

ТЕПЛОВІ НАПРУЖЕННЯ У ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИНАХ

Розглядається класична двовимірна бігармонічна задача для прямокутної області. Відображено деякі аспекти історії проблеми. Метод суперпозиції виявляється ефективним при розв'язуванні задач про термопружну рівновагу прямокутника та термопружний згин жорстко зацемленої пластинки. Прослідковано взаємний зв'язок між математичним та інженерним підходами до цих задач. Наведено два типових приклади.

Усунути назавжди поділ наук на чисту і прикладну математику.

Г. Ляме [30, с. 437]

1. Вступ. У зв'язку з великими успіхами техніки значною мірою зростає інтерес до вивчення питань, пов'язаних з термонапруженим станом різних конструкцій і споруд. Проблема теплових напружень в елементах конструкцій і пов'язаний з нею науковий напрямок – термопружність отримали в середині ХХ століття істотний розвиток з огляду на важливі практичні задачі, які виникають при розробці нових конструкцій парових і газових турбін, реактивних і ракетних двигунів, атомних реакторів тощо. Елементи цих конструкцій працюють в умовах нерівномірного і найчастіше – нестаціонарного нагрівання, при якому виникають градієнти температури й неоднакове теплове розширення окремих частин. Таке нерівномірне теплове розширення не може проходити вільно в пружному тілі і викликає теплові (термічні, температурні) напруження. Знання величини й характеру дії теплових напружень є необхідним для всебічного аналізу міцності конструкцій.

Термопружність як самостійний розділ теорії пружності виникла досить давно – лінійні рівняння для врахування впливу нагріву були незалежно встановлені Ж. Дюамелем [76] і Ф. Нейманом [101]. Нерівномірність нагріву викликає появу додаткових членів, пропорційних до температури в законі Гука, і фіктивної сили, пропорційної до градієнта температури, в рівняннях для переміщень Ляме. Найпростіші одновимірні задачі про температурну напруженість були розв'язані як у цих роботах, так і у визначному мемуарі Дж. Максвелла [96]. З цього часу задачі термопружності постійно розглядалися як у фундаментальних підручниках з теорії пружності С. П. Тимошенка [53, § 66], [55, §§ 65, 113–115], [61, §§ 148–164], батька й сина Фепплів [64, §§ 97–101], П. Ф. Папковича [44, розд. IV, §§ 10, 11, розд. VI, § 3, розд. IX, §§ 11–13, розд. X, §§ 3, 15, 16 і численні вправи до цих розділів], так і (однак досить коротко) у капітальних трактатах А. Лява [35, § 74], М. І. Мусхелішвілі [42, § 62] і А. І. Лур'є [33, розд. 1, § 13, розд. 3, § 7, розд. 4, § 4]. Крім того, повністю цим задачам присвячено ряд вітчизняних [18, 19, 25, 31, 36, 37, 48, 49] і перекладних закордонних монографій [2, 8, 39, 43, 45], які містять докладну бібліографію. Серед цього різноманіття підручників і монографій особливе місце займають підручники А. Д. Коваленка [20, 21, 23] з огляду на компактність, чіткість викладу постановок задач і методів їхнього розв'язування і, разом з тим, широту охоплення матеріалу практично з усіх розділів статичної і динамічної термопружності, глибокий аналіз можливості практичного застосування результатів. Не випадково, що перший з підручників був перекладений на англійську мову [87].

У багатьох випадках можна розглядати термонапружений стан пружного тіла в умовах плоскої задачі: плоска деформація довгого тіла сталого поперечного перерізу, коли термічні процеси не залежать від поздовжньої координати та (узагальненого) плоского напруженого стану тонкої одно-

зв'язної ізотропної пластинки сталої товщини. Плоскі квазістатичні задачі термопружності в напруженнях за відомого температурного поля і за відсутності поверхневих силових навантажень на контурі тіла зводяться до неоднорідного бігармонічного рівняння стосовно однієї скалярної функції при нульових значеннях цієї функції і її нормальної похідної на всій границі. Особливий інтерес привертає двовимірною прямокутна область, оскільки такі пластинки або довгі бруси є широко розповсюдженими елементами багатьох конструкцій.

Задачі теплового згину тонкої ізотропної пружної пластини, защемленої по всьому контуру, також зводяться до розв'язування неоднорідного бігармонічного рівняння для нормального прогину при нульових значеннях прогину та кута повороту на контурі. І в цьому випадку прямокутна пластинка також становить особливий інтерес, хоча водночас зроблено порівняно мало, щоб мати чітке уявлення, що відбувається у випадках, відмінних від найпростішого випадку чисто циліндричного згину довгої панелі.

Класична бігармонічна гранична задача для прямокутника й досі становить чималий інтерес у механіці та прикладній математиці. Однак підхід до її дослідження найчастіше буває різним: математика цікавить лише постановка граничної задачі та строгість методів розв'язування, найчастіше – без усякого практичного застосування, у той час як інженер цікавиться, насамперед, практичною стороною конкретної задачі й використовує математику лише як знаряддя [86]. Співпраця між прикладними математиками, з однієї сторони, та механіками й інженерами – з іншої, є особливо важливою сьогодні, оскільки механіки й інженери-дослідники постійно зацікавлені в якомога точнішому розв'язанні широкого кола задач про напружено-деформований стан різних елементів конструкцій. У той час як механіки й інженери можуть внести багато істотного в математичне формулювання практичних задач при виборі моделі, вони, у свою чергу, одержують значну допомогу при розв'язуванні задач від прикладних математиків, які зацікавлені в застосуванні своїх методів, формул і теорем у теорії пружності. Можливості лінійних моделей при описі локальних особливостей полів напружень всебічно обговорювалися у [13].

Дещо з історії. На зорі розвитку теорії пружності на початку XIX століття не було необхідності в такому співробітництві. Творці теорії пружності К. Нав'є, О. Коші, С. Пуассон закінчили знамениту *École Polytechnique* й одержали глибоку математичну та інженерну освіту. Наступні дослідники (наприклад, Г. Ляме і Б. Сен-Венан) не тільки отримали таку ж освіту, але й були практичними інженерами протягом тривалого періоду. Г. Ляме, наприклад, у військовому званні полковника Корпусу інженерів шляхів сполучення брав активну участь у будівництві Ісаакіївського собору в Санкт-Петербурзі, а згодом також у проектуванні й будівництві залізничної лінії між Парижем і Сен-Жерменом. Пізніше, на початку XX століття, німецький математик Ф. Клейн говорив про необхідність більш тісних зв'язків між математиками й інженерами та активно сприяв утворенню при Геттінгенському університеті трьох дослідницьких інститутів, серед яких були інститути прикладної математики (директор К. Рунге) і прикладної механіки (директор Л. Прандтль). Для підтримання зв'язку між новими інститутами й кафедрами чистої математики був також організований науковий семінар і наукове товариство прикладної математики і механіки. С. П. Тимошенко в рецензії (*J. Appl. Mech.*, 1951, **18**, с. 233–234) на збірник праць симпозіуму з прикладної математики, проведеного Американським математичним товариством, відзначив прогрес в області інженерної механіки в Росії на початку XX століття завдяки роботам і впливові таких великих фігур, як М. С. Жуковський, О. М. Крилов, С. О. Чаплигін. Він писав, що «тепер Росія займає сильну позицію в таких областях, як теорія пружності, пластичності та нелінійна механіка». (Досить смілива заява, якщо врахувати час і місце написання цих рядків.)

Уже в першій третині XX століття типові приклади підходів до дослідження бігармонічної задачі в прямокутнику з позицій механіки і математики були наведені в пленарній доповіді голландського механіка К. Б. Бізено [70] на першому Міжнародному конгресі з прикладної механіки та у традиційних щорічних президентських зверненнях британських механіків і мате-

матиків А. Лява [91] і А. К. Діксона [75] до Лондонського математичного товариства. При цьому головні *математичні питання* в бігармонічній проблемі стосувалися можливості розв'язання спеціального функціонального рівняння в комплексній площині, збіжності комплексних рядів за неортогональними власними функціями та єдиності розв'язку при розривних значеннях заданої функції у кутових точках прямокутника. Головні *інженерні питання* стосувалися того, наскільки товстою повинна бути пружна пластинка, щоб витримати прикладене навантаження, і де знаходяться місця максимальних напружень і їхні значення. Ці питання є життєво важливими при проектуванні будь-якої інженерної споруди.

Видатний український вчений-механік академік АН УРСР Анатолій Дмитрович Коваленко (1905–1973) успішно поєднав обидва підходи до розв'язання численних бігармонічних проблем у галузі термопружності. У багатьох своїх працях [24] при розв'язуванні статичних граничних задач термопружності він віртуозно користувався теорією гіпергеометричних функцій. Характерний приклад: у 1972 р. з поїздки в Станфорд (США) на 12-й Міжнародний конгрес з теоретичної і прикладної механіки він привіз унікальний довідник [68] (тоді ще не було його російського перекладу), який надав неоціненну допомогу при розв'язанні багатьох практично важливих задач термопружності.

Зацікавленість видатних механіків до історії своєї науки (див., наприклад, книги О. М. Крилова [29], А. Лява [35], Е. Маха [38], С. П. Тимошенка [57], К. Труделла [62] – тут названо лише найбільш відомі книги, інакше список літератури може виявитися безмежним), є характерною. Анатолій Дмитрович не був у цьому відношенні винятком: він був науковим редактором праці з історії української механіки [51]; автором, будучи студентом Київського університету і відвідуючи його спеціальний курс з термопружності пластин і оболонок [22], неодноразово доводилося чути його натхненні відгуки про роботи геніального К. Гауса з теорії гіпергеометричних функцій, про професорів Київського університету М. Є. Ващенко-Захарченка (одного з творців операційного числення) і М. М. Шіллера (одного з засновників принципу адіабатичної недосяжності – нового формулювання другого закону термодинаміки, який використовується при вивченні деформування нерівномірно нагрітого ізотропного однорідного пружного тіла) й інших видатних математиків і фізиків настільки дорогого його науковому серцю ХІХ століття. У ті, так би мовити, «глибоко докомп'ютерні-доінтернетні часи» він цілком поділяв думку, висловлену академіком О. М. Криловим ще в 1913 р. [28, с. 3]: «Я дотримувався головним чином способів викладу “старих авторів” Фур'є, Пуассона, Коші, для яких основна мета полягала в побудові розв'язку, а не в бездоганно строгому його обґрунтуванні та не в доведенні його існування у загальному випадку або при встановлених необхідних обмеженнях».

