x)$, що $A(x)U(x)$ є унітальною матрицею. Згідно з [1] для матриці $A(x)$ існують такі оборотні матриці $P(x)$ і $Q(x)$, що

$$P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)) = \Psi(x),$$

$$\varepsilon_i(x) \mid \varepsilon_{i+1}(x), \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Теорема 1. *Для того щоб матричний многочлен $A(x)$ регуляризувався справа, необхідно та достатньо, щоб*

$$\deg \det A(x) = ns \qquad i \qquad \det M_{P(x)\| E \;\; Ex \;\; \ldots \;\; Ex^{s-1} \|}(\Psi) \neq 0.$$

Д о в е д е н н я. Якщо матриця $A(x)$ регуляризовна, то для неї існує така оборотна матриця $U(x)$, що $A(x)U(x) = Ex^s + D_{s-1}x^{s-1} + \ldots + D_0$. Отже,

$$\deg\det A(x) = \deg\det A(x)U(x) =$$

$$= \deg\det\left(Ex^s + D_{s-1}x^{s-1} + \ldots + D_0\right) = ns.$$

На підставі теореми 3 із [5, с. 100] матриця $A(x)$ регуляризується справа тоді й тільки тоді, коли $\operatorname{rang} M_{A_*(x)\left\| E \;\; Ex \;\; \ldots \;\; Ex^{s-1} \right\|}(\Delta) = ns$, де $A_*(x)$ − взаємна до матриці $A(x)$, $\Delta(x) = \det A(x)$. Оскільки $A(x) = P^{-1}(x)\Psi(x)Q^{-1}(x)$, то $A_*(x) = Q_*^{-1}(x)\Psi_*(x)P_*^{-1}(x)$. Оскільки $P_*^{-1}(x)P^{-1}(x) = \left|P^{-1}(x)\right| E = \dfrac{1}{|P(x)|}E$, то $P_*^{-1}(x) = \dfrac{1}{|P(x)|}P(x)$, де $|P(x)| = c \in \mathbb{C}^*$. Через $p_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, позначимо i-й рядок матриці $P(x)$. Тоді рядками матриці $P_*^{-1}(x)$ будуть $\dfrac{1}{c}p_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Використавши твердження 4 із [5, с. 29], отримаємо

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)E_x}(\Delta) =$$

$$= \operatorname{rang} M_{Q_*^{-1}(x)\Psi_*(x)P_*^{-1}(x)E_x}(\Delta) = \operatorname{rang} M_{\Psi_*(x)P_*^{-1}(x)E_x}(\Delta) = \delta,$$

де $E_x = \left\| E \;\; Ex \;\; \ldots \;\; Ex^{s-1} \right\|$. Зауваживши, що $\det\Psi(x) = d\Delta(x)$, де $d \in \mathbb{C}^*$, отримуємо, що $\Psi_*(x) = \operatorname{diag}\left(\dfrac{d\Delta(x)}{\varepsilon_1(x)}, \ldots, \dfrac{d\Delta(x)}{\varepsilon_n(x)}\right)$. Отже, рядки матриці $\Psi_*(x)P_*^{-1}(x)E_x$ мають вигляд $\dfrac{d}{c}\dfrac{\Delta(x)}{\varepsilon_i(x)}p_i(x)E_x$, $i = 1, \ldots, n$. Перестановкою рядків матриці $M_{\Psi_*(x)P_*^{-1}(x)E_x}(\Delta)$, що рівносильно домноженню її зліва на деяку неособливу числову матрицю L, можна звести до такого вигляду:

$$LM_{\Psi_*(x)P_*^{-1}(x)E_x}(\Delta) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} M_{\frac{d}{c}\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_1(x)}p_1(x)E_x}(\Delta) \\ \ldots \\ M_{\frac{d}{c}\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_n(x)}p_n(x)E_x}(\Delta) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{d}{c}M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_1(x)}p_1(x)E_x}(\Delta) \\ \ldots \\ \dfrac{d}{c}M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_n(x)}p_n(x)E_x}(\Delta) \end{matrix} \right\| = \frac{d}{c}\left\| \begin{matrix} M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_1(x)}p_1(x)E_x}(\Delta) \\ \ldots \\ M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_n(x)}p_n(x)E_x}(\Delta) \end{matrix} \right\|.$$

