

КОМБІНОВАНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ ДВОВИМІРНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Для розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі запропоновано комбінований алгоритм. Він ґрунтується на редукції лінійної двовимірної крайової задачі до одновимірної з використанням методу Канторовича та знаходженні розв'язку останньої розробленим числово-аналітичним методом. Наведено теоретичне обґрунтування комбінованого алгоритму та числові результати для задачі згину ортотропної пластини.

Розв'язування двовимірних крайових задач, до яких зводиться, наприклад, розрахунок оболонкових і пластинчастих конструкцій із залученням різного рівня теоретичних моделей, часто пов'язане зі значними обчислювальними труднощами. Не всі відомі наближені та числові методи розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними вдається легко реалізувати на практиці [2, 5]. Останнім часом розвиваються підходи, які ґрунтуються на редукції двовимірних крайових задач до одновимірних, оскільки методи розв'язування їх є більш розвинуті й досліджені [4]. Вибір методу розв'язування будь-якої задачі пов'язаний з пошуком певного компромісу між потрібною точністю і простотою реалізації обчислювальної схеми, урахуванням обмежень щодо його застосування.

У цій роботі використовуємо підхід, який поєднує позитивні властивості методу Канторовича [6, 7] та числово-аналітичного методу [10–12]. За допомогою методу Канторовича здійснюємо зниження вимірності крайової задачі, тобто розв'язування вихідного диференціального рівняння (або системи рівнянь) із частинними похідними наближено зводимо до розв'язування відповідної цьому рівнянню системи звичайних диференціальних рівнянь. Розв'язок одержаної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з відповідними крайовими умовами будемо за допомогою апробованого на багатьох одновимірних задачах числово-аналітичного методу. Цей метод ґрунтується на редукції лінійної двоточкової крайової задачі до задач Коші та матрицантному поданні їх розв'язків. Характерним для числово-аналітичного методу є те, що немає потреби безпосередньо чисельно розв'язувати задачі Коші. Основна проблема у разі його застосування пов'язана з раціональним обчисленням матрицанту [11]. Ідея об'єднання методу Канторовича з числово-аналітичним методом реалізована у розробленому алгоритмі, якому властива простота програмної реалізації. Техніку застосування і результативність цього алгоритму проілюструємо на задачі згину ортотропної пластини під дією нерівномірного навантаження.

1. Формулювання задачі та алгоритм пошуку розв'язку. Розглядаємо пружну пластину довжини a , ширини b і сталої товщини h під дією поперечного навантаження $q(x, y)$. Контур пластини жорстко закріплений. Зазначимо, що за інших крайових умов схема пошуку розв'язку задачі не змінюється. За вихідні приймаємо рівняння згину тонких анізотропних пластин [1].

Отже, математичну модель задачі про згин ортотропної пластини складає диференціальне рівняння четвертого порядку з частинними похідними

$$Lw \equiv D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (1)$$

і крайові умови

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \quad (2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b. \quad (3)$$

Тут w – прогин; $D_x = A_{11}h^3/12$; $D_y = A_{22}h^3/12$; $D_H = (A_{12} + 2A_{66})h^3/12$.

Сталі A_{ij} , які характеризують пружні властивості у випадку плоского напруженого стану, визначаємо за відомими формулами [1].

Зазначимо, що для ізотропної пластини сформульована задача зводиться до розв'язання рівняння вигляду

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{1}{D} q(x, y),$$

де $D = \frac{1}{12(1-\nu^2)} Eh^3$; Δ – оператор Лапласа; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона.