Від А. Д. Коваленка автор уперше почув про труднощі точного розв'язання просторових задач термопружності для кругового циліндра скінченної довжини та задач про неосесиметричне деформування порожнистої сфери. В обох випадках було згадане ім'я видатного французького математика й інженера ХІХ століття Г. Ляме як віртуозного творця ефективних методів розв'язування таких задач [89, 90] з його натхненним закликом «*Наука на марші!*». (К. Гаусс, зокрема, називав Ляме найвидатнішим математиком Франції того часу, а Ж. Бертран відзначав його видатні інженерні здібності; сам же Ляме вважав, що його найбільший внесок у математичну фізику полягає у розробці теорії і введенні в користування криволінійних ортогональних координат [90].)

У цій статті з нагоди ювілейної дати – 100-річчя від дня народження А. Д. Коваленка, викладається в історичному контексті проблема співвідношення математичного й інженерного підходів до розв'язання типових двовимірних задач термопружності для прямокутника.

2. Постановка бігармонічних граничних задач термопружності в прямокутнику. У теорії пружності задача про визначення двовимірного напруженого стану в довгій прямокутній призмі при поверхневих навантаженнях, які залишаються незмінними вздовж осі призми (стан плоскої деформації), або в тонкій пластині під дією навантажень у її площині (плоский напружений стан) зводиться до бігармонічної задачі. За відсутності масових сил нормальні σ_x , σ_y і дотичні τ_{xy} напруження можуть бути виражені через одну скалярну функцію $F(x, y)$, названу Дж. Максвеллом [95] «функцією напружень $E\epsilon_i$ », за допомогою співвідношень

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (1)$$

Рівняння для функції F виражає умови сумісності деформацій у пружному тілі

$$\nabla^2 \nabla^2 F = 0, \quad (2)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двовимірний оператор Лапласа.

Граничні умови для рівняння (2) при статично зрівноважених нормальних і дотичних поверхневих навантаженнях, прикладених на торцях, мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p_+(y), & \tau_{xy} &= t_+(y), & x &= a, & |y| &\leq b, \\ \sigma_x &= p_-(y), & \tau_{xy} &= t_-(y), & x &= -a, & |y| &\leq b, \\ \sigma_y &= q_+(x), & \tau_{xy} &= s_+(x), & y &= b, & |x| &\leq a, \\ \sigma_y &= q_-(x), & \tau_{xy} &= s_-(x), & y &= -b, & |x| &\leq a. \end{aligned} \quad (3)$$

Для плоскої квазістатичної задачі термопружності для прямокутника, що знаходиться в неоднорідному квазістаціонарному температурному полі T , функція напружень F , за якою згідно з (1) визначаються теплові напруження, задовольняє рівняння [2, 20]

$$\nabla^2 \nabla^2 F + C \nabla^2 T = 0, \quad (4)$$

у якому $C = E\alpha_T$ для (узагальненого) плоского напруженого стану та

$C = \frac{E\alpha_T}{1-\nu}$ для плоскої деформації. Тут сталі E і ν – відповідно модуль

Юнга та коефіцієнт Пуассона пружного ізотропного матеріалу, α_T – коефіцієнт лінійного теплового розширення, які приймаються незалежними від температури. За відсутності поверхневих навантажень на сторонах прямокутника граничні умови (3) можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} F &= 0, & \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, & x &= \pm a, \\ F &= 0, & \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, & y &= \pm b. \end{aligned} \quad (5)$$

При стаціонарному температурному полі без джерел тепла,

$$\nabla^2 T = 0, \quad (6)$$

плоска задача термопружності (4), (5) стає цілком однорідною і має тільки нульовий розв'язок. Це є частковим випадком загального твердження, встановленого М. І. Мусхелішвілі [41], що в однозв'язному вільному пружному тілі, яке знаходиться в умовах плоскої деформації або (узагальненого) плоского напруженого стану, стаціонарне температурне поле не викликає напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Загальний розв'язок рівняння (4) можна подати у вигляді

$$F = F^* + F^{(T)}, \quad (7)$$

де функція F^* є загальним розв'язком однорідного бігармонічного рівняння (2), а функція $F^{(T)}$ є частковим розв'язком рівняння Пуассона

$$\nabla^2 F^{(T)} + CT = 0. \quad (8)$$

За частковим розв'язком $F^{(T)}$ плоску задачу термопружності для прямокутника можна звести до ізотермічної плоскої задачі (2), (3) для бігармонічної функції напружень F^* .

У теорії згину тонких пружних пластин рівняння, що описує нормальний прогин $w(x, y)$ серединної поверхні ізотропної пластини сталої товщини h , має вигляд

$$D\nabla^2\nabla^2 w = p, \quad (9)$$

де стала $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластинки, а $p(x, y)$ –

інтенсивність навантаження, нормального до серединної поверхні $z = 0$.

У різних інженерних конструкціях краї пластини можуть бути цілком закріплені шляхом їхнього приєднання до жорстких рам, що не дозволяють жодних зсувів і кутів повороту:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad x = \pm a, \quad |y| \leq b, \\ w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad y = \pm b, \quad |x| \leq a. \end{aligned} \quad (10)$$

Для випадку чисто теплового згину пластини, яка знаходиться в заданому квазістаціонарному температурному полі $T(x, y, z, t)$, рівняння для прогину $w^{(T)}(x, y)$ має вигляд [2, 20]

$$D\nabla^2\nabla^2 w^{(T)} = -\frac{1}{1-\nu}\nabla^2 M_T, \quad M_T = E\alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} Tz dz \quad (11)$$

з граничними умовами (10).

З порівняння граничних задач (9), (10) і (11), (10) випливає, що розв'язування задачі про чисто тепловий згин жорстко защемленої прямокутної пластинки через прогин еквівалентне до розв'язання ізотермічної задачі для тієї ж защемленої пластини під дією фіктивного поперечного навантаження інтенсивністю $p^{(T)} = -\frac{1}{1-\nu}\nabla^2 M_T$. Таким чином, методи й розв'язки, розвинуті та отримані для ізотермічного випадку [54, 56, 60], можна безпосередньо застосувати і до розглядуваної термопружної задачі.

Компоненти теплових напружень визначаються при цьому співвідношеннями

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(T)} &= \frac{12z}{h^3} M_x^{(T)} - \frac{E\alpha_T T}{1-\nu}, & \sigma_y^{(T)} &= \frac{12z}{h^3} M_y^{(T)} - \frac{E\alpha_T T}{1-\nu}, \\ \tau_{xy}^{(T)} &= -\frac{12z}{h^3} M_{xy}^{(T)}, \end{aligned} \quad (12)$$

де згинні та крутний моменти, зумовлені еквівалентним навантаженням $p^{(T)}$, визначаються зі співвідношень

$$\begin{aligned} M_x^{(T)} &= -D \left(\frac{\partial^2 w^{(T)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{(T)}}{\partial y^2} \right), & M_y^{(T)} &= -D \left(\frac{\partial^2 w^{(T)}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{(T)}}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy}^{(T)} &= D(1-\nu) \frac{\partial^2 w^{(T)}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (13)$$

3. Деякі методи розв'язування бігармонічних граничних задач у прямокутнику. Не намагаючись охопити всю історію розвитку та удосконалювання аналітичних методів розв'язування бігармонічної проблеми для прямокутної області, детально описані в [98], зупинимось лише на декількох характерних моментах. При цьому виявляється, що основні методи розв'язання цієї проблеми витримали найстрогішу перевірку – іспит часом.

Серед різних підходів до розв'язання бігармонічних граничних задач для прямокутної області можна виділити два основних: варіаційний метод Рітца (або енергетичний метод Тимошенка) і метод суперпозиції.

3.1. Варіаційний метод. Цей метод був запропонований швейцарським фізиком В. Рітцем у фундаментальній статті [104], в основі якої лежить його *habilitationsschrift* (дисертація) в Геттінгенському університеті. Цей видатний мемуар поклав (поряд з роботами лорда Релея) початок застосуванню варіаційних методів для рівнянь із частинними похідними [34]. С. П. Тимошенко згадував [59, с. 114], що, прочитавши в бібліотеці Київського політехнічного інституту у свіжому номері журналу «*Annalen der Physik*» статтю (яка виявилася, на жаль, останньою) В. Рітца [105] про наближене обчислення за допомогою варіаційного методу частот згинних коливань прямокутної пластинки з вільними краями, він відразу ж застосував [52] цей підхід до задачі про згин прямокутної пластинки з жорстко защемленими краями, а також запропонував цю тему як дипломну (!) роботу [47]. С. П. Тимошенко згодом зазначав [57, с. 404]: «*Імовірно, що ніякий інший математичний прийом не дозволив розгорнути наукові дослідження з опору матеріалів і теорії пружності настільки широко, як цей метод*».

С. П. Тимошенко, постійно віддаючи належне «*відомому способу розв'язування рівнянь математичної фізики, запропонованому Вальтером Рітцем*» (так було написано в передмові до першої частини курсу теорії пружності [53]), волів називати цей підхід началом найменшої роботи або принципом мінімуму потенціальної енергії, або енергетичним методом [54, § 56], [55, § 43], [60, § 80], [61, § 94]. При цьому мінімізація підлягає вираз

$$V = \frac{1}{2E} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (14)$$

для значення енергії деформації прямокутної пластинки $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ одиничної товщини при значенні коефіцієнта Пуассона $\nu = 0$ (оскільки для плоских задач в однов'язній області розподіл напружень не залежить від пружних сталих матеріалу).

Дещо з історії. Енергетичний метод Тимошенка викликав запеклу й несправедливу критику з боку професора теоретичної аерогазодинаміки Університету Іллінойс, Урбана (США), фон М. З. Кржівоблотцкі, висловлену ним у статті [88] і в дискусіях стосовно статей [73, 83]. Суть критики полягала в тому, що енергетичний підхід, «*винайдений одним з авторів і опублікований в одному з його підручників*», по-перше, не може вважатися строгим з математичної точки зору для випадку розподілених навантажень і, по-друге, що С. П. Тимошенко «*припустив велику несправедливість стосовно померлого швейцарського фізика*», не згадавши його імені при описі енергетичного методу. Аналіз усіх книг Тимошенка показує, що ці твердження є в цілому необгрунтованими. Не згадуючи явно імені В. Рітца в першому виданні підручника [55] у розділі, який стосувався розв'язування плоскої задачі для прямокутника (а В. Рітц, дійсно, не розглядав цієї задачі), у другому виданні [110] у розділі енергетичних методів для розв'язування плоских задач С. П. Тимошенко в § 48 чітко згадав ім'я В. Рітца як творця цього методу. Цей параграф був пропущений у третьому виданні фундаментального підручника [61], але й тут С. П. Тимошенко в § 94 (у виносці) відмітив, що такий підхід називається методом Рітца або Релея – Рітца та навів відповідні посилання. Більше того, С. П. Тимошенко в другому виданні книги [60] вказав (у § 81) на можливість обчислення коефіцієнтів у поданні прогину жорстко защемленої прямокутної пластинки у вигляді ряду за системою функцій, яка задовольняє всі граничні умови, без фактичного визначення енергії системи, відмітивши, що «*принцип, який приводить до рівнянь, відомих як рівняння Гальоркіна, був вказаний Рітцем*».

