УДК 512.553

М. Я. Комарницький, І. О. Мельник

ПРО АКСІОМАТИЗОВНІСТЬ КЛАСУ НЕКОМУТАТИВНИХ ПРЮФЕРОВИХ КІЛЕЦЬ

Досліджується питання про збереження деяких властивостей ідеалів кілець при переході до (внутрішніх) ультрадобутків. Встановлено, що клас некомутативних прюферових (у сенсі Гретера) кілець є аксіоматизовним. Доведено неаксіоматизовність класу некомутативних кілець нормування Дубровіна.

1. Термінологія і попередні відомості. Наведемо необхідну інформацію щодо термінології і відомих фактів, які відсутні в україномовних монографічних і періодичних виданнях. Уточнимо також нашу інтерпретацію деяких термінів, зміст яких у різних публікаціях далеко не є однозначним. Детальніше з цим матеріалом можна ознайомитись за статтями [2, 4, 6] і за монографією [3]. Домовимось також про деякі часто вживані позначення.

Усі розглядувані кільця вважатимемо асоціативними з ненульовою одиницею, а всі модулі правими та унітарними. Термін «область» означає кільце без дільників нуля. Кільце R називається *правим квазі-дуо-кільцем*, якщо кожний його максимальний правий ідеал є двостороннім. У роботі [5] показано, що клас правих квазі-дуо-кілець є аксіоматизовним, а тому ультра-замкненим.

Під *атомом* кільця R розуміють регулярний елемент $p \in R$, для якого лівий і правий головні ідеали Rp і pR є максимальними (з відповідного боку). Кільце R назвемо *атомоподібним справа*, якщо кожний його необоротний регулярний елемент ділиться справа хоча би на один атом. Кільце R називається *правим кільцем Безу*, якщо сума та перетин будь-яких його двох правих головних ідеалів є знову правим головним ідеалом. Кільце називається *кільцем Безу*, якщо воно одночасно є лівим і правим кільцем Безу. Кільце називається *атомним*, якщо кожний його регулярний необоротний елемент є добутком скінченної кількості атомів.

Правий ідеал $P \neq R$ називається *первинним*, якщо для будь-яких r_1, $r_2 \in R$ з включення $r_1 R r_2 \subseteq P$ випливає, що $r_1 \in P$ або $r_2 \in P$. Якщо ж з умови $r_1 r_2 \in P$ випливає, що $r_1 \in P$ або $r_2 \in P$, то P називається *цілком первинним* правим ідеалом. Правий ідеал P називають *напівпервинним* (відповідно *цілком напівпервинним*) правим ідеалом, якщо з умови $rRr \subseteq P$ (відповідно $r^2 \in P$) випливає, що $r \in P$. Теорема Левицького – Нагати стверджує, що напівпервинні ідеали – це ті й тільки ті ідеали, які є перетинами первинних ідеалів. Відомо також, що кожний цілком напівпервинний ідеал є перетином цілком первинних ідеалів. Тому будь-який цілком напівпервинний ідеал P, який є первинним, обов'язково є цілком первинним.

Кільце R називається *дистрибутивним справа* або просто *правим* D*-кільцем*, якщо для будь-яких правих ідеалів $I_1, I_2, I_3 \subseteq R$ виконується рівність $I_1 \cap (I_2 + I_3) = (I_1 \cap I_2) + (I_1 \cap I_3)$. Кільце R називається *правим ланцюговим кільцем*, якщо його ґратка правих ідеалів є лінійно впорядкованою щодо включення. Ланцюгове зліва кільце визначається аналогічно. *Ланцюгові кільця* – це ті кільця, які є одночасно ланцюгові зліва та справа. Відомо, що у випадку правих ланцюгових кілець будь-який перетин первинних (цілком первинних) ідеалів знову є первинним (цілком первинним) ідеалом. У ланцюговому справа кільці будь-який напівпервинний (цілком напівпервинний) ідеал є первинним (цілком первинним).