Отже,

$$\delta = \operatorname{rang} LM_{\Psi_*(x)P_*^{-1}(x)E_x}(\Delta) =$$

$$= \operatorname{rang}\left\| \begin{matrix} M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_1(x)}p_1(x)E_x}(\Delta) \\ \ldots \\ M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_n(x)}p_n(x)E_x}(\Delta) \end{matrix} \right\| = \operatorname{rang}\left\| \begin{matrix} M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_1(x)}p_1(x)E_x}\left(\dfrac{\Delta}{\varepsilon_1}\varepsilon_1\right) \\ \ldots \\ M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_n(x)}p_n(x)E_x}\left(\dfrac{\Delta}{\varepsilon_n}\varepsilon_n\right) \end{matrix} \right\|.$$

Згідно з твердженням 6 із [5, с. 31]

$$\delta = \operatorname{rang}\left\| \begin{matrix} M_{p_1(x)E_x}(\varepsilon_1) \\ \ldots \\ M_{p_n(x)E_x}(\varepsilon_n) \end{matrix} \right\| = \operatorname{rang} M_{P(x)E_x}(\Psi).$$

Отже, $\operatorname{rang} M_{P(x)E_x}(\Psi) = ns$. Оскільки $\deg\det\Psi(x) = ns$, то $M_{P(x)E_x}(\Psi)$ – квадратна матриця порядку ns. Це означає, що $\det M_{P(x)\left\| E\ Ex\ \dots\ Ex^{s-1}\right\|}(\Psi) \neq$ $\neq 0$. Теорему доведено. ◊

Вкажемо метод знаходження коефіцієнтів унітального матричного многочлена $A(x)U(x)$. Для цього поставимо у відповідність многочлену $(x-\alpha)^k$ матрицю

$$J_{\alpha^{(k)}} = \left\| \begin{matrix} \alpha & & & & 0 \\ 1 & \alpha & & & \\ & 2 & \alpha & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & k-1 & \alpha \end{matrix} \right\|,$$

многочлену $\varepsilon(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_t)^{k_t}$ – матрицю $J(\varepsilon) = J_{\alpha_1^{(k_1)}} \oplus \dots \oplus J_{\alpha_t^{(k_t)}}$, а матриці $\Psi(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\dots,\varepsilon_n(x))$ – блочно-діагональну матрицю $J(\Psi) = J(\varepsilon_1) \oplus \dots \oplus J(\varepsilon_n)$.

Лема. $M_{xG(x)}(\Psi) = J(\Psi)M_{G(x)}(\Psi)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $g_i(x)$, $i = 1,\dots,n$, – i-й рядок матриці $G(x)$, а $\varepsilon_i(x) = (x-\alpha_1)^{k_{i1}}\cdots(x-\alpha_t)^{k_{it}}$. Тоді

$$M_{xg_i(x)}\left((x-\alpha_j)^{k_{ij}}\right) = M_{xg_i(x)}\left[\alpha_j^{(k_{ij})}\right] =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \alpha_j g_i(\alpha_j) \\ g_i(\alpha_j) + \alpha_j g_i'(\alpha_j) \\ 2g_i'(\alpha_j) + \alpha_j g_i''(\alpha_j) \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ (k_{ij}-1)g_i^{(k_{ij}-2)}(\alpha_j) + \alpha_j g_i^{(k_{ij}-1)}(\alpha_j) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \alpha_j & & & & 0 \\ 1 & \alpha_j & & & \\ & 2 & \alpha_j & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & k_{ij}-1 & \alpha_j \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} g_i(\alpha_j) \\ g_i'(\alpha_j) \\ g_i''(\alpha_j) \\ \dots \\ g_i^{(k_{ij}-1)}(\alpha_j) \end{matrix} \right\| =$$

$$= J_{\alpha_j^{(k_{ij})}} M_{g_i(x)}\left[\alpha_j^{(k_{ij})}\right].$$

Отже,

$$M_{xg_i(x)}(\varepsilon_i) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} M_{xg_i(x)}\left[\alpha_1^{(k_{i1})}\right] \\ \dots \\ M_{xg_i(x)}\left[\alpha_t^{(k_{it})}\right] \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} J_{\alpha_1^{(k_{i1})}} M_{g_i(x)}\left[\alpha_1^{(k_{i1})}\right] \\ \dots \\ J_{\alpha_t^{(k_{it})}} M_{xg_i(x)}\left[\alpha_t^{(k_{it})}\right] \end{matrix} \right\| = J(\varepsilon_i)M_{g_i(x)}(\varepsilon_i).$$