Назва «метод Гальоркіна» традиційно широко використовувалася в СРСР [46]. У закордонній літературі після доповіді К. Б. Бізено [70], у якій (з посиланням на Г. Генкі) саме так було названо підхід, цей термін увійшов у широкий вжиток. Г. Генкі, у свою чергу, познайомився з основною статтею Б. Г. Гальоркіна [7] в оригіналі (він був російським військовополоненим під час Першої світової війни й частину часу провів у полоні в Саратові) та, працюючи після цього в Технічній школі в Дельфті (Нідерланди) у Бізено, широко застосовував цей підхід. Варто, однак, відмітити, що сам К. Б. Бізено [69, 70] вважав підходи Рітца й Гальоркіна цілком еквівалентними. Цікаві відомості про історію виникнення і розвитку цього варіаційного методу містить книга Е. І. Григолюка [9].

С. П. Тимошенко [109] розглянув приклад застосування принципу найменшої роботи (енергетичного методу) для розв'язання граничної задачі (2), (3) про розтягування прямокутника тільки нормальними зусиллями, розподіленими за параболічним законом на торцях $x = \pm a$, тобто

$$\begin{aligned} p_+(y) = p_-(y) &= S \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right), & t_+(y) = t_-(y) &= 0, \\ q_+(x) = q_-(x) &= 0, & s_+(x) = s_-(x) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Цей розв'язок було потім ним відтворено в [55, § 43] і [61, § 94], а також використано в підручнику П. Ф. Папковича [44, розд. XIV, § 12]. Вибираючи функцію напружень F у вигляді

$$F = \frac{1}{2} S y^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) + (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2), \quad (16)$$

у якому перший доданок повністю задовольняє ненульові граничні умови (3), а додаткові члени з довільними сталими $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ задовольняють тотожно нульові граничні умови для функції та її нормальної похідної, С. П. Тимошенко знайшов у першому та в другому наближеннях (верхні індекси 1 і 2 відповідно)

для квадрата $a = b$:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= 0.04253 \frac{S}{a^6}, & \alpha_2^{(1)} = \alpha_3^{(1)} &= 0, \\ \alpha_1^{(2)} &= 0.04040 \frac{S}{a^6}, & \alpha_2^{(2)} = \alpha_3^{(2)} &= 0.01174 \frac{S}{a^8}; \end{aligned}$$

для прямокутника $a = 2b$:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= 0.09074 \frac{S}{a^4 b^2}, & \alpha_2^{(1)} = \alpha_3^{(1)} &= 0, \\ \alpha_1^{(2)} &= 0.07983 \frac{S}{a^4 b^2}, & \alpha_2^{(2)} &= 0.1250 \frac{S}{a^6 b^2}, & \alpha_3^{(2)} &= 0.01826 \frac{S}{a^6 b^2}, \end{aligned}$$

та навів розподіл напружень σ_x по висоті в перерізі $x = 0$ (див. рис. 97 у [55] або рис. 133 у [61]).

Інші задачі про розтягування і згин скінченних прямокутних пластин (так званих «балок-стінок»), розглянуті на основі принципу найменшої роботи та іншого варіаційного підходу – на основі теореми Кастільяно, наведено в книгах [1, розд. III, § 2], [32, розд. V, §§ 14–16, розд. VI], [50, §§ 91–93], [44, розд. XIV, § 12], [63, § 55] і в статтях [14, 65, 72, 78, 82]. У цілому варіаційні методи виявилися достатньо ефективними та дозволили при порівняно невеликому обсязі обчислень (цілком посильних навіть «докомп'ютерному» вченому початку й середини ХХ століття) одержувати дані, достатньо надійні для інженерних оцінок міцності конструкцій.

3.2. Метод суперпозиції. У Київській школі термомеханіки, створеній Анатолієм Дмитровичем Коваленком, для розв'язання граничної бігармонічної задачі для прямокутника значне застосування одержав метод суперпозиції [10, 12, 17]. Ідея методу запропонована в дванадцятій лекції класичного курсу Г. Ляме [89] для загальної тривимірної задачі про рівновагу пружного паралелепіпеда під дією нормальних нерівномірних навантажень. У мемуарі Е. Мат'є [93], який пізніше був повністю відтворений у його лекціях [94], цей підхід був застосований до плоскої задачі про пружну рівновагу прямокутника, однак числових результатів отримано не було. Подальший розвиток методу й одержання конкретних даних для згину жорстко защемленої пластини пов'язаний у першій половині ХХ століття з дисертаційними роботами математика Б. М. Кояловича [26], інженера-кораблебудівника І. Г. Бубнова [4] і механіка Г. Генкі [82], захищених відповідно у Санкт-Петербурзькому університеті й Політехнічному інституті та в Технічній школі Дармштадту, лекціями з будівельної механіки корабля тоді вже професора, генерал-майора корпусу корабельних інженерів І. Г. Бубнова [5] у Морській академії (Санкт-Петербург), роботами К. Е. Інліса [84, 85], опублікованими в провідних британських технічних журналах, дисертаціями учнів С. П. Тимошенка [56, 60], захищеними наприкінці тридцятих років ХХ століття у ряді університетів США, компактною і змістовною статтею Г. Пікета [102], великому, але маловідомому мемуарі К. Шредера (майбутнього президента Академії Наук НДР) [106], і багатьма іншими роботами, опублікованими в журналах буквально на всіх континентах. Достатньо повний огляд літератури можна знайти в [10, 98, 107].

Основна ідея методу суперпозиції для бігармонічних задач для прямокутника полягає у використанні суми двох рядів Фур'є за повними системами тригонометричних функцій за координатами x і y . Обидва ряди тожодно задовольняють бігармонічне рівняння в прямокутній області, а послідовності коефіцієнтів рядів Фур'є є достатніми для виконання двох довільних граничних умов для функції і її нормальної похідної на всіх чотирьох сторонах прямокутника. З огляду на неортогональність функцій вирази для коефіцієнтів одного ряду залежить від усіх коефіцієнтів іншого ряду і, навпаки. Це призводить до необхідності розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка виражає залежність між коефіцієнтами рядів Фур'є і прикладеним навантаженням.

Для випадку, коли шукана функція напружень $F(x, y)$ або прогин $w(x, y)$ пластинки є парними за обома координатами, залежно від того, яка з умов – чи для самої функції, чи для її нормальної похідної виконується тотожно, отримуємо два типи нескінченних систем.

Коли гранична умова для нормальної похідної виконується тотожно, нескінченна система для послідовності невідомих коефіцієнтів рядів Фур'є X_m і Y_ℓ при відомих вільних членах F_m і H_ℓ має вигляд

$$\begin{aligned} X_m b \Delta(\alpha_m b) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} Y_\ell \frac{4\alpha_m^2 \beta_\ell}{(\alpha_m^2 + \beta_\ell^2)^2} + F_m, & 1 \leq m \leq \infty, \\ Y_\ell a \Delta(\beta_\ell a) &= \sum_{m=1}^{\infty} X_m \frac{4\beta_\ell^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \beta_\ell^2)^2} + H_\ell, & 1 \leq \ell \leq \infty, \end{aligned} \quad (17)$$

де позначено $\alpha_m = \frac{(2m-1)\pi}{2a}$, $\beta_\ell = \frac{(2\ell-1)\pi}{2b}$, $\Delta(\xi) = \tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh^2 \xi}$.

Навпаки, коли гранична умова для функції виконується тотожно, тоді нескінченна система для послідовності невідомих коефіцієнтів рядів Фур'є X_n і Y_k при відомих вільних членах C_n і D_k має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
X_n b \Delta_1(\gamma_n b) &= \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \frac{4\gamma_n^3}{(\delta_k^2 + \gamma_n^2)^2} + C_n, \quad 1 \leq n \leq \infty, \\
Y_k a \Delta_1(\delta_k a) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{4\delta_k^3}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} + D_k, \quad 1 \leq k \leq \infty,
\end{aligned} \tag{18}$$

де $\gamma_n = \frac{n\pi}{a}$, $\delta_k = \frac{k\pi}{b}$, $\Delta_1(\xi) = \coth \xi + \frac{\xi}{\sinh^2 \xi}$.

Для всіх сформульованих вище механічних задач при не занадто «екзотичних» граничних умовах асимптотична поведінка вільних членів має вигляд

$$F_m = f_0 + \frac{f_2}{\alpha_m^2} + O(m^{-3}), \quad m \rightarrow \infty, \quad H_\ell = h_0 + \frac{h_2}{\beta_\ell^2} + O(\ell^{-3}), \quad \ell \rightarrow \infty,$$

$$C_n = \frac{c_1}{\gamma_n} + O(n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty, \quad D_k = \frac{d_1}{\delta_k} + O(k^{-2}), \quad k \rightarrow \infty,$$

де f_0 , f_2 , h_0 , h_2 , c_1 , d_1 – деякі сталі.

Основними питаннями при дослідженні нескінченних систем (17) і (18) є: чи існує (єдиний) їх розв'язок і як за скінченну кількість операцій встановити наближені значення невідомих і оцінити похибку. Незважаючи на позірну простоту (лінійні рівняння!), теорія нескінченних систем має ряд важких місць, що іноді призводило до суперечностей і нерозуміння. Ці труднощі, звичайно, пов'язані з подвійною нескінченністю кількості невідомих і кількості рівнянь.

Традиційний спосіб розв'язування нескінченних систем, який має назву методу *простой редукції*, запропонований Ж. Фур'є ще в 1807 р. (див. [79] для повного первісного тексту), був опублікований ним у 1822 р. у фундаментальному трактаті [77]. Згідно з Фур'є нескінченну систему (18) необхідно розглядати як граничну форму так званої *нормальної* скінченної системи

$$\begin{aligned}
X_n^{(N,K)} b \Delta_1(\gamma_n b) &= \sum_{k=1}^K Y_k^{(N,K)} \frac{4\gamma_n^3}{(\delta_k^2 + \gamma_n^2)^2} + C_n, \quad 1 \leq n \leq N, \\
Y_k^{(N,K)} a \Delta_1(\delta_k a) &= \sum_{n=1}^N X_n^{(N,K)} \frac{4\delta_k^3}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} + D_k, \quad 1 \leq k \leq K,
\end{aligned} \tag{19}$$

у якій кількість невідомих $X_n^{(N,K)}$, $1 \leq n \leq N$, і $Y_k^{(N,K)}$, $1 \leq k \leq K$, збігається з кількістю рівнянь. Для заданих N і K невідомі в системі (19) можна знайти будь-яким способом. (Наприклад, Ж. Фур'є [77, розд. 3] навіть одержав явні вирази для невідомих у своїй конкретній скінченній системі, а Б. М. Коялович [26] довів, що метод послідовних наближень при розв'язуванні скінченної системи (19) сходиться.) Очевидно, що значення цих невідомих змінюються, коли збільшуємо їхню кількість і відповідно кількість рівнянь для їхнього визначення. Граничні значення, до яких прямують $X_n^{(N,K)}$ і $Y_k^{(N,K)}$ для кожного n і k , коли N і K необмежено зростають (допущення про існування цих границь складає зміст «принципу Фур'є»), називаються *головними* розв'язками нескінченної системи (18).