Пояснимо окремі етапи комбінованого алгоритму розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі, у якому використовується ідея апроксимації, та обґрунтуємо його. Спочатку до задачі (1)–(3) застосовуємо метод Канторовича для редукції вихідної двовимірної задачі до одновимірної. Суть методу полягає у тому, що при координатних функціях у наближеному розв'язку беруться не сталі параметри, а невизначені функції від однієї з незалежних змінних, тобто наближений розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді

$$w_n(x, y) = \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \varphi_k(y). \quad (4)$$

Функція $w_n(x, y)$ повинна задовольняти крайові умови (2), (3) для будь-яких $\varphi_k(y)$. У формулі (4) функції $\psi_k(x)$ підлягають визначенню, а $\varphi_k(y)$ – попередньо вибрані координатні функції, які задовольняють умови (3). Для розглядуваної задачі координатну систему функцій вибираємо такою:

$$\varphi_k(y) = y^{k+1}(y-b)^2. \quad (5)$$

Система функцій $\varphi_k(y)$, $k = 1, 2, \dots, n$, задовольняє вимоги, сформульовані у процедурі Канторовича [7]. Невідомі коефіцієнти $\psi_k(x)$ в (4) визначаємо з системи рівнянь методу Канторовича, яку одержуємо з умови ортогональності нев'язки $R \equiv Lw_n - q$, де L – диференціальний оператор рівняння (1), до функцій $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_n(y)$. Внаслідок виконання цієї умови у конкретному випадку одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку.

Зазначимо, що точність апроксимації розв'язку (4) передусім залежить від вибору координатних функцій і від кількості цих функцій. Перевагою методу Канторовича є те, що вдалий вибір координатних функцій може забезпечити відносно високу точність розв'язку навіть для малих значень n у поданні (4).

Для спрощення викладу алгоритму в апроксимації шуканого розв'язку (4) візьмемо $n = 2$. Відповідна для задачі (1)–(3) система звичайних диференціальних рівнянь, отримана після застосування методу Канторовича, набуває тоді вигляду

$$\begin{aligned} D_x \left(\psi_1^{IV}(x) \int_0^b \varphi_1(y) \varphi_k(y) dy + \psi_2^{IV}(x) \int_0^b \varphi_2(y) \varphi_k(y) dy \right) + \\ + 2D_H \left(\psi_1''(x) \int_0^b \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \varphi_k(y) dy + \psi_2''(x) \int_0^b \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \varphi_k(y) dy \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_y \left(\psi_1(x) \int_0^b \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} \varphi_k(y) dy + \psi_2(x) \int_0^b \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^4} \varphi_k(y) dy \right) = \\
& = \int_0^b q(x, y) \varphi_k(y) dy, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Вимагаючи виконання граничних умов (2) з урахуванням (4) при $n = 2$, одержуємо такі умови на функції $\psi_k(x)$:

$$\psi_k(x) = 0, \quad \psi'_k(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a, \quad k = 1, 2. \tag{7}$$

Далі для знаходження розв'язку одновимірної крайової задачі (6), (7) використовуємо числово-аналітичний метод [12]. За його схемою попередню систему рівнянь (7) записуємо у нормальній формі Коші. Застосовуючи процедуру зведення неоднорідної системи диференціальних рівнянь до однорідної [11], одержуємо такий аналог задачі (6), (7) у безрозмірних величинах:

$$\frac{dz}{dx} = A(x)z, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0, \quad z_9 = 1 & \quad \text{при} \quad x = 0, \\
z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0 & \quad \text{при} \quad x = 1,
\end{aligned} \tag{9}$$

де $z = (z_1, \dots, z_9)^\top = (\psi_1, \psi_2, \psi'_1, \psi'_2, \psi''_1, \psi''_2, \psi'''_1, \psi'''_2, z_9)^\top$; z_9 – допоміжна змінна (у разі зведення неоднорідної системи до однорідної); $A(y) = [a_{ij}(y)]_{i,j=1}^9$.