Таким чином,

$$M_{xG(x)}(\Psi) = \left\| \begin{matrix} M_{xg_1(x)}(\varepsilon_1) \\ \dots \\ M_{xg_n(x)}(\varepsilon_n) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} J(\varepsilon_1)M_{g_1(x)}(\varepsilon_1) \\ \dots \\ J(\varepsilon_n)M_{g_n(x)}(\varepsilon_n) \end{matrix} \right\| = J(\Psi)M_{G(x)}(\Psi). \quad \Diamond$$

Теорема 2. *Нехай для матричного многочлена* $A(x)$ *існує така оборотна матриця* $U(x)$, *що* $A(x)U(x) = Ex^s - D_{s-1}x^{s-1} - \dots - D_0$. *Тоді коефіцієнти унітального матричного многочлена* $A(x)U(x)$ *визначаються за формулою*

$$\left\| \begin{matrix} D_0 \\ D_1 \\ \dots \\ D_{s-1} \end{matrix} \right\| = \left\| M_0 \quad M_1 \quad \dots \quad M_{s-1} \right\|^{-1} M_s,$$

де $M_i = J^i(\Psi)M_{P(x)}(\Psi)$, $i = 0,1,\dots,s$.

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 2 з [5, с. 103] шукані коефіцієнти матричного многочлена $A(x)U(x)$ визначаємо як розв'язок лінійного матричного рівняння

$$M_{A_*(x)\left\| E \ Ex \ \dots \ Ex^{s-1} \right\|}(\Delta)X = M_{A_*(x)x^s}(\Delta), \qquad (1)$$

де $X = \left\| \begin{matrix} X_0 \\ X_1 \\ \dots \\ X_{s-1} \end{matrix} \right\|$. Оскільки $A_*(x) = Q_*^{-1}(x)\Psi_*(x)P_*^{-1}(x)$, то, як випливає з твердження 4 з [5, с. 29], існує така неособлива блочно-діагональна матриця L_1, що $M_{A_*(x)E_x}(\Delta) = L_1 M_{\Psi_*(x)P_*^{-1}(x)E_x}(\Delta)$ і $M_{A_*(x)x^s}(\Delta) = L_1 M_{\Phi_*(x)P_*^{-1}(x)x^s}(\Delta)$. Отже, рівняння (1) є еквівалентним до рівняння

$$M_{\Psi_*(x)P_*^{-1}(x)E_x}(\Delta)X = M_{\Psi_*(x)P_*^{-1}(x)x^s}(\Delta).$$

Провівши міркування аналогічні до тих, які були використані при доведенні теореми 1, а також застосувавши твердження 4 з [5, с. 29], запишемо отримане рівняння у вигляді

$$L_2 \left\| \begin{matrix} M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_1(x)}p_1(x)E_x}(\Delta) \\ \dots \\ M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_n(x)}p_n(x)E_x}(\Delta) \end{matrix} \right\| X = L_2 \left\| \begin{matrix} M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_1(x)}p_1(x)x^s}(\Delta) \\ \dots \\ M_{\frac{\Delta(x)}{\varepsilon_n(x)}p_n(x)x^s}(\Delta) \end{matrix} \right\|, \qquad (2)$$

де L_2 − неособлива матриця. Скориставшись твердженням 6 з [5, с. 31], знайдемо таку неособливу блочно-діагональну матрицю L_3, що рівняння (2) запишеться так:

$$L_2 L_3 \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ M_{p_1(x)E_x}(\varepsilon_1) \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ M_{p_n(x)E_x}(\varepsilon_n) \end{matrix} \right\| X = L_2 L_3 \left\| \begin{matrix} \mathbf{0} \\ M_{p_1(x)x^s}(\varepsilon_1) \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ M_{p_n(x)x^s}(\varepsilon_n) \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки нульові блоки в правій та лівій частині цього рівняння мають однакові розміри, то скоротивши на $L_2 L_3$ і викресливши всі нульові блоки, отримаємо рівняння

$$M_{P(x)E_x}(\Psi)X = M_{P(x)x^s}(\Psi),$$

яке рівносильне рівнянню (1). Застосувавши лему послідовно s разів до матриці $M_{P(x)x^s}(\Psi)$, отримаємо

$$M_{x^s P(x)}(\Psi) = J(\Psi) M_{x^{s-1}P(x)}(\Psi) = J^2(\Psi) M_{x^{s-2}P(x)}(\Psi) =$$
$$= \dots = J^s(\Psi) M_{P(x)}(\Psi) = M_s.$$