Пізніше Б. М. Коялович [27] повернувся до результатів своєї докторської дисертації [26] і розвинув спеціальну теорію *лімітантів*, яка дозволяє за розв'язком нескінченної системи (19) визначити верхню і нижню границі для *всіх* невідомих. (Ця теорія відразу ж була детально описана в книзі [15], що не перешкодило одному з її молодих авторів різко крити-

кувати старого професора саме з цих питань.) Більше того, Б. М. Коялович довів, що для системи (18) за певних обмежень на матрицю і вільні члени, які виконуються для задачі про згин жорстко защемленої пластинки під дією рівномірного навантаження, справджується закон *асимптотичних виразів* для поведінки невідомих з великими номерами:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{k \rightarrow \infty} Y_k = G \quad (20)$$

зі сталою G , яка, взагалі кажучи, *не дорівнює* нулеві. Б. М. Коялович [27, с. 167] сформулював принципове питання про знаходження числа G *a priori* без розв'язання системи (18) і мав намір присвятити цьому окреме дослідження. Очевидно, вік (йому було тоді 63 року) і наступна довга дискусія про єдиність розв'язку нескінченних систем (див. [40] для детальних посилань), на жаль, не дозволили йому розглянути це найважливіше питання. Питання про єдиність розв'язку для випадку нескінченних систем, пов'язаних з бігармонічною проблемою для прямокутника, було остаточно встановлено теоремою П. С. Бондаренка [3]. Це питання, здавалося, не повинно виникати, оскільки ще Е. Мат'є [92] довів єдиність розв'язку бігармонічної задачі (але *не* нескінченних систем, до яких вона може бути зведена!) для загального випадку двовимірної однозв'язної області. Однак недавня дискусія [74, 99] свідчить, що й тут мають місце певні тонкощі.

Система (17) є *повністю регулярною*, а система (18) є *регулярною*. Тому до них застосовні всі загальні теореми [16, розд. I, § 2] про існування головних розв'язків, які можуть бути знайдені як методом простої редукції, так і методом послідовних наближень. Наявність закону (20) змушує обережно підходити до розв'язання цих нескінченних систем за допомогою методу простої редукції, описаного вище. Хоча цей процес у границі сходиться до головних розв'язків, але при конкретних обчисленнях завжди маємо

$$X_n = 0, \quad n > N, \quad Y_k = 0, \quad k > K. \quad (21)$$

Якщо врахувати, що невідомі X_n і Y_k є коефіцієнтами рядів Фур'є у зображеннях для шуканих функцій, то очевидно, що незнання їхньої асимптотики не дозволить врахувати тонкощі особливостей полів поблизу границі й, зокрема, – поблизу кутових точок. Ця обставина була вперше чітко зазначена в монографії В. Т. Грінченка [10].

У нашій роботі [98] за допомогою перетворення Мелліна було отримано узагальнення закону Кояловича (20) на нескінченні системи (17) і (18), які виникають при розгляді конкретних бігармонічних задач для прямокутника.

Для нескінченної системи (17) справджується асимптотична поведінка

$$\begin{aligned} X_m &= \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \left(\frac{f_0}{b} + \frac{2h_0}{\pi a} \right) + \frac{E}{\alpha_m} + x_m, \\ Y_\ell &= \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \left(\frac{h_0}{a} + \frac{2f_0}{\pi b} \right) + \frac{E}{\beta_\ell} + y_\ell \end{aligned} \quad (22)$$

з

$$\begin{aligned} x_m &= \operatorname{Re}(E_\gamma \alpha_m^{-\gamma_1}) + \xi_m, \quad \xi_m = O(m^{-3}), \quad m \rightarrow \infty, \\ y_\ell &= -\operatorname{Re}(E_\gamma \beta_\ell^{-\gamma_1}) + \eta_\ell, \quad \eta_\ell = O(\ell^{-3}), \quad \ell \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

де $\gamma_1 = 2.73959 + i1.11902$ – корінь трансцендентного рівняння $\sin\left(\frac{1}{2}\gamma\pi\right) - \gamma = 0$ з найменшою дійсною частиною; E і E_γ – відповідно дійсна та комплексна сталі.

Сталу E можна визначити в явному вигляді:

$$E = \frac{\pi}{2ab} \left[\sum_{m=1}^{\infty} (F_m - f_0) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (H_\ell - h_0) \right]. \quad (24)$$

У термінах невідомих x_m і y_ℓ нескінченна система (17) набуває вигляду

$$\begin{aligned} x_m b \Delta(\alpha_m b) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} y_\ell \frac{4\alpha_m^2 \beta_\ell}{(\beta_\ell^2 + \alpha_m^2)^2} - E \frac{2b^2}{\cosh^2 \alpha_m b} + \hat{F}_m, \quad 1 \leq m \leq \infty, \\ y_\ell a \Delta(\beta_\ell a) &= \sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{4\beta_\ell^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \beta_\ell^2)^2} - E \frac{2a^2}{\cosh^2 \beta_\ell a} + \hat{H}_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq \infty, \end{aligned} \quad (25)$$

де \hat{F}_m і \hat{H}_ℓ – відомі величини, очевидним чином за допомогою співвідношень (22) виражені через F_m і H_ℓ , які мають порядки $O(m^{-2})$, $m \rightarrow \infty$, і $O(\ell^{-2})$, $\ell \rightarrow \infty$, відповідно. Нескінченну систему (25) з огляду на асимптотичну поведінку (23) уже можна розв'язати способом простої редукції, причому звичайно кількість рівнянь є невеликою. Такий підхід називають методом покращеної редукції.

Рівняння для визначення комплексної сталої E_γ , яка є важливою при вивченні локальної поведінки величин поблизу кутових точок, мають вигляд

$$-4 \sum_{\ell=1}^{\infty} \beta_\ell y_\ell = \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m^2 \hat{F}_m, \quad -4 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m x_m = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \beta_\ell^2 \hat{H}_\ell. \quad (26)$$

При цьому в системах (19), (26) потрібно перейти до нових невідомих ξ_m , η_ℓ , E_γ і розв'язувати (тепер вже комплексну) систему способом простої редукції.

Для нескінченної системи (18) має місце асимптотична поведінка

$$X_n = G + x_n, \quad Y_k = G + y_k$$

з

$$\begin{aligned} x_n &= \operatorname{Re}(G_\lambda \gamma_n^{-\lambda_1}) + \xi_n, & \xi_n &= O(n^{-2}), & n &\rightarrow \infty, \\ y_k &= -\operatorname{Re}(G_\lambda \delta_k^{-\lambda_1}) + \eta_k, & \eta_k &= O(k^{-2}), & k &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

де $\lambda_1 = 1.73959 + i1.11902$ – корінь трансцендентного рівняння $\cos\left(\frac{1}{2}\lambda\pi\right) + \lambda + 1 = 0$ з найменшою дійсною частиною, а G і G_λ – дійсна та комплексна сталі.

У нескінченній системі (18) сталу G не можна в загальному випадку визначити явно. У термінах невідомих x_n , y_k , G ця нескінченна система має вигляд

$$\begin{aligned} x_n b \Delta_1(\gamma_n b) &= \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{4\gamma_n^3}{(\delta_k^2 + \gamma_n^2)^2} - G \frac{2}{\gamma_n} + C_n, \quad 1 \leq n \leq \infty, \\ y_k a \Delta_1(\delta_k a) &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{4\delta_k^3}{(\gamma_n^2 + \delta_k^2)^2} - G \frac{2}{\delta_k} + D_k, \quad 1 \leq k \leq \infty, \end{aligned} \quad (27)$$

з додатковим рівнянням

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{2b^2}{\sinh^2 \gamma_n b} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{2a^2}{\sinh^2 \delta_k a} + G \frac{a^2 + b^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\gamma_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{\delta_k}. \quad (28)$$

У рівнянні (28) доданки в сумах, що стоять у лівих частинах, спадають надзвичайно швидко. Тому перші невідомі x_n і y_k (які змінюються вкрай мало при збільшенні N і K при розв'язуванні нескінченної системи (27) способом простої редукції) надійно визначають значення сталої G .

Рівняння для визначення комплексної сталої G_λ мають вигляд

$$2G - 4 \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n C_n, \quad 2G - 4 \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k D_k. \quad (29)$$

Аналогічно до попереднього в системах (27), (29) і рівнянні (28) потрібно перейти до нових невідомих, ξ_n , η_k , G_λ і розв'язувати (тепер уже комплексну) систему методом простої редукції. Слід зазначити, що співвідношення (26) і (29) мають чітку інтерпретацію у термінах механічних характеристик конкретної задачі.

4. Розв'язок бігармонічних граничних задач у прямокутнику. Розглянемо побудову розв'язків типових бігармонічних задач для прямокутника методом суперпозиції. Зупинимось лише на випадку плоскої задачі термопружності, оскільки деталі побудови розв'язків для згину пластин наведено в [40].

Для розглянутих нижче двох задач про температурні напруження в прямокутнику при симетричному за обома координатами температурному полі їх розв'язування зводиться до силових задач про симетричне навантаження прямокутника тільки нормальними або тільки дотичними зусиллями. Хоча ці задачі можна й об'єднати, тобто розглянути єдиним способом побудову на основі методу суперпозиції розв'язку загальної граничної задачі (1)–(3), доцільно розглянути два способи вибору системи повних тригонометричних функцій. Такий поділ дозволяє викласти суть методу суперпозиції з найбільшою простотою.