Нехай P − цілком первинний ідеал, який міститься у деякому максимальному правому ідеалі M, де R − права D-область. Тоді локалізація R_P також існує і R_P є ланцюговим справа кільцем. Доповнення цілком первинного ідеалу P є правою множиною Оре.

Якщо R − права область Оре, яка міститься у правому тілі дробів K, то називатимемо R правим P-кільцем, коли для кожного максимального правого ідеалу S множина $A = R \setminus S$ є правою системою Оре і $S^{-1}R$ є кільцем нормування. Аналогічно формулюється означення лівого P-кільця. Будь-який правий R-модуль $A \subseteq K$ назвемо дробовим правим ідеалом кільця R.

Правий ідеал A називається оборотним справа, якщо $AA_r = R$, де $A_r = \{x : x \in K \ \ i \ Ax \subseteq R\}$. Аналогічно можна означити оборотний зліва ідеал, який позначається через A_ℓ. Легко бачити, що A_ℓ є дробовим лівим ідеалом і A_r − дробовим правим ідеалом в R.

Для правої множини Оре S і дробового правого ідеалу A кільця R введемо таке позначення: $AS^{-1} = \{x : x \in K, \ \ \exists s \in S, \ \ \exists a \in A : x = sa^{-1}\}$.

Характерною властивістю правого P-кільця є те, що його ґратка правих ідеалів є дистрибутивною і кожний ненульовий скінченно породжений дробовий правий ідеал є оборотним зліва. Кожне підкільце тіла K, яке містить R, є знову правим P-кільцем. При цьому легко переконатися, що AS^{-1} є дробовим лівим ідеалом кільця AS^{-1}. Для первинного ідеалу P кільця R замість $A(R \setminus P)^{-1}$ писатимемо A_P. Інші властивості цих конструкцій описуються у цитованій літературі.

Зазначимо ще, що кільце R є правим P-кільцем тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:

(***а***) ґратка правих ідеалів з R є дистрибутивною;

(***б***) кожний ненульовий скінченно породжений дробовий правий ідеал є оборотним зліва.

Тому в P-кільці R, як і в комутативному кільці Прюфера, множина G всіх ненульових скінченно породжених дробових ідеалів утворює мультиплікативну групу.

2. Внутрішні та зовнішні ультрадобутки кілець та ідеалів. У зв'язку з необхідністю використання критерію аксіоматизовності класу алгебраїчних структур, який формулюється за допомогою конструкції ультрадобутку, необхідно виявити, які з властивостей ідеалів зберігаються при переході до ультрадобутків. Перш за все, нагадаємо конструкцію ультрадобутку.

Нехай I − довільна нескінченна множина та 2^I − множина її підмножин. Нехай $\{R_i\}_{i\in I}$ − сім'я кілець, заіндексованих множиною I. Якщо U − ультрафільтр над I, тоді ультрадобуток кілець R_i стосовно ультрафільтра U позначимо через $R^* = \prod_U R_i$. Елементами з $\prod_U R_i$ є класи еквівалентності елементів добутку $\prod_{i\in I} R_i$, де $(a_i)_{i\in I} \sim (b_i)_{i\in I} \leftrightarrow \{i \in I : a_i = b_i\} \in U$. Припустимо, що A_i − правий ідеал у кільці R_i для кожного $i \in I$. Тоді можна побудувати правий ідеал $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)\Big/ \mathsf{F}$ фільтрованого добутку $\prod_{i\in I} R_i \Big/ \mathsf{F}$ сім'ї кілець $\{R_i\}_{i\in I}$ стосовно фільтра F. Цей ідеал також називається *фільтрованим добутком* лівих ідеалів A_i стосовно фільтра F. Фільтровані добутки