Запишемо матрицю $M_{P(x)E_x}(\Psi)$ у вигляді

$$M_{P(x)E_x}(\Psi) = M_{P(x)\left\| E \ Ex \ \dots \ Ex^{s-1} \right\|}(\Psi) = M_{\left\| P(x) \ xP(x) \ \dots \ x^{s-1}P(x) \right\|}(\Psi) =$$
$$= \left\| M_{P(x)}(\Psi) \quad M_{xP(x)}(\Psi) \quad \dots \quad M_{x^{s-1}P(x)}(\Psi) \right\| =$$
$$= \left\| M_{P(x)}(\Psi) \quad J(\Psi)M_{P(x)}(\Psi) \quad \dots \quad J^{s-1}(\Psi)M_{P(x)}(\Psi) \right\| =$$
$$= \left\| M_0 \quad M_1 \quad \dots \quad M_{s-1} \right\|.$$

Отже, рівняння (1) еквівалентне до рівняння $\| M_0 \; M_1 \; \ldots \; M_{s-1} \| X = M_s$. Оскільки матриця $A(x)$ регуляризовна, то на підставі теореми 1

$$\det M_{P(x)\| E \; Ex \; \ldots \; Ex^{s-1} \|}(\Psi) = \det \| M_0 \; M_1 \; \ldots \; M_{s-1} \| \neq 0,$$

тобто матриця $\| M_0 \; M_1 \ldots M_{s-1} \|$ є оборотною, тому $X = \| M_0 \; M_1 \ldots M_{s-1} \|^{-1} M_s$, що й потрібно було довести. ◊

Згідно з результатами роботи [9] основну роль в описанні дільників матриці $A(x)$, які мають наперед задану канонічну діагональну форму (к. д. ф.) $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, відіграє $\mathbf{W}(\Psi, \Phi)$ – множина представників лівих класів суміжності множини $\mathbf{L}(\Psi, \Phi)$ по групі $\mathbf{G}_\Phi$, які складаються з оборотних матриць відповідно вигляду

$$\left\| \begin{matrix} \ell_{11} & \ell_{12} & \ldots & \ell_{1,n-1} & \ell_{1n} \\ \dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} \ell_{21} & \ell_{22} & \ldots & \ell_{2,n-1} & \ell_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} \ell_{n1} & \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_2)} \ell_{n2} & \ldots & \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} \ell_{n,n-1} & \ell_{nn} \end{matrix} \right\|, \qquad (3)$$

$$\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} & \dfrac{\varphi_n}{\varphi_2} h_{n2} & \ldots & \dfrac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{n,n-1} & h_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

[2, 9]. Так, на підставі теореми 2 роботи [9] множина $(\mathbf{W}(\Psi,\ \Phi) P(x))^{-1} \Phi(x)$ складається з усіх лівих неасоційованих справа дільників матриці $A(x)$, які мають к. д. ф. $\Phi(x)$. У найпростішому випадку $\mathbf{W}(\Psi, \Phi) = \{E\}$. Тоді $\mathbf{L}(\Psi, \Phi) =$ $= \mathbf{G}_\Phi$, що рівносильно умові

$$(\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j, \qquad i = 2, \ldots, n, \qquad j = 1, \ldots, n-1, \qquad i > j.$$

У цьому випадку матриця $A(x)$ має лише один з точністю до асоційовності дільник з к. д. ф. $\Phi(x)$, яким є матриця $P^{-1}(x)\Phi(x)$. Щоб вказати явний вигляд множини $\mathbf{W}(\Psi,\ \Phi)$, розглянемо нижню унітрикутну матрицю

$$V(\Phi) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \dfrac{\varphi_2}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} k_{21} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} k_{n1} & \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_2)} k_{n2} & \ldots & \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} k_{n,n-1} & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$k_{ij} = \begin{cases} 0, & (\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j, \\ k_{ij0} + k_{ij1} x + \ldots + k_{ijh_{ij}} x^{h_{ij}}, & (\varphi_i, \varepsilon_j) \neq \varphi_j, \end{cases}$$

де $h_{ij} = \deg \dfrac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} - 1$, $i = 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n-1$, $i > j$, k_{ijl} – змінні, що приєднуються до поля $\mathbb{C}$. Зауважимо, що матриця $V(\Phi)$ збігається з ядром визначальної матриці, введеної П. С. Казімірським [4, 5]. Позначимо через