Наприклад, для $n = 1$ в (4) отримуємо рівняння (8), де матриця $A(y) = [a_{ij}(y)]_{i,j=1}^5$ має такі ненульові елементи:

$$\begin{aligned}
a_{12} = 1, \quad a_{23} = 1, \quad a_{34} = 1, \\
a_{41} = -\frac{1}{d_1} d_3 \bar{D}_y, \quad a_{43} = -\frac{1}{d_1} 2d_2 \bar{D}_H, \quad a_{45} = \frac{1}{d_1} K d_4 f(x).
\end{aligned}$$

Інші елементи, крім наведених, дорівнюють нулеві, а функція навантаження $q(x, y) = q_0 f(x)$. Тут використано такі позначення:

$$\begin{aligned}
\bar{D}_H = \frac{D_H}{D_x} = v_2 + 2(1 - v_{12}v_{21}) \frac{G}{E_1}, \quad \bar{D}_y = \frac{D_y}{D_x} = \frac{E_2}{E_1}, \quad K = 12(1 - v_{12}v_{21}) \bar{D}_y, \\
d_1 = \int_0^{\bar{b}} (\varphi_1 \cdot \varphi_1) dy, \quad d_2 = \int_0^{\bar{b}} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} \cdot \varphi_1 \right) dy, \\
d_3 = \int_0^{\bar{b}} \left(\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} \cdot \varphi_1 \right) dy, \quad d_4 = \int_0^{\bar{b}} \varphi_1(y) dy, \quad \bar{b} = \frac{b}{a},
\end{aligned}$$

де змінні x, y віднесені до величини a .

За числово-аналітичним методом розв'язок задачі (8), (9) подаємо у вигляді

$$z_i(x) = \sum_{j=1}^9 C_j g_{ij}(x), \quad i = 1, 2, \dots, 9, \tag{10}$$

де $g_{ij}(x)$ – елементи матрицанту, обчислення якого виконуємо з потрібною точністю за спеціальною процедурою [11]. У випадку сталої матриці розв'язувальної системи звичайних диференціальних рівнянь можна скориста-

тись апроксимацією матрицанту матричним рядом [10] (у цьому разі матрицантом є матрична експонента [3]).

З умов (9) при $x = 0$ з урахуванням властивостей матрицанту [3] випливає, що

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_9 = 1. \quad (11)$$

Інші невідомі сталі в (10) визначаємо з системи лінійних алгебричних рівнянь, яку одержуємо з умов (9) при $x = 1$. На підставі (10) з урахуванням (11) маємо

$$\begin{aligned} \psi_i(x) = z_i(x) = & C_5 g_{i3}(x) + C_6 g_{i4}(x) + C_7 g_{i7}(x) + \\ & + C_8 g_{i8}(x) + g_{i9}(x), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Остаточного наближення значення прогину пластини обчислюємо за формулою

$$w_n(x, y) = z_1(x) \varphi_1(y) + z_2(x) \varphi_2(y). \quad (12)$$

Отже, з використанням описаного алгоритму на точність розв'язку (12) впливає як вибір координатних функцій у методі Канторовича, так і похибка розв'язку (10), визначеного числово-аналітичним методом.

2. Теоретичне обґрунтування алгоритму. За область визначення $\Omega(L)$ оператора L у диференціальному рівнянні (1) приймаємо множину чотири рази неперервно диференційовних функцій в області $S = \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, які задовольняють крайові умови (2), (3).

За умов задачі (1)–(3) оператор L є додатно визначеним в гільбертовому просторі $H = L_2(S)$, тобто для довільних $w, v \in \Omega(L)$ виконуються умови

$$\begin{aligned} (Lw, v) &= (w, Lv), \\ (Lw, w) &\geq \gamma^2 \|w\|^2, \end{aligned} \quad (13)$$

де $\gamma = \text{const} > 0$, $\|w\|^2 = \iint_S w^2(x, y) dx dy$.

Дійсно, оскільки

$$\iint_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = \iint_S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy,$$

то

$$\begin{aligned} (Lw, w) &= \iint_S \left\{ D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_H \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy \geq \\ &\geq \min \{D_x, D_H, D_y\} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy = \\ &= \mu \iint_S (\Delta w)^2 dx dy, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\mu = \min \{D_x, D_H, D_y\}$.