m-систем, груп дільників одиниці та деяких інших теоретико-кільцевих об'єктів визначаються так само. У випадку, коли F є ультрафільтром, відповідні фільтровані добутки називаються *ультрадобутками*. Припускатимемо, що розглядувані нами фільтри неголовні, а якщо такий фільтр є ультрафільтром, то, як правило, позначатимемо його через D і вважатимемо зліченно неповним. Якщо для кожного $i \in I$ ідеал A_i дорівнює ідеалові A, то їх ультрадобуток позначається $\prod_{\mathsf{D}} A$ і називається *ультрастепенем* ідеалу A стосовно ультрафільтра D. Нагадаємо ще означення внутрішнього фільтрованого добутку множин, введене в роботі [6]. Нехай I − множина індексів, D − ультрафільтр над I, а S_i − сім'я деяких підмножин множини S, заіндексована елементами $i \in I$. Тоді за означенням $\prod S_i/\mathsf{D} = \{a : \{i : a \in S_i\} \in \mathsf{D}\}$. Називатимемо цю множину внутрішнім фільтрованим добутком сім'ї множин $\{S_i\}_{i \in I}$. Коли F є ультрафільтром, то $\prod S_i/\mathsf{F}$ називається внутрішнім ультрадобутком множин S_i. Зазначимо ще, що $\prod S_i/\mathsf{F} = \bigcup_{X \in F} \left(\bigcap_{i \in X} S_i \right)$. Внутрішній ультрадобуток назвемо нетривіалізовним, якщо фільтр F є неголовним, а відображення $U \mapsto \bigcap_{i \in U} S_i$ є ін'єктивним.

Якщо A_i − лівий (правий) ідеал кільця R при будь-якому $i \in I$, а F − фільтр над I, то внутрішній фільтрований добуток $\prod A_i/\mathsf{F}$ є лівим (правим) ідеалом в R. Більше цього, якщо всі A_i є радикальними в комутативному кільці R, то $\prod A_i/\mathsf{F}$ також радикальний. Якщо ж всі P_i первинні (максимальні ліві, цілком первинні) і F є ультрафільтром, то $\prod P_i/\mathsf{F}$ також є первинним (максимальним лівим, цілком первинним) ідеалом кільця R.

Нехай R − кільце, а M − деякий лівий R-модуль. M є нетеровим зліва тоді й тільки тоді, коли для будь-якої множини індексів I всі M_i є лівими R-підмодулями в M і для будь-якого ультрафільтра D над I існує така множина $X \in \mathsf{D}$, що $\prod_{i \in I} M_i/\mathsf{D} = \bigcap_{i \in X} M_i$. Для кілець такий результат встановлено в [7].

У роботі [1] введено поняття визначальної множини первинних ідеалів. Нагадаємо, що множину первинних (максимальних лівих) ідеалів $\mathfrak{P}$ кільця R називають визначальною, якщо кожний первинний (максимальний лівий) ідеал кільця R міститься в об'єднанні ідеалів з множини $\mathfrak{P}$. Визначальна множина первинних (максимальних лівих) ідеалів кільця R називається мінімальною, якщо вона має найменшу потужність серед потужностей усіх визначальних множин первинних (максимальних лівих) ідеалів кільця R. Множина всіх первинних ідеалів довільного кільця є визначальною в цьому кільці, але необов'язково є мінімальною. Добре відомо, що в будь-якій комутативній області Безу, яка не є областю головних ідеалів, кожна підмножина множини всіх максимальних ідеалів з одноелементним неголовним доповненням, є визначальною.

Нагадаємо, що кільце називається нетерово подібним зліва, якщо кожний його скінченно породжений лівий ідеал міститься хоча би в одному скінченно породженому максимальному лівому ідеалі. Аналогічні означення є коректними також і для відповідних правих понять. Окрім звичайних факторіальних і нетерових кілець, прикладами нетерово подібних кілець є ультрадобутки та ультрастепені сімей таких кілець.

Наведемо деякі результати роботи [1].