$\mathbf{V}(\Psi,\Phi)$ множину нижніх унітрикутних матриць, які отримуються із матриці $V(\Phi)$, коли змінні k_{ijl} незалежно одна від одної пробігають всі значення із поля $\mathbb{C}$. Згідно з наслідком із теореми з [8] $\mathbf{V}(\Psi,\ \Phi) \subseteq \mathbf{W}(\Psi,\ \Phi)$. При цьому на підставі наслідку 1 із [7] $\mathbf{W}(\Psi,\ \Phi) = \mathbf{V}(\Psi,\ \Phi)$ тоді й тільки тоді, коли степінь усіх простих дільників, які входять в розклад многочлена $\dfrac{\varphi_i(x)}{\varphi_{i-1}(x)}$ на прості множники, є більшим від степенів відповідних дільників елемента $\dfrac{\varepsilon_{i-1}(x)}{\varphi_{i-1}(x)}$, $i = 2,\dots,n$. Це означає, що за цих умов задача пошуку унітальних дільників матриці $A(x)$ зводиться до знаходження матриць множини $(\mathbf{V}(\Psi,\ \Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$, які регуляризуються справа.

Приклад. Нехай $A(x) = \operatorname{diag}\left(x,\ x^2(x-1)\right) = \Psi(x)$. Опишемо унітальні дільники цієї матриці, які мають к.д.ф. $\Phi(x) = \operatorname{diag}(1,\ x^2)$. Оскільки $\dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} = x^2$, $\dfrac{\varepsilon_1(x)}{\varphi_1(x)} = x^1$, $2 > 1$, а, отже, $\mathbf{V}^{-1}(\Psi,\ \Phi)\Phi(x)$ є множиною всіх лівих неасоційованих справа дільників матриці $A(x)$, які мають к.д.ф. $\Phi(x)$. У розглядуваному випадку $\mathbf{V}(\Psi,\ \Phi) = \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ xk_{21} & 1 \end{matrix} \right\| \right\}$, де $k_{21} \in \mathbb{C}$. Виберемо серед цих дільників ті, що регуляризуються справа. Оскільки

$$M_{\left\| \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ xk_{21} & 1 \end{smallmatrix} \right\|}\left(\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{matrix} \right\| \right) = M_{\| xk_{21} \quad 1 \|}(x^2) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ k_{21} & 0 \end{matrix} \right\|$$

і

$$\det \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ k_{21} & 0 \end{matrix} \right\| = -\,k_{21} \not\equiv 0\,,$$

то згідно з теоремою 1 усі матриці множини $\mathbf{V}^{-1}(\Psi,\ \Phi)\Phi(x)$, за винятком матриці $\Phi(x)$, регуляризуються справа. При цьому шукані дільники мають вигляд $Ex - B$, де

$$B = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ k_{21} & 0 \end{matrix} \right\|^{-1} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ k_{21} & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & k_{21}^{-1} \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad k_{21} \neq 0\,. \qquad \Diamond$$

Якщо ж $\mathbf{V}(\Psi,\ \Phi)$ є власною підмножиною $\mathbf{W}(\Psi,\ \Phi)$, то множина $(\mathbf{V}(\Psi,\ \Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ описує лише частину шуканих дільників матриці $A(x)$. Тим не менше, якщо матриця $A(x)$ має унітальний дільник, то в множині $(\mathbf{V}(\Psi,\ \Phi)P(x))^{-1}\Phi(x)$ існує матриця, яка регуляризується справа. Цей факт безпосередньо випливає з наступної теореми.

Теорема 3. *Для того щоб із матричного многочлена $A(x)$ можна було виділити унітальний дільник з к.д.ф. $\Phi(x)$, $\deg\det\Phi(x) = ns$, необхідно та достатньо, щоб $\det M_{V(\Phi)P(x)\| E \ Ex \ \dots \ Ex^{s-1} \|}(\Phi) \not\equiv 0$, причому коефіцієнти унітального дільника $Ex^s - B_{s-1}x^{s-1} - \dots - B_0$ визначаються за формулою*

$$\left\| \begin{matrix} B_0 \\ B_1 \\ \dots \\ B_{s-1} \end{matrix} \right\| = \| N_0 \ \ N_1 \ \ \dots \ \ N_{s-1} \|^{-1} N_s\,, \tag{4}$$

де $N_i = J^i(\Phi)M_{V(\Phi)P(x)}(\Phi)$, $i = 0,1,\dots,s$.