4.1. Для випадку симетричного навантаження прямокутника довільною системою нормальних сил $p_+(y) = p_-(y) = p(y)$, $q_+(x) = q_-(x) = q(x)$ вираз для функції напружень Ері можна вибрати у вигляді

$$F = \frac{p_0}{2} x^2 + \frac{q_0}{2} y^2 + b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{X_n}{\gamma_n^2} \left[\left(b \coth \gamma_n b + \frac{1}{\gamma_n} \right) \frac{\cosh \gamma_n y}{\sinh \gamma_n b} - y \frac{\sinh \gamma_n y}{\sinh \gamma_n b} \right] \cos \gamma_n x - a \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{Y_k}{\delta_k^2} \left[\left(a \coth \delta_k a + \frac{1}{\delta_k} \right) \frac{\cosh \delta_k x}{\sinh \delta_k a} - x \frac{\sinh \delta_k x}{\sinh \delta_k a} \right] \cos \delta_k y, \quad (30)$$

де $\gamma_n = \frac{n\pi}{a}$, $\delta_k = \frac{k\pi}{b}$, а силове навантаження задається розвиненнями в ряди Фур'є

$$q(x) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos \gamma_n x, \quad q_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a q(x) dx, \quad q_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a q(x) \cos \gamma_n x dx, \\ p(y) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos \delta_k y, \quad p_0 = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b p(y) dy, \quad p_k = \frac{1}{b} \int_{-b}^b p(y) \cos \delta_k y dy.$$

Обчислюючи згідно з (1) компоненти напружень, отримуємо, що нульові граничні умови для дотичних напружень виконані тотожно. Умови для нормальних напружень після стандартних розвинень у ряди Фур'є приводять до нескінченної системи (18) для коефіцієнтів рядів X_n і Y_k , у якій

$$C_n = (-1)^{n+1} \gamma_n q_n, \quad D_k = (-1)^k \delta_k p_k,$$

при цьому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\gamma_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k}{\delta_k} = p(b) - p_0 - q(a) + q_0.$$

Розв'язуючи нескінченну систему (18) способом покращеної редукції, тобто з використанням системи (27), (28), при невеликій кількості рівнянь одержуємо дані про значення всіх коефіцієнтів рядів Фур'є X_n і Y_k . Підставляючи значення цих коефіцієнтів через x_n , y_k , G у вираз для функції напружень (30) і використовуючи тотожність [74, 99]

$$\begin{aligned} & b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\gamma_n^2} \left[\left(b \coth \gamma_n b + \frac{1}{\gamma_n} \right) \frac{\cosh \gamma_n y}{\sinh \gamma_n b} - y \frac{\sinh \gamma_n y}{\sinh \gamma_n b} \right] \cos \gamma_n x - \\ & - a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\delta_k^2} \left[\left(a \coth \delta_k a + \frac{1}{\delta_k} \right) \frac{\cosh \delta_k x}{\sinh \delta_k a} - x \frac{\sinh \delta_k x}{\sinh \delta_k a} \right] \cos \delta_k y = \\ & = \frac{a^4 - b^4}{45} - \frac{(a^2 - x^2)^2}{24} + \frac{(b^2 - y^2)^2}{24}, \end{aligned}$$

яка, утім, була відома ще І. Г. Бубнову [5, § 20] або [6, с. 150], можна записати вирази для нормальних напружень у прямокутнику

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p_0 + \frac{1}{2} G \left(y^2 - \frac{b^2}{3} \right) + b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n A(y, \gamma_n, b) \cos \gamma_n x + \\ & + a \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k y_k B(x, \delta_k, a) \cos \delta_k y, \\ \sigma_y &= q_0 - \frac{1}{2} G \left(x^2 - \frac{a^2}{3} \right) - b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n B(y, \gamma_n, b) \cos \gamma_n x - \\ & - a \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k y_k A(x, \delta_k, a) \cos \delta_k y, \end{aligned} \quad (31)$$

де введено позначення

$$\begin{aligned} A(z, \lambda, h) &= \left(h \coth \lambda h - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\cosh \lambda z}{\sinh \lambda h} - z \frac{\sinh \lambda z}{\sinh \lambda h}, \\ B(z, \lambda, h) &= \left(h \coth \lambda h + \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\cosh \lambda z}{\sinh \lambda h} - z \frac{\sinh \lambda z}{\sinh \lambda h}. \end{aligned}$$

Усі ряди швидко збігаються усюди, включаючи границю прямокутника з кутовими точками, тому у розрахунках достатньо узяти лише декілька перших членів.

Обчислюючи різницю напружень $\sigma_x - \sigma_y$ у кутовій точці $x = a$, $y = b$, отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} & p(b) - q(a) = \\ & = p_0 - q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{2b^2}{\sinh^2 \gamma_n b} + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \frac{2a^2}{\sinh^2 \delta_k a} + G \frac{a^2 + b^2}{3}, \end{aligned} \quad (32)$$

у якому легко впізнати додаткове рівняння (28). Таким чином, це рівняння має чіткий фізичний зміст, зайвий раз підтверджуючи слова І. Г. Бубнова [6, с. 138] про те, що «Потрібно пам'ятати, що довільна формула, яка

пов'язує фізичні величини, є тільки символічним виразом усіх припущень, зроблених при її встановленні, і в одержуваних результатах не можна бачити тільки голі цифри».

Якщо повернутися до коефіцієнтів X_n і Y_k у рядах (31) для напружень у кутовій точці $x = a$, $y = b$, то після деяких перетворень з використанням рівностей [71, 80]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{\sinh^2 n\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta}{\sinh^2 k\beta} = \frac{\alpha + \beta}{6} - 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n\alpha - 1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\coth k\beta - 1}{k} = \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha - \beta}{6}$$

при $\alpha\beta = \pi^2$, формально залишивши перші N і K доданків у рядах, отримаємо співвідношення

$$\sigma_x(a, b) = p_0 + b \sum_{n=1}^N X_n A(b, \gamma_n, b) + a \sum_{k=1}^K Y_k B(a, \delta_k, a) + G \frac{ab}{\pi} \left(\ln \frac{b}{a} + 1 \right),$$

$$\sigma_y(a, b) = q_0 - b \sum_{n=1}^N X_n B(b, \gamma_n, b) - a \sum_{k=1}^K Y_k A(a, \delta_k, a) + G \frac{ab}{\pi} \left(\ln \frac{b}{a} - 1 \right). \quad (33)$$

Порівнюючи ці вирази з отриманими з (30) виразами для напружень

$$\sigma_x(a, b) = p_0 + b \sum_{n=1}^N X_n A(b, \gamma_n, b) + a \sum_{k=1}^K Y_k B(a, \delta_k, a),$$

$$\sigma_y(a, b) = q_0 - b \sum_{n=1}^N X_n B(b, \gamma_n, b) - a \sum_{k=1}^K Y_k A(a, \delta_k, a), \quad (34)$$

у яких в сумах залишено лише скінченну кількість членів (а саме це й відбувається при розв'язуванні вихідної нескінченної системи (18) способом простої редукції), бачимо, що при $G \neq 0$ вирази для σ_x і σ_y у кутовій точці мають *фіксовані* похибки при збереженні довільної скінченної кількості членів у рядах (30) для функції напружень Ері. Ці похибки не можуть бути усунуті навіть при необмеженому збільшенні чисел N і K у *скінченній* системі, отриманій з (18) методом простої редукції.

Цікаво зазначити, що для випадку квадрата $a = b$ у прикладі С. П. Тимошенка, коли нормальне навантаження задається співвідношенням (15) і $p_0 = \frac{2}{3} S$, $p_k = (-1)^{k+1} \frac{4}{b^2 \delta_k^2} S$, сталу G можна визначити *точно*: $G = -\frac{S}{b^2}$.

Дійсно, поклавши з огляду на симетрію $x_n = -y_n$, одержуємо, що рівняння (32) при цьому значенні G виконується тотожно, а обидва рядки в парній нескінченній системі (27) при $C_n = 0$, $D_k = -\frac{4S}{b^2 \delta_k}$ призводять до однакових

типових рівнянь щодо невідомих x_n :

$$x_n \Delta_1(n\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{4n^3}{\pi(k^2 + n^2)^2} = \frac{2S}{n\pi b^2}, \quad 1 \leq n \leq \infty.$$

4.2. Для випадку симетричного навантаження прямокутника довільною системою дотичних зусиль при $t_+(y) = -t_-(y) = t(y)$, $s_+(x) = -s_-(x) = s(x)$ функцію напружень Ері вибираємо у вигляді

$$F = b \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{X_m}{\alpha_m} \left(b \tanh \alpha_m b \frac{\cosh \alpha_m y}{\cosh \alpha_m b} - y \frac{\sinh \alpha_m y}{\cosh \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x -$$

$$- a \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell \frac{Y_\ell}{\beta_\ell} \left(a \tanh \beta_\ell a \frac{\cosh \beta_\ell x}{\cosh \beta_\ell a} - x \frac{\sinh \beta_\ell x}{\cosh \beta_\ell a} \right) \cos \beta_\ell y, \quad (35)$$

де $\alpha_m = \frac{(2m-1)\pi}{2a}$, $\beta_\ell = \frac{(2\ell-1)\pi}{2b}$, а силове навантаження задається розвиненнями в ряди Фур'є

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} s_m \sin \alpha_m x, & s_m &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a s(x) \sin \alpha_m x dx, \\ t(y) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} t_\ell \sin \beta_\ell y, & t_\ell &= \frac{1}{b} \int_{-b}^b t(y) \sin \beta_\ell y dy. \end{aligned} \quad (36)$$

Обчислюючи згідно з (1) компоненти напружень, отримуємо, що нульові граничні умови для нормальних напружень виконуються тотожно. Умови для дотичних напружень після стандартних розвинень приводять до нескінченної системи (17) для коефіцієнтів рядів Фур'є X_m і Y_ℓ , у якій

$$F_m = (-1)^{m+1} s_m, \quad H_\ell = (-1)^\ell t_\ell.$$

При цьому для гладких навантажень $F_m = O(m^{-2})$, $m \rightarrow \infty$ і $H_\ell = O(\ell^{-2})$, $\ell \rightarrow \infty$. Обчислення згідно з (24) з урахуванням зображень (36) дають

$$E = \frac{\pi}{2ab} [s(a) - t(b)]. \quad (37)$$

Таким чином, коли в кутовій точці не виконується умова парності дотичних напружень, $s(a) \neq t(b)$ (така ситуація, в принципі, можлива, оскільки границя не належить пружному тілу і на ній можуть бути задані цілком довільні умови), то невідомі X_m і Y_ℓ прямують до нуля за законами (22), (23). На підставі цього для поля напружень у прямокутнику отримуємо вирази, аналогічні до (31), тому нема сенсу тут виписувати їх повністю. Зазначимо тільки, що локальна поведінка напружень в околі кутової точки в полярних координатах (ρ, ϑ) , де $x = a - \rho \cos \vartheta$, $y = b - \rho \sin \vartheta$ при $\rho \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{2}\pi$ задається співвідношеннями

$$\begin{aligned} \sigma_x(\rho, \vartheta) &= \frac{s(a) - t(b)}{2} (\sin 2\vartheta - \pi + 2\vartheta) + O(\rho^2), \\ \sigma_y(\rho, \vartheta) &= -\frac{s(a) - t(b)}{2} (\sin 2\vartheta - 2\vartheta) + O(\rho^2), \\ \tau_{xy}(\rho, \vartheta) &= s(a) \cos^2 \vartheta - t(b) \sin^2 \vartheta + O(\rho^2). \end{aligned} \quad (38)$$

З цих співвідношень випливає, що в кутовій точці не тільки дотичні напруження мають розрив величини $s(a) - t(b)$, заданий граничними умовами, але й нормальні напруження також мають розрив величини $\frac{s(a) - t(b)}{2} \pi$. Цей несподіваний результат був вперше отриманий у замітці [103] при аналізі простої задачі для чвертьплощини.