Теорема. *Для довільного кільця R еквівалентні такі твердження:*

1) *R є атомно (нетерово) подібним зліва*;

2) *R має визначальну множину головних (скінченно породжених) лівих максимальних ідеалів*;

3) *R має мінімальну визначальну множину головних (скінченно породжених) лівих максимальних ідеалів*;

4) *кожний максимальний лівий ідеал кільця R зображається у вигляді внутрішнього ультрадобутку деякої підмножини заданої визначальної множини головних лівих (скінченно породжених) максимальних ідеалів стосовно деякого ультрафільтра над нею.*

Твердження. *Нехай $\{R_i\}_{i\in I}$ – довільна нескінченна сім'я кілець. Припустимо, що для кожного $i \in I$ задано визначальну множину $\mathfrak{P}_i$ первинних (максимальних лівих) ідеалів кільця R_i. Якщо F – неголовний ультрафільтр над множиною I, то зовнішній ультрадобуток $\mathfrak{P} = \prod\limits_{i\in I} \mathfrak{P}_i/\mathsf{F}$ множин $\mathfrak{P}_i$ стосовно ультрафільтра F буде визначальною множиною первинних (максимальних лівих) ідеалів кільця $\prod R_i/\mathsf{F}$.*

Встановимо допоміжний факт, який має самостійне значення.

Твердження. *Нехай $\mathcal{P}$ – одна з перелічених властивостей правих (двосторонніх) ідеалів кільця R: **а**) бути цілком первинним ідеалом; **б**) бути примарним ідеалом; **в**) бути примальним ідеалом; **г**) бути напівпервинним ідеалом; **д**) бути власним ідеалом.*

Тоді нетривіалізовний внутрішній ультрадобуток будь-якої сім'ї ідеалів з властивістю $\mathcal{P}$ також має властивість $\mathcal{P}$.

Д о в е д е н н я проводиться безпосередньою перевіркою. ◊

3. Аксіоматизовність класу некомутативних кілець Прюфера. Клас $\mathbf{K}$ називається *аксіоматизовним*, якщо він є класом моделей деякої множини речень першого порядку.

Моделі $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ мови $\mathcal{L}$ називаються *елементарно еквівалентними*, якщо будь-яке речення, істинне в моделі $\mathfrak{A}$, є істинним і в моделі $\mathfrak{B}$ і, навпаки. Це відношення між моделями позначатимемо символом «$\equiv$». Добре відомо, що відношення $\equiv$ справді є відношенням еквівалентності.

Клас моделей $\mathbf{K}$ мови $\mathcal{L}$ називається *замкненим стосовно елементарної еквівалентності*, якщо $\mathfrak{A} \in \mathbf{K} \wedge \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{B} \in \mathbf{K}$. Добре відомий критерій аксіоматизовності довільного класу алгебраїчних систем стверджує, що клас алгебраїчних систем $\mathbf{K}$ сигнатури Σ аксіоматизовний тоді й тільки тоді, коли він: ***1***) ультразамкнений; ***2***) замкнений щодо переходу до елементарно еквівалентних систем.

Відомий критерій елементарної еквівалентності можна сформулювати у вигляді такого твердження.

Теорема. *Нехай $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ – моделі мови $\mathcal{L}$. Тоді $\mathfrak{A}$ і $\mathfrak{B}$ елементарно еквівалентні тоді й тільки тоді, коли деякі їх ультрастепені ізоморфні.*

Як наслідок маємо критерій аксіоматизовності класів.

Наслідок. *Нехай $\mathbf{K}$ – довільний клас моделей мови $\mathcal{L}$.*

(***i***) *$\mathbf{K}$ є аксіоматизовним класом тоді й тільки тоді, коли він замкнений стосовно ультрадобутків та ізоморфізмів, а його доповнення є замкненим стосовно ультрастепенів*;

(***ii***) *$\mathbf{K}$ є базисним елементарним класом тоді й тільки тоді, коли і він, і його доповнення замкнені стосовно ультрадобутків та ізоморфізмів.*

Щоб переконатися, що ультрадобуток комутативних кілець Прюфера є кільцем Прюфера, використаємо допоміжні твердження із статті [8].