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 1 з [5, с. 153], для того щоб із матриці $A(x)$ можна було виділити унітальний дільник з к.д.ф. $\Phi(x)$, необхідно та достатньо, щоб

$$\operatorname{rang} M_{W(\Phi)P(x)E_x}(\varphi) = ns, \tag{5}$$

де $\varphi(x) = \det \Phi(x)$, $W(\Phi) = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}, \ \ldots, \ \frac{\varphi(x)}{\varphi_n(x)}\right) V(\Phi) = \Phi_*(x)V(\Phi)$. Міркуючи аналогічно, як при доведенні теореми 1, можна показати, що $\operatorname{rang} M_{W(\Phi)P(x)E_x}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{V(\Phi)P(x)E_x}(\Phi)$. Оскільки матриця $M_{V(\Phi)P(x)E_x}(\Phi)$ квадратна порядку ns, то умова (5) еквівалентна умові $\det M_{V(\Phi)P(x)E_x}(\Phi) \not\equiv \not\equiv 0$. Зважаючи на те, що матриця $V(\Phi)$ має вигляд (3), отримуємо, що матриця $(V(\Phi)P(x))^{-1}\Phi$ є лівим дільником матриці $A(x)$ над $\mathbb{C}_{k_{ijl}}[x]$, де $\mathbb{C}_{k_{ijl}}$ – трансцедентне розширення поля $\mathbb{C}$ за рахунок приєднання усіх параметрів, які фігурують в многочленах $k_{ij}(x)$. Згідно з теоремою 1 матриця $(V(\Phi)P(x))^{-1}\Phi$ регуляризується справа, причому на підставі теореми 2 коефіцієнти унітального дільника знаходяться за формулою (5). Теорему доведено. ◊

Зауваження. Очевидно, що матриці з рівності (4) є матрицями над полем $\mathbb{C}_{k_{ijl}}$. Надаючи параметрам, які є коефіцієнтами в многочленах $k_{ij}(x)$, допустимих значень із поля $\mathbb{C}$, тобто таких значень, при яких матриця $\| N_0 \ N_1 \ \ldots \ N_{s-1} \|$ є неособливою, будемо отримувати шукані унітальні дільники матриці $A(x)$ над $\mathbb{C}[x]$.

Інволюцією в кільці $\mathbb{C}[x]$ називають таку операцію ∇, що для довільних елементів $a, b \in \mathbb{C}[x]$ виконуються рівності

$$(a+b)^\nabla = a^\nabla + b^\nabla, \qquad (ab)^\nabla = a^\nabla b^\nabla, \qquad (a^\nabla)^\nabla = a.$$

На кільце $M_n(\mathbb{C}[x])$ інволюція переноситься таким чином [6]:

$$A(x)^\nabla = \| a_{ij}(x) \|^\nabla = \| a_{ji}(x)^\nabla \|.$$

Матрицю $A(x)$ назвемо ∇-симетричною, якщо $A(x)^\nabla = A(x)$.

У роботах [6, 10] досліджувалось питання факторизації симетричних матриць над кільцями з інволюцією, зокрема над кільцем многочленів з інволюцією. Із застосуванням теорії виділення регулярного множника з матричного многочлена в роботі [3] вказано необхідні та достатні умови існування факторизації ∇-симетричної матриці вигляду

$$A(x) = B(x)C(x)B(x)^\nabla, \tag{6}$$

де $B(x)$ – унітальна многочленна матриця, $C(x)^\nabla = C(x)$ – неособлива матриця. Враховуючи теорему 3 і результати роботи [3], отримаємо таку теорему.

Теорема 4. *Для ∇-симетричної матриці $A(x)$ існує факторизація вигляду* (6), *де $B(x)$ – унітальна многочленна матриця степеня s, тоді й тільки тоді, коли ∇-симетрична матриця $V(\Phi)P(x)A(x)P(x)^\nabla\Phi(x)^\nabla$ ділиться одночасно зліва на $\Phi(x)$ і справа на $\Phi(x)^\nabla$. При допустимих значеннях величин k_{ijs} матриці $V(\Phi)$, для яких виконується умова $\det M_{V(\Phi)P(x)\| E \ Ex \ \ldots \ Ex^{s-1} \|}(\Phi) \not\equiv 0$, коефіцієнти $B(x)$ визначаються за формулою* (4).