5. Числові приклади. Переваги методу суперпозиції – невеликий обсяг обчислень і висока точність визначення механічних характеристик у будь-якій точці прямокутника, стануть більше наочними, якщо розглянути два типових приклади задач термопружності: про остигання довгої призми і про нагрівання тонкої пластини в умовах плоскої деформації і (узагальненого) плоского напруженого стану відповідно. Хоча ці задачі вже досліджувалися і в статтях [11, 37], і в підручниках [2, 44, 55, 61], ряд принципових питань, пов'язаних з точністю виконання всіх граничних умов і, отже, з вірогідністю отриманих числових даних, зумовлює потребу повертатись до них ще раз.

Як *перший приклад* застосування викладеної вище постановки граничної бігармонічної задачі розглянемо температурні напруження в тонкій прямокутній пластині, розподіл температури $T(y)$ у якій є функцією лише від однієї координати. У цьому випадку згідно з рівнянням (8) функція $F^{(T)}$ також залежить лише від координати y , і граничні умови для бігармонічної функції напружень F^* набувають вигляду

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= \frac{\partial^2 F^*}{\partial y^2} = CT(y), & \tau_{xy}^* &= \frac{\partial^2 F^*}{\partial x \partial y} = 0, & x &= \pm a, \\ \sigma_y^* &= \frac{\partial^2 F^*}{\partial x^2} = 0, & \tau_{xy}^* &= \frac{\partial^2 F^*}{\partial x \partial y} = 0, & y &= \pm b.\end{aligned}\quad (39)$$

Якщо виконати граничні умови (39) лише інтегрально для зусилля розтягу і згинного моменту, можна побудувати [44, розд. X, § 3], [55, § 65], [61, § 148] наближений (у сенсі принципу Сен-Венана) розв'язок задачі про термонапружний стан у прямокутній пластині:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{S-V} &= C \left[\frac{1}{2b} \int_{-b}^b T(y) dy + \frac{3y}{2b^3} \int_{-b}^b yT(y) dy - T(y) \right], \\ \sigma_y^{S-V} &= 0, & \tau_{xy}^{S-V} &= 0.\end{aligned}\quad (40)$$

Такі напруження неповністю задовольняють нульові умови на сторонах прямокутника, оскільки для нормальних напружень σ_x на торцях $x = \pm a$ виконуються лише інтегральні умови для зусиль і моменту:

$$\int_{-b}^b \sigma_x^{S-V} dy = 0, \quad \int_{-b}^b y \sigma_x^{S-V} dy = 0.\quad (41)$$

Відповідно до принципу Сен-Венана цей розв'язок застосовний лише до середньої частини прямокутника, якщо його довжина є достатньо великою порівняно з його шириною, тобто, коли $a \gg b$.

С. П. Тимошенко навів у [55, § 65] або [61, § 148] приклад визначення температурних напружень у прямокутній пластинці, коли температури розподілена за параболічним законом

$$T(y) = T_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right),\quad (42)$$

і отримав на основі (40) прості інженерні формули

$$\sigma_x^{S-V} = -\frac{1}{3} S \left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2} \right), \quad \sigma_y^{S-V} = 0, \quad \tau_{xy}^{S-V} = 0,\quad (43)$$

де $S = CT_0$. Цей розподіл напружень наведено на правій діаграмі на рис. 117 у [55] або на рис. 224б у [61].

Уточнені інженерні формули для розрахунку температурних напружень можна отримати на основі першого (або другого) наближення в розв'язку цієї задачі за допомогою енергетичного методу Тимошенка. Зважаючи на граничні умови (39) для допоміжної функції напружень F^* і подання (16) для розв'язку цієї конкретної задачі теорії пружності, напруження σ_x у другому наближенні можна записати у вигляді

для квадрата $a = b$:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(2)} &= -0.1616 S \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2 \left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2} \right) + 0.0235 S \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2 \times \\ &\times \left(1 - 12 \frac{y^2}{b^2} + 15 \frac{y^4}{b^4} \right) - 0.0470 S \frac{x^2}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2 \left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2} \right);\end{aligned}$$

для прямокутника $a = 2b$:

$$\sigma_x^{(2)} = -0.3193 S \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2}\right) + 0.0091 S \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \times \\ \times \left(1 - 12 \frac{y^2}{b^2} + 15 \frac{y^4}{b^4}\right) - 0.5 S \frac{x^2}{a^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - 3 \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Щоб одержати точніші значення напружень поблизу країв пластинки, а також оцінити вплив співвідношення сторін a/b на можливість застосування наближеного розв'язку (43), потрібно знайти допоміжні напруження, які відповідають функції напружень F^* .

Для температурного поля (42) функція $F^{(T)}(y)$ – частковий розв'язок рівняння (8), легко відшукується у явному вигляді:

$$F^{(T)}(y) = -\frac{1}{2} S y^2 \left(1 - \frac{y^2}{6b^2}\right), \quad S = CT_0. \quad (44)$$

Тоді граничні умови для бігармонічної функції F^* набувають вигляду

$$F^{(*)} = \frac{1}{2} S y^2 \left(1 - \frac{y^2}{6b^2}\right), \quad \frac{\partial F^*}{\partial x} = 0, \quad x = \pm a, \quad |y| \leq b, \\ F^* = 0, \quad \frac{\partial F^*}{\partial y} = \pm \frac{2}{3} S b, \quad y = \pm b, \quad |x| \leq a. \quad (45)$$

Таким граничним умовам відповідає плоска задача теорії пружності (2), (3) про навантаження прямокутника лише нормальним зусиллями на торцях $|x| = a$, які розподілені за параболічним законом (15).

Випадок квадратної пластинки $a = b$ становить особливий інтерес, оскільки при такому навантаженні стала G визначається явно.

У табл. 1 наведено порівняння точності виконання граничної умови для нормального напруження σ_x на торці $x = a$ при розв'язанні нескінченної системи (18) методами простої та покращеної редукції відповідно. Видно, що алгоритм покращеної редукції (при врахуванні ненульового значення сталої G) дає добре виконання граничної умови навіть при $N = K = 1$ (з похибкою, меншою ніж 4% від S), а 7 членів у рядах Фур'є дають практично точне виконання цієї умови. З іншого боку, навіть 37 членів у рядах при використанні методу простої редукції не забезпечують точності виконання граничної умови поблизу кутової точки: похибка у самій цій точці дорівнює $\frac{Gb^2}{\pi} = -0.318 S$.

Таблиця 1

y/b	$\sigma_x(a, y) / S$			
	Покращена редукція		Проста редукція	
	$N = K = 1$	$N = K = 7$	$N = K = 7$	$N = K = 37$
0.0	0.016	0.000	0.016	0.000
0.2	0.006	0.000	0.001	0.000
0.4	-0.013	0.000	-0.010	-0.007
0.6	-0.019	0.000	-0.003	0.000
0.8	0.002	0.000	0.047	0.011
0.9	0.021	0.000	0.053	0.016
1.0	0.034	0.001	0.314	0.318

У табл. 2 наведено розподіл нормального напруження σ_x по висоті в центральному перерізі квадрата $x = 0$.

Таблиця 2

y/b	$\sigma_x(0, y)/S$					
	Покращена редукція		Проста редукція		Тимошенко [55]	
	$N = K = 1$	$N = K = 7$	$N = K = 1$	$N = K = 7$	Наближення	
				(1)	(2)	
0.0	-0.137	-0.141	-0.151	-0.141	-0.170	-0.138
0.2	-0.131	-0.131	-0.151	-0.131	-0.150	-0.129
0.4	-0.098	-0.095	-0.101	-0.095	-0.089	-0.097
0.6	-0.021	-0.017	-0.008	-0.017	0.001	-0.031
0.8	0.137	0.137	0.156	0.138	0.157	0.136
1.0	0.428	0.411	0.377	0.404	0.341	0.417

Бачимо, що метод простої редукції системи (18) дає надійні результати по всьому перерізу, що цілком природно, якщо врахувати те, що ненульове значення сталої G є важливим лише при обчисленні напружень поблизу кутової точки. При цьому варіаційний метод при порівняно невеликому обсязі обчислень (цілком посильних навіть «докомп'ютерному» вченому початку ХХ століття) також забезпечує добрі результати.

Таблиця 3

y/b	σ_x^{S-V}/S	$a = b$		$a = 2b$	
		$\sigma_x(0, y)/S$	$\sigma_x(0.5a, y)/S$	$\sigma_x(0, y)/S$	$\sigma_x(0, y)/S$
0.0	-0.333	-0.141	-0.084	-0.312	-0.245
0.2	-0.293	-0.131	-0.079	-0.277	-0.218
0.4	-0.173	-0.095	-0.058	-0.171	-0.132
0.6	0.003	-0.017	-0.017	0.013	-0.010
0.8	0.307	0.137	0.002	0.289	-0.026
1.0	0.667	0.411	0.248	0.675	0.521

Дані, отримані на основі точного розв'язку граничної задачі, наведено в табл. 3. Усередині пластинки вони практично збігаються з результатами інженерного підходу. Бачимо, що розподіл по висоті температурних напружень σ_x у квадратній пластині навіть у серединному перерізі $x = 0$ не відповідає наближеному розподілу (43). Такий розподіл з інженерною точністю отримано лише в серединному перерізі прямокутника $a = 2b$. Це узгоджується з традиційними для формулювання принципу Сен-Венана уявленнями про те, що для напівсмуги при віддаленні від місця прикладання навантаження на відстань, що дорівнює ширині $2b$, нормальне напруження буде надійно визначатися з інтегральних співвідношень (40).

Другим прикладом плоскої задачі про температурні напруження є задача [37] про остигання довгого пружного бруса, що знаходиться в умовах плоскої деформації при нульових навантаженнях на його гранях. Нестационарне миттєве температурне поле задається у вигляді

$$T(x, y) = T_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}. \quad (46)$$

У цікавій, але, на жаль, цілком забутій роботі [37] до розв'язання термомпружної задачі (4), (5) був застосований «наближений спосіб акад. Б. Г. Гальоркіна». Вибираючи парну за обома координатами функцію напружень F у вигляді

$$F = (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 (\lambda_1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 y^2), \quad (47)$$

де λ_1 , λ_2 і λ_3 – поки що довільні сталі (при цьому всі нульові граничні умови (5) виконуються), підставляючи її в рівняння (4), помножуючи обидві частини отриманого співвідношення послідовно на $(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2$, $(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2 x^2$ і $(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2 y^2$ та інтегруючи по всій прямокутній області, одержуємо належну кількість рівнянь, яка необхідна для визначення всіх сталей.