Наслідок. *Нехай* R *– область, що містить незліченне поле, і нехай* V *– злічення сім'я максимальних ідеалів кільця* R *таких, що* R_M *є областю нормування для всіх* $M \in V$. *Тоді кільце* $R_{S(V)}$ *є областю Прюфера, де* $S(V) = \bigcup_{P \in V} P$, *причому* P *– первинний ідеал кільця* R, *а* V *– непорожня підмножина множини первинних ідеалів кільця* R.

Отже, можна сказати, що ультрадобуток комутативних кілець Прюфера є кільцем Прюфера. Звідси випливає, що клас комутативних кілець Прюфера є ультразамкненим. Для некомутативних кілець Прюфера вже не можемо скористатись вказаними результатами Ольбердінга та Шапіро. Тут потрібно було би дослідити, чи можна якось пристосувати доведення цих авторів до некомутативних кілець Прюфера. Обійдемо цю перешкоду, використавши описання максимальних ідеалів в ультрадобутку некомутативних кілець з роботи [1].

Дослідимо другий пункт критерію, що стосується замкненості щодо переходу до елементарно еквівалентних систем.

Нехай A – кільце Прюфера, а друге кільце B – йому ізоморфне. Зрозуміло, що воно є теж кільцем Прюфера. Доповнення до класу правих кілець Прюфера складають праві непрюферові кільця.

Лема. *Ультрастепінь будь-якого правого непрюферового кільця є правим непрюферовим кільцем* (*або по-іншому*: *якщо кільце* R *не є прюферовим, то й будь-який його ультрастепінь не може бути прюферовим кільцем*).

Д о в е д е н н я. Нехай R – праве непрюферове кільце. Тоді існує максимальний ідеал M кільця R, такий що локалізація кільця R щодо ідеалу M не є кільцем нормування. Це означає, що в кільці R_M існують принаймні два такі праві ідеали A і B, що ні A не міститься в B, ні B не міститься в A.

Розглянемо ультрастепінь кільця R_M стосовно того самого ультрафільтра. У ньому міститься кільце ${}^*R$ (ультрастепінь кільця R). Тоді існує максимальний ідеал ${}^*M$ кільця ${}^*R$, такий, що локалізація кільця ${}^*R$ щодо ${}^*M$ не буде кільцем нормування. Отже, ${}^*R_M$ буде локалізацією кільця ${}^*R$ щодо максимального ідеалу ${}^*M$. Аналогічно можемо розглянути ідеали ${}^*A$ і ${}^*B$ в кільці ${}^*R_M$. Зрозуміло, що ${}^*A$ не міститься в ${}^*B$ і ${}^*B$ не міститься в ${}^*A$, тому ${}^*R_M$ не є кільцем нормування. Отже, кільце ${}^*R$ не є прюферовим, що й потрібно було довести. ◊

Тепер сформулюємо основний результат.

Теорема. *Клас правих кілець Прюфера аксіоматизовний.*

Д о в е д е н н я. Враховуючи лему досить показати ультразамкненість класу правих прюферових кілець. Згідно з результатами роботи [1] кожний максимальний правий ідеал в ультрадобутку сім'ї правих прюферових областей є внутрішнім ультрадобутком деякої сім'ї правих базових максимальних ідеалів, які є зовнішніми ультрадобутками правих максимальних ідеалів з компонент. Оскільки кожний з останніх є двостороннім ідеалом, то й весь їх ультрадобуток є двостороннім ідеалом. Ці самі міркування показують, що доповнення до цього ідеалу є правою множиною Оре й локалізація стосовно отриманої m-системи існує. Нескладними обчисленнями отримуємо, що локалізація ультрадобутку правих кілець Прюфера стосовно вказаної m-системи буде кільцем нормування, як ультрадобуток відповідних локалізацій у компонентах. Тому отримане кільце є правим прюферовим.