Далі, використовуючи нерівність Фрідрікса [9] до функції $w(x, y)$ і до перших її похідних, запишемо

$$\iint_S (\Delta w)^2 dx dy \geq \alpha \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy \geq \alpha^2 \|w\|^2, \quad (15)$$

де $\alpha = \max \left\{ \frac{2}{a^2}, \frac{2}{b^2} \right\}$.

Тоді з нерівностей (14) і (15) отримуємо, що (13) виконуються при $\gamma^2 = \mu\alpha^2$.

Для оператора L енергетичним простором $H_L = W_2^0(S)$, $H_L \subset H$, є простір функцій, які задовольняють крайові умови (2), (3) і другі узагальнені похідні яких є сумовними з квадратом в області S . Енергетичний добуток і енергетична норма визначаються співвідношеннями

$$[w, v]_L = \iint_S \left\{ D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2D_H \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right\} dx dy,$$

$$|w|_L^2 = [w, w]_L,$$

де $w, v \in W_2^0(S)$.

Граничним переходом із нерівності (13) отримуємо, що для довільного $w \in W_2^0(S)$ виконується

$$\|w\| \leq \frac{1}{\gamma} |w|_L. \quad (16)$$

Для довільного $w \in W_2^0(S)$ є очевидними нерівності

$$\mu |w|_0^2 \leq |w|_L^2 \leq \eta |w|_0^2, \quad (17)$$

де $\mu = \min\{D_x, D_H, D_y\}$, $\eta = \max\{D_x, D_H, D_y\}$, а норма $|w|_0$ визначається у такий спосіб:

$$|w|_0 = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy.$$

Беручи до уваги праву нерівність (17), із нерівності (16) маємо

$$\|w\| \leq \frac{\eta}{\gamma} |w|_0.$$

Нерівності (17) забезпечують існування та єдиність узагальненого розв'язку як задачі (1)–(3) $w(x, y) \in W_2^0(S)$ для довільної $q(x, y) \in H$, так і розв'язку $w_n(x, y) \in W_2^0(S)$ відповідної їй системи методу Канторовича:

$$\int_0^b (Lw_n - q) \varphi_k(y) dy = 0,$$

$$\psi_k(0) = 0, \quad \psi_k(a) = 0, \quad \psi'_k(0) = 0, \quad \psi'_k(a) = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

У цьому разі отримуємо таку оцінку швидкості збіжності наближеного розв'язку до точного:

$$\|w - w_n\| \leq |w - w_n|_0 \leq \frac{\eta}{\mu} |w - v_n|_0. \quad (18)$$

Елемент $v_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \varphi_k(y) \in W_2^0(S)$ в оцінці (18) вибираємо таким, що реалізує мінімум функціоналу $|w - v_n|_0$ [6].

3. Результати обчислень. Наведемо числові результати для задачі (1)–(3), які одержані за допомогою комбінованого алгоритму. На рис. 1 зображено поле розподілу зведеної величини прогину $W = \frac{E_2 \bar{h}^3}{q_0 a} w_n$ пластини ($\bar{a} = \bar{b} = 1$; $\bar{h} = \frac{h}{a} = 0.1$) під дією нерівномірного тиску $q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a}$ з такими характеристиками матеріалу: $E_1 = 1.37 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0.9 \cdot 10^4$ МПа, $G = 1.22 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.07$. Розподіл прогину пластини з ізотропного матеріалу отримуємо як частковий випадок загальної розрахункової схеми.