Так, наприклад, якщо обмежитися тільки першим членом ряду та виконати зазначені дії, знаходимо

$$\lambda_1 = -C\gamma \int_{-a}^a \int_{-b}^b (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \nabla^2 T \, dx \, dy, \quad (48)$$

де γ – деякий числовий коефіцієнт, який залежить від a і b . При цьому отримуємо такі вирази для напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 4\lambda_1(3y^2 - b^2)(x^2 - a^2)^2, & \sigma_y &= 4\lambda_1(3x^2 - a^2)(y^2 - b^2)^2, \\ \tau_{xy} &= -16\lambda_1 xy(x^2 - a^2)(y^2 - b^2). \end{aligned} \quad (49)$$

З огляду на малодоступність чудового дослідження [37] для тих, хто не живе по сусідству з великими публічними бібліотеками, на рис. 1 відтворено картини епюр напружень, обчислених відповідно до першого наближення (49). Тут використано традиційні для класичних підручників і трактатів з теорії пружності [35, 42, 44, 58] позначення для нормальних напружень. У розглядуваному випадку цікаво оцінити точність інженерного підходу, оскільки згідно з цим розв'язком мають місце значні напруження розтягу в середині довгої сторони прямокутника.

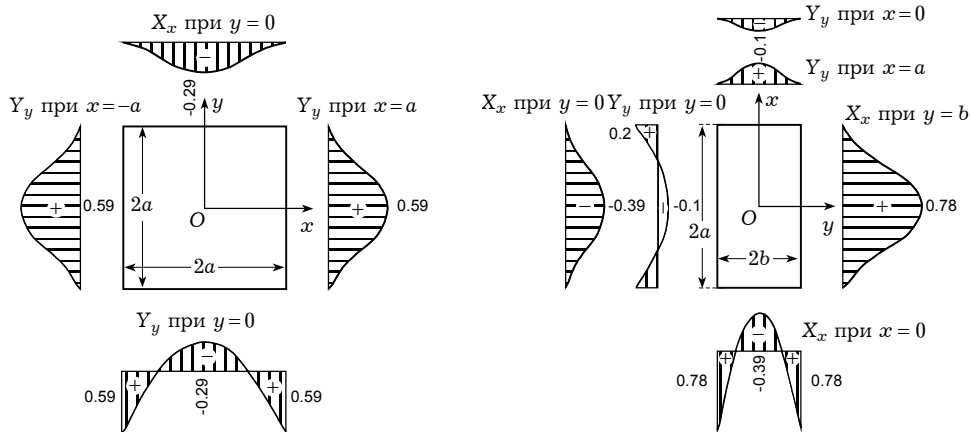


Рис. 1

Розшукуючи розв'язок цієї задачі відповідно до схеми (7), (8), функцію $F^{(T)}$ легко визначимо як

$$F^{(T)}(x, y) = S \frac{4a^2b^2}{\pi^2(a^2 + b^2)} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}, \quad S = CT_0. \quad (50)$$

Тоді граничні умови для бігармонічної функції F^* набувають вигляду

$$\begin{aligned} F^* &= 0, & \frac{\partial F^*}{\partial x} &= \pm S \frac{2ab^2}{\pi(a^2 + b^2)} \cos \frac{\pi y}{2b}, & x &= \pm a, & |y| &\leq b, \\ F^* &= 0, & \frac{\partial F^*}{\partial y} &= \pm S \frac{2a^2b}{\pi(a^2 + b^2)} \cos \frac{\pi x}{2a}, & y &= \pm b, & |x| &\leq a. \end{aligned} \quad (51)$$

Таким чином, задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності (2), (3) про навантаження прямокутника лише дотичними зусиллями

$$s(x) = S \frac{ab}{a^2 + b^2} \sin \frac{\pi x}{2a}, \quad t(y) = S \frac{ab}{a^2 + b^2} \sin \frac{\pi y}{2b},$$

причому тут $s(a) = t(b)$. Цю задачу можна розв'язати методом суперпозиції на основі подання (35) для функції напружень F^* .

Таблиця 4

x/a	$a = b$			$a = 2b$		
	$\sigma_x^{(1)}(x, b)/S$	$\sigma_x^{(2)}(x, b)/S$	$\sigma_x(x, b)/S$	$\sigma_x^{(1)}(x, b)/S$	$\sigma_x^{(2)}(x, b)/S$	$\sigma_x(x, b)/S$
0.00	0.59	0.63	0.64	0.78	0.71	0.72
0.25	0.52	0.55	0.56	0.69	0.65	0.65
0.50	0.33	0.36	0.35	0.44	0.46	0.46
0.75	0.11	0.13	0.09	0.15	0.18	0.17
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

У табл. 4 наведено розподіл нормального напруження σ_x на краю $y = b$ пластини, який отримано на основі першого і другого наближення методу Гальоркіна, а також методом суперпозиції при утриманні лише $M = 2$ та $L = 2$ членів (подальше збільшення кількості членів не вносить яких-небудь істотних змін в отриманих даних). З аналізу цих розрахунків випливає, що хоча різниця в обчисленнях для наближеного зображення при одному і трьох доданках у (47) сягає порядку 10%, друге наближення забезпечує надійні результати.

6. Заключні зауваження. Розглядаючи метод суперпозиції і деякі конкретні числові результати, отримані за його допомогою, можна стверджувати, що тільки після відповідної математичної обробки, викладеної вище, він є ефективним аналітичним підходом до розв'язування різних двовимірних бігармонічних граничних задач термопружності для прямокутника. Метод суперпозиції може бути застосований і для інших силових та теплових навантажень пружного прямокутника та прямокутної пластинки, включаючи навіть зосереджені джерела тепла і розривні навантаження [97]. Алгоритм покращеної редукції, який базується на асимптотичному законі для невідомих, дозволяє отримати надійні числові результати при використанні лише декількох перших доданків у рядах Фур'є. Хоча алгебраїчна робота може здаватися дещо громіздкою, кінцеві формули виявляються простими для проведення обчислень.

Обговорюючи свої результати про крутильну жорсткість пружного прямокутного стержня, отримані різними підходами, В. Томсон (майбутній лорд Кельвін) і П. Тейт [108] зробили цікаве зауваження про те, що «порівняння результатів дає чудові теореми чистої математики, що традиційно містяться лише в області аналізу або геометрії, замість того, щоб дозволити застосування у багатій і прекрасній області математичних істин на шляху фізичних досліджень».

Запропонований спосіб трактування нескінченних систем, отриманих з розгляду механічних двовимірних задач термопружності для прямокутника, забезпечує як надійний шлях одержання акуратного інженерного розв'язку, так і ряд цікавих математичних результатів.

Метод суперпозиції може бути з успіхом застосований і у випадку тривимірних задач про термопружну рівновагу скінченного циліндра [10, 20, 21] для оцінки локальних ефектів від нагрівання і можливості утворення тріщин. Однак поставлена Г. Ляме [89] більше ніж 150 років тому тривимірна задача про рівновагу пружного паралелепіпеда під дією поверхневих сил

(або нерівномірного нагрівання) усе ще є викликом для аналітичних методів сучасного аналізу. Варіаційні підходи і тут дозволили отримати [66, 67] інженерні формули для оцінки (теплових) напружень усередині тіла. При дослідженні цієї задачі методом суперпозиції основні труднощі полягають не в побудові виразів для напружень у вигляді трьох подвійних рядів Фур'є, а в знаходженні асимптотичної поведінки за подвійними індексами коефіцієнтів цих рядів. Ця класична задача і сьогодні чекає цілеспрямованих зусиль «молодих талановитих геометрів» (за термінологією Г. Ляме). Хочеться сподіватися, що в ХХІ столітті її буде цілком розв'язано, як це відбулося в ХХ столітті з великою теоремою Ферма, яка у середині ХІХ століття була запропонована Французькою Академією Наук поряд із задачею Г. Ляме на конкурс *Grand Prix de Mathématiques*.

1. Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика. – Ленинград–Москва: Гостехтеоретиздат, 1950. – Т. 1. – 900 с.
2. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 547 с.
3. Бондаренко П. С. К вопросу о единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Мат. сб. – 1951. – 29, № 2. – С. 403–418.
4. Бубнов И. Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды. – СПб.: Изд-во А. Э. Винеке, 1904. – 93 с.
5. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. – СПб.: Изд-во Мор. мин-ва, 1914. – Ч. 2. – С. 331–640.
6. Бубнов И. Г. Труды по теории пластин. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1953. – 423 с.
7. Галеркин Б. Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок // Вестн. инж. – 1915. – 1, № 19. – С. 897–908.
8. Гейтвуд Б. Е. Температурные напряжения применительно к самолетам, снарядам, турбинам и ядерным реакторам. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1959. – 350 с.
9. Григолюк Э. И. Метод Бубнова. Истоки. Формулировка. Развитие. – Москва: Изд-во Ин-та механики Моск. гос. ун-та, 1996. – 58 с.
10. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
11. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Краевая задача термоупругости для прямоугольной пластины // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1965. – Вып. 5. – С. 138–146.
12. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
13. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 1. – С. 12–34.
14. Данилевская В. И. Приложение вариационного начала Кастильяно к плоской задаче термоупругости // Прикл. механика. – 1968. – 4, № 12. – С. 33–40.
15. Канторович Л. В., Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. – Ленинград–Москва: ОНТИ НКТП, 1936. – 528 с.
16. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – 4-е изд. – Москва: Физматгиз, 1962. – 695 с.
17. Карнаузов В. Г., Сенченков И. К., Гуменюк Б. П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.
18. Коваленко А. Д. Пластины и оболочки в роторах турбомашин. – Киев: Изд-во АН УССР, 1955. – 304 с.
19. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины. – Москва: Физматгиз, 1959. – 294 с.
20. Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1965. – 204 с.
21. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
22. Коваленко А. Д. Термоупругость пластин и оболочек. – Киев: Изд-во КГУ, 1971. – 108 с.
23. Коваленко А. Д. Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
24. Коваленко А. Д. Избранные труды. – Киев: Наук. думка, 1976. – 764 с.