Використаємо отримані результати для дослідження існування і визначення розв'язків многочленних матричних рівнянь. Для цього дещо видозмінимо поняття значення матриці $g(x)$ (у розглядуваному конкретному випадку $g(x)$ − матриця-рядок) на системі коренів многочлена $\varepsilon(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_t)^{k_t}$:

$$\tilde{M}_{g(x)}(\varepsilon) = \left\| \begin{matrix} \tilde{M}_{g(x)}[\alpha_1^{(k_1)}] \\ \dots \\ \tilde{M}_{g(x)}[\alpha_t^{(k_t)}] \end{matrix} \right\|, \quad \text{де} \quad \tilde{M}_{g(x)}[\alpha_i^{(k_i)}] = \left\| \begin{matrix} 1 g(\alpha_i) \\ \frac{1}{1!} g'(\alpha_i) \\ \frac{1}{2!} g''(\alpha_i) \\ \dots \\ \frac{1}{(k_i-1)!} g^{(k-1)}(\alpha_i) \end{matrix} \right\|.$$

Легко зауважити, що

$$\tilde{M}_{g(x)}[\alpha_i^{(k_i)}] = T_{\alpha_i^{(k_i)}} M_{g(x)}[\alpha_i^{(k_i)}],$$

де

$$T_{\alpha_i^{(k_i)}} = \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \dots, \frac{1}{(k_i-1)!}\right).$$

Позначимо також

$$\tilde{M}_{G(x)}(\Psi) = \left\| \begin{matrix} \tilde{M}_{g_1(x)}(\varepsilon_1) \\ \dots \\ \tilde{M}_{g_n(x)}(\varepsilon_n) \end{matrix} \right\|.$$

Очевидно, що $\tilde{M}_{G(x)}(\Psi) = T_\Psi M_{G(x)}(\Psi)$, де T_Ψ − діагональна матриця, яка є прямою сумою усіх матриць $T_{\alpha_{ij}}^{(k_{ij})}$.

Розглянемо одностороннє матричне рівняння

$$X^k A_k + X^{k-1} A_{k-1} + \dots + A_0 = 0. \qquad (7)$$

Поставимо йому у відповідність матричний многочлен

$$A(x) = A_k x^k + A_{k-1} x^{k-1} + \dots + A_0, \qquad A(x) = P^{-1}(x)\Psi(x)Q^{-1}(x),$$

де $\Psi(x)$ − канонічна діагональна форма матриці $A(x)$.

Теорема 5. *Для того щоб матричне рівняння* (7) *мало розв'язок, характеристичний многочлен якого має к.д.ф.* $\Phi(x)$, $\deg\det\Phi(x) = n$, $\Phi(x) \mid \Psi(x)$, *необхідно та достатньо, щоб* $\det \tilde{M}_{V(\Phi)P(x)}(\Phi) \not\equiv 0$, *причому сам розв'язок визначається за формулою*

$$X = \tilde{M}^{-1}_{V(\Phi)P(x)}(\Phi) J_*(\Phi) \tilde{M}_{V(\Phi)P(x)}(\Phi),$$

де $J_*(\Phi)$ − *нижня форма Жордана матриці* $J(\Phi)$.

Д о в е д е н н я. Згідно з узагальненою теоремою Безу матриця B є розв'язком рівняння (7) тоді й тільки тоді, коли $A(x) = (Ex - B)C(x)$. Отже, задача пошуку розв'язків рівняння (7) зводиться до пошуку лівих унітальних дільників першого степеня матриці $A(x)$. На підставі теореми 3 необхідною і достатньою умовою виділення лінійного унітального дільника з заданою к.д.ф. є умова $\det M_{V(\Phi)P(x)}(\Phi) \not\equiv 0$. Оскільки матриці $\tilde{M}_{V(\Phi)P(x)}(\Phi)$, $M_{V(\Phi)P(x)}(\Phi)$ відрізняються на неособливу діагональну матрицю T_Φ, то умова $\det M_{V(\Phi)P(x)}(\Phi) \not\equiv 0$ рівносильна умові $\det \tilde{M}_{V(\Phi)P(x)}(\Phi) \not\equiv 0$. Згідно з цією ж теоремою сам унітальний дільник визначається за формулою

$$X = M^{-1}{}_{V(\Phi)P(x)}(\Phi) J(\Phi) M_{V(\Phi)P(x)}(\Phi).$$

Зваживши на те, що $T_\Phi J(\Phi) T_\Phi^{-1} = J_*(\Phi)$, отримуємо

$$\begin{aligned} X &= M^{-1}{}_{V(\Phi)P(x)}(\Phi) J(\Phi) M_{V(\Phi)P(x)}(\Phi) = \\ &= \left(T_\Phi M_{V(\Phi)P(x)}(\Phi)\right)^{-1} J_*(\Phi) \left(T_\Phi M_{V(\Phi)P(x)}(\Phi)\right) = \\ &= \tilde{M}^{-1}_{V(\Phi)P(x)}(\Phi) J_*(\Phi) \tilde{M}_{V(\Phi)P(x)}(\Phi). \end{aligned}$$

Теорему доведено. ◊

Зауваження. На підставі теореми 4 і результатів роботи [6] отримуємо необхідні та достатні умови існування розв'язку матричного рівняння (7) у таких випадках:

(***i***) усі матриці A_{2m} − ермітові, а всі A_{2m+1} − антиермітові;

(***ii***) усі матриці A_{2m} − симетричні, а всі A_{2m+1} − кососиметричні;

(***iii***) усі матриці A_i − дійсні симетричні.