Таким чином, з використанням необхідних теоретичних методів вдалося показати, що клас некомутативних прюферових кілець є ультразамкненим, крім цього, він є замкненим щодо переходу до елементарно еквівалентних систем, а, отже, й аксіоматизовний. (На жаль, саму систему аксіом у явному вигляді знайти не вдається.) Теорему доведено. ◊

4. Про неаксіоматизовність кілець нормування Дубровіна. Якщо в кільці R для кожної пари необоротних елементів $x, y \in R$ маємо $RxR \subset \subset yR \cap Ry$ або $RyR \subset Rx \cap xR$, то І. Капланський таке кільце R називає *кільцем нормування.*

Наведемо означення некомутативного кільця нормування Дубровіна. Підкільце R у простій артіновій алгебрі Q називається *кільцем нормування Дубровіна*, якщо R має такий максимальний ідеал $\mathfrak{M}$, що:

1) $R / \mathfrak{M}$ є простим артіновим кільцем;

2) для кожного елемента $q \in Q \setminus R$ існують такі елементи $r_1, r_2 \in R$, що $r_1 q$ і $q r_2$ належать до $R / \mathfrak{M}$.

Нас цікавить поведінка ланцюгових кілець при переході до ультрадобутків і, зокрема, до ультрастепенів. Зауважимо, що означення ланцюгового кільця можна виразити у вигляді речення мови першого порядку теорії кілець. Відповідна формула має вигляд

$$\forall x, y \quad \exists u, v, w, \rho \qquad ((x = uy \vee y = vx) \wedge (x = yw) \vee y = x\rho \vee x \in$$

$$\in u(R) \vee y \in u(R)).$$

Тому на підставі теореми Лося ультрадобуток будь-якої сім'ї ланцюгових кілець є ланцюговим кільцем. Якщо $\forall i \in I$ кільце R_i є повним підкільцем у тілі D_i, то ультрадобуток $\prod_{i \in I} R_i \big/ \mathsf{F}$ є повним підкільцем в $\prod_{i \in I} D_i \big/ \mathsf{F}$, що є очевидним. Крім цього, якщо всі кільця R_i є інваріантними, то й кільце $\prod_{i \in I} R_i \big/ \mathsf{F}$ є інваріантним. Тому маємо таке

Твердження. *Ультрадобуток будь-якої сім'ї кілець нормування Шілінга є кільцем нормування Шілінга.*

У зв'язку з викладеним раніше природно виникає питання: які умови на кільця R_i є необхідними та достатніми для того, щоб ультрадобуток мав єдиний первинний ідеал? Іншими словами − коли ультрадобуток H-кілець є H-кільцем?

Відповідь на це запитання дає така

Теорема. *Нехай* $\{R_i\}_{i \in I}$ − *сім'я* H*-кілець нормування. Тоді для будь-якого неголовного ультрафільтра* F *над* I *ультрадобуток* $R = \prod_{\mathsf{F}} R_i$ *є* H*-кільцем тоді й тільки тоді, коли існує множина* $U \subset \mathsf{F}$ *така, що для кожного* $i \in U$ *ідеал* $J(R_i)$ *є нільпотентним фіксованого індексу нільпотентності* $n_0 \in \mathbb{N}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $J(R_i)^{n_0} = 0$ для кожного $J^{n-1}(R) \subseteq P$. Тоді ідеал $P = J(R)$ є максимальним у $\prod_{\mathsf{F}} R_i$ і $J^n = 0$. Покажемо, що J єдиний первинний ідеал в R. Справді, в супротивному випадку існує первинний ідеал P кільця R, $P \subseteq J(R)$. Але тоді $P^n \subseteq J(R)^n = 0$ і тому P − нільпотентний.

Отже, $P^n = 0$, крім того, $J^n(R) \subseteq P$ і, з огляду на первинність P, або $J(R) \subseteq P$, або $J^{n-1}(R) \subseteq P$. Продовжуючи цей процес, прийдемо до висновку, що $J(R) \subseteq P$, і тому $P = J(R)$.

Нехай тепер для кожного n існує таке $k_n \geq n$, що $U_n = \{i \in I \mid J(R_i)^k \neq \neq 0\} \in \mathsf{F}$. Тоді виберемо елемент $a_i \in J(R_i)$ такий, що $a_i^{k_n} \neq 0$ для кожного $i \in U_n$.