25. Коренев Б. Г. Задачи теории теплопроводности и термоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 400 с.
26. Коялович Б. М. Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка. – СПб.: Изд-во Имп. Акад. Наук, 1902. – 125 с.
27. Коялович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1930. – 3. – С. 41–167.
28. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики имеющих приложение в технических вопросах. – 3-е изд. – Ленинград: Изд-во АН СССР, 1933. – 432 с.
29. Крылов А. Н. Мысли и материалы о преподавании механики. – Москва–Ленинград: Изд-во АН СССР, 1943. – 73 с.
30. Ламе Г. Современная задача физико-математических наук // Рус. вестн. – 1862. – № 38. – С. 417–437.
31. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. – Ленинград–Москва: ОНТИ, 1937. – 110 с.
32. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1943. – 287 с.
33. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1955. – 492 с.
34. Лучка А. Ю., Лучка Т. Ф. Возникновение и развитие прямых методов математической физики. – Киев: Наук. думка, 1985. – 240 с.
35. Ляв А. Математическая теория упругости. – Москва–Ленинград: ОНТИ НКТП, 1935. – 674 с.
36. Майзель В. М. Температурная задача теории упругости. – Киев: Изд-во АН УССР, 1951. – 152 с.
37. Маслов Г. Н. Задача теории упругости о термоупругом равновесии // Изв. НИИ гидротехники. – 1938. – 23. – С. 130–219.
38. Мах Э. Механика: Историко-критический очерк ее развития. – Ижевск: Изд-во РХД, 2000. – 456 с.
39. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – Москва: Физматгиз, 1958. – 167 с.
40. Мелешко В. В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 45–68.
41. Мухелов Н. И. О тепловых напряжениях в плоской задаче теории упругости // Изв. Петроград. электротехн. ин-та. – 1916. – 13, № 1. – С. 23–37.
42. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – 4-е изд. – Москва: Изд-во АН СССР, 1954. – 648 с.
43. Новацкий В. Вопросы термоупругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 364 с.
44. Папкович П. Ф. Теория упругости. – Ленинград–Москва: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
45. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – Москва: Физматгиз, 1963. – 257 с.
46. Перельман Я. И. Метод Б. Г. Галеркина в вариационном исчислении и в теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1941. – 5, № 3. – С. 345–358.
47. Пистряков Д. Изгиб тонкой пластинки // Изв. Киев. политехн. ин-та. Отд. инж.-мех. – 1910. – 10, № 3. – С. 309–373.
48. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
49. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
50. Пратусевич Я. А. Вариационные методы в строительной механике. – Москва: Гостехиздат, 1948. – 400 с.
51. Путята Т. В., Фрадлин Б. М. Діяльність видатних механіків на Україні. – Київ: Держ. вид-во техн. літ. УРСР, 1952. – 267 с.
52. Тимошенко С. Применение нормальных координат к исследованию изгиба стержней и пластинок // Изв. Киев. политехн. ин-та. Отд. инж.-мех. – 1910. – 10, № 1. – С. 1–49.
53. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Часть I. – СПб.: Изд-во Ин-та инж. путей сообщ., 1914. – 239 с.
54. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Часть II. Стержни и пластинки. – Петроград: Изд-во Ин-та инж. путей сообщ., 1916. – 416 с.
55. Тимошенко С. П. Теория упругости. – Ленинград–Москва: ОНТИ, 1934. – 451 с.

56. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1948. – 460 с.
57. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов, с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1957. – 536 с.
58. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – 2-е изд. – Киев: Наук. думка, 1972. – 508 с.
59. Тимошенко С. Воспоминания. – Киев: Наук. думка, 1993. – 424 с.
60. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки – Москва: Наука, 1963. – 636 с.
61. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – 3-е изд. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
62. Трусделл К. Очерки по истории механики. – Москва–Ижевск: Изд-во ИКИ, 2002. – 316 с.
63. Фепль А., Фепль Л. Сила и деформация. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1933. – Т. 1. – 420 с.
64. Фепль А., Фепль Л. Сила и деформация. – Москва–Ленинград: ОНТИ НКТП, 1936. – Т. 2. – 408 с.
65. Филоненко-Бородич М. М. Об одной системе функций и ее приложениях в теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1946. – **10**, № 1. – С. 193–208.
66. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях // Прикл. математика и механика. – 1951. – **15**, № 2. – С. 137–148.
67. Филоненко-Бородич М. М. Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда // Прикл. математика и механика. – 1951. – **15**, № 5. – С. 563–574.
68. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. – New York: Dover, 1965. – 1046 p.
69. Biezeno C. B. Over een vereenvoudiging en over een uitbreiding van de methode van Ritz // Christiaan Huygens. – 1924. – **3**. – P. 69–75.
70. Biezeno C. B. Graphical and numerical methods for solving stress problems // Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech. (Delft, 22–26 April 1924). – Delft: Waltman, 1925. – P. 3–17.
71. Bruckman P. S. On the evaluation of certain infinite series by elliptic functions // Fibonacci Quart. – 1977. – **15**. – P. 293–310.
72. Conway H. D., Chow L., Morgan G. W. Analysis of deep beams // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1951. – **18**. – P. 163–172.
73. Conway H. D., Chow L., Morgan G. W. Analysis of deep beams (discussion) // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1951. – **18**. – P. 421–423.
74. Davis A. M. J. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: discussion of non-uniqueness // Proc. Roy. Soc. London. – 2003. – **A459**. – P. 409–412.
75. Dixon A. C. The problem of the rectangular plate // J. London Math. Soc. – 1934. – **9**. – P. 61–74.
76. Duhamel J. M. C. Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de la température dans les corps solides // Mém. Acad. Sci. Savans Étrang. – 1838. – **5**. – P. 440–498.
77. Fourier J. The analytical theory of heat. – New York: Dover, 1955. – 496 p.
78. Goodier J. N. Compression of rectangular blocks, and the bending of beams by non-linear distributions of bending forces // J. Appl. Mech. – 1932. – **54**. – P. 554–576.
79. Grattan-Guinness I., Ravetz J. R. Joseph Fourier 1768–1830. A survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat presented to the Institute de France in 1807. – Cambridge, MA: MIT Press, 1972. – 530 p.
80. Grosswald E. Comments on some formulae of Ramanujan // Acta Arithmet. – 1972. – **21**. – P. 25–34.
81. Hencky H. Der Spannungszustand in rechteckigen Platten. – München: Oldenbourg, 1913. – 97 S.
82. Hencky H. Über ein einfaches Näherungsverfahren zur Bestimmung des Spannungszustandes in rechteckig begrenzten Scheiben, auf deren Umfang nur Normalspannungen wirken // Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik / Eds O. Föppl, L. Föppl, L. Prandtl and H. Thoma. – Berlin: Springer, 1924. – S. 62–73.

83. *Horvay G.* The end problem of rectangular strips (discussion) // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1953. – **20**. – P. 576–582.
84. *Inglis C. E.* Two dimensional stresses in rectangular plates // *Engineering.* – 1921. – **112**. – P. 523–524.
85. *Inglis C. E.* Stresses in rectangular plates clamped at their edges and loaded with a uniformly distributed pressure // *Trans. Inst. Naval Arch.* – 1925. – **67**. – P. 147–165.
86. *Karman Th. von.* Tooling up mathematics for engineering // *Quart. Appl. Math.* – 1943. – **1**. – P. 2–6.
87. *Kovalenko A. D.* Thermoelasticity. Basic theory and applications. – Groningen: Wolters-Noordhoff, 1969. – 251 p.
88. *Krzywoblocki M. Z. von.* On the so-called principle of least work method // *Österreich. Ing.-Arch.* – 1951. – **5**. – P. 81–98.
89. *Lamé G.* Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. – Paris: Mallet-Bachelier, 1852. – 335 p.
90. *Lamé G.* Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. – Paris: Mallet-Bachelier, 1859. – 368 p.
91. *Love A. E. H.* Biharmonic analysis, especially in a rectangle, and its application to the theory of elasticity // *J. London Math. Soc.* – 1928. – **3**. – P. 144–156.
92. *Mathieu É.* Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$ et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide // *J. Math. Pures Appl. (Ser. 2)*. – 1869. – **14**. – S. 378–421.
93. *Mathieu É.* Mémoire sur l'équilibre d'élasticité d'un prisme rectangle // *J. École Polytech.* – 1881. – **30**, No. 49. – P. 173–196.
94. *Mathieu É.* Théorie de l'élasticité des corps solides. – Paris: Gauthier-Villars, 1890. – 181 p.
95. *Maxwell J. C.* On reciprocal diagrams in space, and their relation to Airy's function of stress // *Proc. London Math. Soc.* – 1868. – **2**. – P. 102–105.
96. *Maxwell J. C.* On the equilibrium of elastic solids // *Trans. Roy. Soc. Edinburgh.* – 1853. – **20**. – P. 87–120.
97. *Meleshko V. V.* Equilibrium of elastic rectangle: Mathieu–Inglis–Pickett solution revisited // *J. Elasticity.* – 1995. – **40**. – P. 207–238.
98. *Meleshko V. V.* Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // *Appl. Mech. Rev.* – 2003. – **56**. – P. 33–85.
99. *Meleshko V. V., Gomilko A. M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // *Proc. Roy. Soc. London.* – 1997. – **A453**. – P. 2139–2160.
100. *Meleshko V. V., Gomilko A. M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: further discussion // *Proc. Roy. Soc. London.* – 2004. – **A460**. – P. 807–819.
101. *Neuman F. E.* Die Geetze der Doppelbrechung des Lichtes in comprimierten oder ungleichförmig erwärmten uncrystallinischen Körpern // *Abhandl. Königl. Akad. Wissen. Berlin.* – 1841. – 2. Teil. – S. 1–254.
102. *Pickett G.* Application of the Fourier method to the solution of certain boundary problems in the theory of elasticity // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1944. – **11**. – P. 176–182.
103. *Reissner E.* Note on the theorem of the symmetry of the stress tensor // *J. Math. Phys.* – 1944. – **23**. – P. 192–193.
104. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik // *J. reine angew. Math.* – 1908. – **135**. – S. 1–61.
105. *Ritz W.* Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern // *Ann. Phys.* – 1909. – **28**. – S. 737–786.
106. *Schröder K.* Das Problem der eingespannten rechteckigen elastischen Platte. I. Die biharmonische Randwertaufgabe für das Rechteck // *Math. Ann.* – 1949. – **21**. – S. 247–326.
107. *Teodorescu P. P.* One hundred years of investigations in the plane problem of the theory of elasticity // *Appl. Mech. Rev.* – 1964. – **17**. – P. 175–186.
108. *Thomson W., Tait P. G.* Treatise on natural philosophy. – Cambridge: Cambridge University Press, 1883. – 606 p.
109. *Timoshenko S. P.* The approximate solution of two-dimensional problems in elasticity // *Phil. Mag. (Ser. 6)*. – 1924. – **47**. – P. 1095–1104.
110. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – 2-nd ed. – New York: McGraw-Hill, 1951. – 506 p.

ТЕПЛОВЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНАХ

Рассматривается классическая двумерная бигармоническая задача для прямоугольной области. Отражены некоторые аспекты истории проблемы. Метод суперпозиции оказывается эффективным при решении задач о термоупругом равновесии прямоугольника и термическом изгибе жестко зацементированной пластинки. Прослежена связь между математическим и инженерным подходами к решению таких задач. Приведены два типичных примера.

THERMAL STRESSES IN RECTANGULAR PLATES

This paper addresses the classical two-dimensional biharmonic problem for a rectangular domain. Some aspects of its history are outlined. The method of superposition is effective for solving the mechanical problems concerning thermoelastic equilibrium of an elastic rectangle and thermoelastic bending of a thin clamped rectangular elastic plate. Relations between mathematical and engineering approaches are considered. The method is illustrated by two typical examples.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
19.08.05