Досягнуто точність розв'язку, знайденого з використанням комбінованого алгоритму, порівнювали з деякими відомими результатами для двовимірної задачі згину ізотропної пластини, зокрема, коли краї $y = 0$, $y = b$ жорстко закріплені, а краї $x = 0$, $x = a$ – шарнірно оперті [4, 8]. Тоді розв'язок задачі, визначений з використанням описаного комбінованого алгоритму, має вигляд (4) для $n = 2$, де $\psi_j(x)$, знахо-

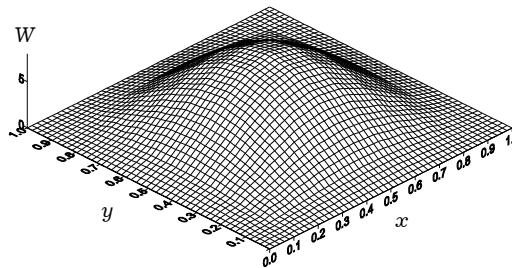


Рис. 1

димо за формулою (10). З крайових умов при $x = 0$ одержуємо, що $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_5 = 0$, $C_6 = 0$, $C_9 = 1$. Невідомі сталі C_3 , C_4 , C_7 , C_8 визначаємо з системи алгебричних рівнянь, яка випливає із заданих умов при $x = a$.

З метою порівняння результатів величину $W = \frac{w_n E}{q_0 a}$ обчислювали за таких значень параметрів: $\bar{a} = \bar{b} = 1$; $\nu = 0.3$; $\bar{h} = 0.1$.

Обчислювальний експеримент, виконаний для розглянутої задачі, показав, що в наближеному розв'язку (4) цілком достатньо взяти $n = 2$, відносна похибка при цьому становить 0.6%. Порівняльний аналіз результатів дає підстави зробити висновок про ефективність запропонованого підходу до розв'язування лінійної двовимірної крайової задачі.

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – Москва: Наука, 1967. – 266 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – Москва: Наука, 1987. – 600 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – Москва: Наука, 1998. – 552 с.
4. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (Обзор) // Прикл. механика. – 1995. – 31, № 6. – С. 3–27.
5. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики: Навч. посібник. – Київ: Либідь, 1995. – 280 с.
6. Жук М., Кіндибалюк А. Розв'язування диференціального рівняння в частинних похідних четвертого порядку методом Канторовича // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2003. – Вип. 6. – С. 36–45.
7. Канторович Л. В., Крельов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – Москва: Наука, 1952. – 696 с.
8. Максимук О. В., Щербина Н. М. Розв'язування задачі про згин прямокутної пластини змінної товщини на основі числово-аналітичного методу // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 73–77.
9. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – Москва: Наука, 1970. – 512 с.

10. Пелех Б. Л., Максимук А. В., Щербина Н. Н. Контактная жесткость слоистых цилиндрических оболочек. Матричный метод решения контактных задач для многослойных оболочек // Механика композитных материалов. – 1986. – № 2. – С. 276–280.
11. Щербина Н. М. Обчислювальні аспекти чисельно-аналітичного методу розв'язування лінійних крайових задач // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2000. – Вип. 2. – С. 169–180.
12. Щербина Н. М. Про один чисельно-аналітичний метод розв'язування крайових задач // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 52. – С. 121–127.

КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для решения линейной двухмерной краевой задачи предложен комбинированный алгоритм. С помощью метода Канторовича выполнена редукция исходной задачи к одномерной. Затем её решение определяется численно-аналитическим методом. Приведено теоретическое обоснование комбинированного алгоритма, а также анализ числовых результатов для задачи изгиба ортотропной пластины.

COMBINED ALGORITHM FOR SOLUTION OF LINEAR TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM

In this paper, an algorithm combining Kantorovich's method with numerical-analytical method for solution of the linear two-dimensional boundary-value problem is proposed. First, by applying Kantorovich's method the initial problem is reduced to solution of one-dimensional problem. Then, its solution is determined by use of the numerical-analytical method. The numerical aspects of this approach are considered. As an example, the problem about bending of orthotropic plates is solved. The calculation analysis is made.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
² Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
30.11.04