Розглянемо елемент $a = \overline{(a_i)}_{i\in I}$ в R, у якого на місцях $i \in U_n$ стоять вибрані елементи та нуль − на всіх інших місцях. Тоді елемент $J(R)$ не є нільпотентним. Отже, первинний ідеал J кільця R не є ніль-ідеалом. Тому що кільце R є інваріантним, оскільки всі кільця R_i є H-кільцями, то нільпотентні елементи в R утворюють двосторонній ідеал. Він є первинним радикалом, і тому в кільці R повинен існувати принаймні один первинний ідеал, відмінний від $J(R)$, бо в супротивному випадку він повинен бути ніль-ідеалом. Але за припущенням кільце R є H-кільцем. Таким чином, всі ідеали $J(R)$ є нільпотентними, а всі їх індекси нільпотентності обмежені на деякій підмножині з ультрафільтра F. Теорему доведено. ◊

Як наслідок отримуємо, що в ультрадобутку кілець нормування Шілінга можуть існувати первинні ідеали, які не є ультрадобутками первинних ідеалів кілець співмножників. Доцільно було би знайти методику їх утворення.

5. Ультрадобутки кілець нормування Дубровіна. Розглянемо умови, за яких сім'я кілець нормування Дубровіна матиме ультрадобуток відносно будь-якого неголовного ультрафільтра над множиною індексів, що буде кільцем нормування Дубровіна. Відповідь на це запитання дає така

Теорема. *Нехай $\{R_i\}_{i\in I}$ − сім'я кілець нормування в сенсі Дубровіна. Припустимо, що $R_i \subseteq Q_i$, де Q_i для кожного $i \in I$ є центральною простою артіновою алгеброю над полем K_i, причому $\dim_{K_i} Q_i = n_0^2$ для кожного $i \in I$. Крім того, нехай $\mathfrak{M}_i$ − максимальний ідеал в R_i такий, що $R/\mathfrak{M}_i = D_{n_i}$ для кожного $i \in I$. Якщо F − довільний неголовний ультрафільтр над I, то кільце $\prod_{\mathsf{F}} R_i$ є кільцем нормування Дубровіна в центральній простій алгебрі $Q = \prod_{\mathsf{F}} Q_i$ тоді й тільки тоді, коли існує множина $U \subset \mathsf{F}$ така, що для кожного $i \in I$ маємо $n_i = k$ для деякого $k \in \mathbb{N}$.*

Д о в е д е н н я. *Достатність*. Оскільки всі алгебри Q_i, $i \in I$, є кільцями матриць над полями K_i одного й того ж розміру $n_0 \times n_0$, то за наслідком 2 із твердження 29 [10] алгебра $Q = \prod_{\mathsf{F}} Q_i$ є алгеброю матриць над полем $K = \prod_{\mathsf{F}} K_i$ розміру $n_0 \times n_0$.

Крім цього, $R = \prod_{\mathsf{F}} R_i$ є підкільцем в $Q = \prod_{\mathsf{F}} Q_i$ і $\prod_{\mathsf{F}} \mathfrak{M}_i$ − максимальний ідеал в R. Перевіримо, що R задовольняє всі вимоги з означення кільця нормування Дубровіна. Маємо $R/\mathfrak{M} \cong \prod_{\mathsf{F}} R_i / \prod_{\mathsf{F}} \mathfrak{M}_i \cong \prod_{\mathsf{F}} R/\mathfrak{M}_i \cong \prod_{\mathsf{F}} D_{n_i}$. Оскільки на множині індексів U з фільтра F розміри матриці однакові, то $\prod_{\mathsf{F}} D_{n_i}$ є матричним кільцем (розміру $k \times k$ над тілом $D = \prod_{\mathsf{F}} D_i$), тобто $\prod_{\mathsf{F}} D_{n_i} = D_k$. Отже, $R / \mathfrak{M} \cong D_k$, що означає, що перша умова виконується. Далі розглянемо довільний елемент $a = \widetilde{(a_i)}_{i\in I} \in Q \backslash R$, $a_i \in Q_i, i \in I$. Оскільки R_i є кільцем нормування Дубровіна в Q_i, то існують елементи $b_i \in R_i$