Зауважимо також, що, коли матриця B є розв'язком рівняння (7), то B^∇ є розв'язком рівняння

$$A_k X^k + A_{k-1} X^{k-1} + \ldots + A_0 = 0.$$

На завершення вкажемо один метод зведення числової матриці до її форми Жордана.

Теорема 6. *Нехай* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *і* $P(x)(Ex - A)Q(x) = \operatorname{diag}\left(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)\right) = \Psi(x)$ *− канонічна діагональна форма матриці* $Ex - A$. *Тоді*

$$\tilde{M}_{P(x)}(\Psi) A \tilde{M}^{-1}_{P(x)}(\Psi) = J_*(\Psi)$$

є формою Жордана матриці A.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що матриця $A(x) = Ex - A$ регуляризовна. Тоді згідно з теоремою 1 $\det M_{P(x)}(\Psi) \neq 0$, а, отже, $\det \tilde{M}_{P(x)}(\Psi) \neq 0$. На підставі теореми 2 та з огляду на єдиність регуляризації отримуємо

$$\begin{aligned} A &= M^{-1}{}_{P(x)}(\Psi) J(\Phi) M_{P(x)}(\Psi) = \\ &= \left(M^{-1}{}_{P(x)}(\Psi) T_\Phi^{-1}\right) \left(T_\Phi J(\Phi) T_\Phi^{-1}\right) \left(T_\Phi M_{P(x)}(\Psi)\right) = \\ &= \left(T_\Phi M_{P(x)}(\Psi)\right)^{-1} J_*(\Psi) \left(T_\Phi M_{P(x)}(\Psi)\right) = \tilde{M}^{-1}_{P(x)}(\Psi) J_*(\Psi) \tilde{M}_{P(x)}(\Psi), \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. ◊

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. − Москва: Наука, 1988. − 552 с.
2. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. − 1980. − Вып. 12. − С. 14−21.
3. *Зеліско В. Р., Кучма М. І.* Факторизація симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 1997. − **40**, № 4. − С. 91−95.
4. *Казимирский П. С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. − 1980. − **32**, № 4. − С. 483−498.
5. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. − Київ: Наук. думка, 1981. − 224 с.
6. *Любачевский Б. Д.* Факторизация симметричных матриц с элементами из кольца с инволюцией. Ч. 1 // Сиб. мат. журн. − 1973. − **14**, № 2. − С. 337−356.
7. *Щедрик В. П.* Один клас дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників // Мат. студії. − 2002. − **17**, № 1. − С. 23−28.
8. *Щедрик В. П.* Про один клас дільників матриць // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 1997. − **40**, № 3. − С. 13−19.
9. *Щедрик В. П.* Структура та властивості дільників матриць над комутативною областю елементарних дільників // Мат. студії. − 1998. − **10**, № 2. − С. 115−120.
10. *Якубович В. А.* Факторизация симметричных матричных многочленов // Докл. АН СССР. − 1970. − **194**, № 3. − С. 532−535.

МАТРИЦА ЗНАЧЕНИЙ НА СИСТЕМЕ КОРНЕЙ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Вводится понятие значения матрицы на системе корней диагональных элементов матрицы, которое базируется на известном определении П. С. Казимирского значения матрицы на системе корней многочлена. Благодаря этому существенно упрощается процесс нахождения условий регуляризации матричного многочлена, поиска унитальных делителей, факторизации симметричных матриц, а также нахождения жордановой формы числовой матрицы.

MATRIX OF VALUES ON A SYSTEM OF ROOTS OF DIAGONAL ELEMENTS OF MATRIX AND ITS APPLICATIONS

P. S. Kazimirskyj introduced the notion of values of matrix on a system of polynomial. On its base, the concept of values of matrix on a system of roots of diagonal elements of matrix is introduced. The processes of regularization conditions of a matrix polynomial, the description of monic divisors, the factorization of symmetric matrices and the calculation of the Jordan normal form of an integer matrix are essentially simplified due to this new concept.

[1] Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 19.09.05