такі, що $a_i b_i \in R_i \setminus \mathfrak{M}_i$ і $b_i' a_i \in R_i \setminus \mathfrak{M}_i$. Тоді розглянемо елементи $b = (\widetilde{b_i})$, $b' = (\widetilde{b_i'})$ з Q і перевіримо, що $b'a = (\widetilde{b_i'})(\tilde{a}_i) = (\widetilde{b_i' a_i}) \in R \setminus \mathfrak{M}$ і $ab = (\tilde{a}_i)(\tilde{b}_i) = (\widetilde{a_i b_i}) \in R \setminus \mathfrak{M}$. Достатність доведено.

Необхідність. Нехай $R = \prod_{\mathsf{F}} R_i$ є кільцем нормування Дубровіна в центральній простій алгебрі $Q = \prod_{\mathsf{F}} Q_i$. Тоді $R / \mathfrak{M} \cong D_k$ для деякого натурального $k \in \mathbb{N}$, а тому за наслідком 3 з твердження 16 [10] маємо, що існує таке натуральне $k_0 \le k$, що $\dim_{K_i} Q_{n_i} = k_0$ для кожного i з деякої множини $U \subset \mathsf{F}$. Тому $k_0 = n_i^2$ для кожного $i \in U$, що треба було довести. ◊

1. *Комарницький М. Я., Стефаняк В. І.* Про ідеали та фільтри Ґабрієля редукованого добутку кілець // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2004. – Вип. 2. – С. 40–45.
2. *Eklof P.* Ultraproducts for algebraists: Handbook of Mathematical Logic / Ed. J. Barwise. – North-Holland, 1977. – P. 109–140.
3. *Fuchs L., Salce L.* Modules over non-Noetherian domains. – Amer. Math. Soc., 2001. – (Ser.: Math. Surveys and Monographs. – Vol. **84**.) – 614 p.
4. *Gräter J.* Zur theorie nicht commutativer Prüferringe // Arch. Math. – 1983. – **41.** – P. 30–36.
5. *Lam T. Y., Dugas A. S.* Quasi-Duo rings and stable range descent. – Preprint, 2005. – P. 1–18. (http: www.emis.de/cgi-bin/zmen/Zmath/).
6. *Nelson G. C., Caceres-Duque L.* A description of ideals in Noetherian rings // Commun. Algebra. – 2003. – **31**, No. 7. – P. 3039–3060.
7. *Nelson G. C.* Compactness, ultralimits, ultraproducts, and maximal ideals. – Preprint / Univ. of Iowa, 1996. – P. 1–38. (http: www.emis.de/cgi-bin/zmen/Zmath/).
8. *Olberding B., Shapiro J.* Prime ideals in ultraproducts of commutative rings // J. Algebra. – 2005. – **285**. – P. 768–794.

ОБ АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТИ КЛАССА НЕКОММУТАТИВНЫХ ПРЮФЕРОВЫХ КОЛЕЦ

Исследуется вопрос о сохранении некоторых свойств идеалов колец при переходе к (внутренним) ультрапроизведениям. Установлена аксиоматизируемость класса некоммутативных прюферовых (в смысле Гретера) колец. Доказана неаксиоматизируемость класса некоммутативных колец нормирования Дубровина .

ON AXIOMATIZABILITY OF A CLASS OF NONCOMMUTATIVE PRUFER RINGS

A question on preserving the properties of one-sided ideals of rings with respect to ultraproducts is studied. Axiomatizability of a class of noncommutative Prufer (in the sence of Grater) rings is established. It is found that a class of noncommutative Dubrovin valuation rings is non-axiomatizable in contrast to axiomatizability of a class of usual ordinary valuation rings (in the sence of Kaplansky).

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
01.09.05