

**ДЕЯКІ ТИПИ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ У КОНУСІ З НЕОДНОРІДНІСТЮ
У ВИГЛЯДІ СФЕРИЧНОГО СЕГМЕНТА**

Шляхом сумісного застосування методу потенціалу й узагальненого методу Фур'є отримано розв'язок задачі про визначення електростатичного поля, створюваного зарядженим конусом і тонким сферичним сегментом, а також задачі про визначення поля напружень, створюваного абсолютно твердим сферичним сегментом, упаяним у пружне тверде тіло конічної форми, до якого прикладено обертовий момент. Обидві задачі зведено до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з нескінченно гладкими ядрами. У першій задачі виконано числовий аналіз цілності розподілу заряду на сферичному сегменті та ємності системи залежно від геометричних параметрів, а також наведено зображення екіпотенціальних поверхонь досліджуваного поля. У другій задачі чисельно розв'язано інтегральне рівняння та проведено аналіз залежності дотичних напружень на сегменті від геометричних параметрів.

Електростатичні, температурні та термopружні поля для однорідного конуса і простору з неоднорідністю у вигляді сферичного сегмента вивчалися рядом авторів різними підходами. Для дослідження полів переміщень при крученні однорідного конуса в роботах [6, 14] використовували інтегральне перетворення Мелліна сумісно з методом Вінера – Гопфа. Кручення пружного простору зі сферичним вирізом у роботі [13] вивчено методом Фур'є у тороїдних координатах за допомогою перетворення Мелера – Фока. У монографії [3] наведено розвинуті її авторами методи дослідження температурних і термopружних полів у просторі з розрізами, які базуються на теорії потенціалу. Пружний простір зі сферичним розрізом досліджували різними підходами (див. бібліографію у [10]). Напружено-деформований стан трансверсально-ізотропного порожнистого конуса розглянуто в роботі [5] на основі одного з варіантів асимптотичного методу, що спирається на однорідні розв'язки рівнянь анізотропної теорії пружності.

Із робіт, присвячених вивченню фізичних полів у канонічних тілах з неоднорідністю у вигляді сферичного сегмента, виділимо такі. Електростатичне поле сферичного сегмента, розміщеного поблизу конічного провідника, досліджував Я. С. Уфлянд [12, 11]. Для цього було використано метод парних рядів за функціями Лежандра з нецілими індексами. Цей підхід є, власне кажучи, однією з модифікацій методу однорідних розв'язків і може бути застосований тільки при однорідних умовах на поверхні конуса. Для дослідження задач теорії потенціалу для шару та циліндра зі сферичним сегментом використовували узагальнений метод Фур'є [2, 8]. При довільних умовах на границі області істотним недоліком такого підходу є те, що узагальнений метод Фур'є може бути застосованим тільки у випадку, коли повна сферична поверхня, до якої належить сферичний сегмент, не перетинається з границями шару та циліндра. Останнє обмеження є зумовлене самим методом, але не виправдано з фізичних міркувань. У роботі [7] за допомогою узагальненого методу Фур'є сумісно з методом потенціалу для півпростору та сферичного сегмента вдалося звільнитися від зазначених вище обмежень.

У цій роботі підхід, запропонований у [7], розвинуто на інший тип області. Його реалізація проілюстрована на прикладі визначення двох типів полів: електростатичного поля в системі сферичний сегмент – конус, а також поля переміщень при крученні пружного конуса твердим сферичним сегментом.

1. Розглянемо систему заряджених тіл, яка складається з тонкого сферичного сегмента Γ радіуса R з кутом розхилу 2β і конуса з кутом розхи-

лу 2α ($\alpha > \beta$). Вважаємо, що вершина конуса розміщена в центрі сферичного сегмента і розглядувана система тіл має осьову симетрію. Уведемо сферичну систему координат (r, θ, φ) з початком у вершині конуса та віссю Oz , що збігається з зазначеною віссю симетрії. Рівняння конічної поверхні тоді запишеться у вигляді $\theta = \alpha$. Потенціал u електростатичного поля розглядуваної системи тіл є розв'язком такої крайової задачі для рівняння Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad \{0 \leq \theta < \alpha, \quad 0 < r < \infty\} \setminus \Gamma, \quad (1)$$

$$u(r, \alpha) = v_1(r), \quad 0 < r < \infty, \quad u|_{\Gamma} = v_2(\theta), \quad 0 \leq \theta < \beta, \quad (2)$$

де $v_1(r)$, $v_2(\theta)$ – заданий осесиметричний розподіл потенціалу на поверхні конуса та на сегменті.

Розв'язок крайової задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді

$$u(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\tau\right) r^{-1/2+i\tau} P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta) d\tau + \\ + \frac{R^2}{4\pi} \int_0^{\beta} f(\theta_1) \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \gamma + R^2}} d\theta_1, \quad (3)$$

де A , f – шукані функції; $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$; $P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta)$ – функція конуса; $\Gamma(x)$ – гамма-функція.

Для фундаментального розв'язку рівняння Лапласа за умови $\theta > \theta_1$ справджується така формула додавання, що виражає його через базисні гармонічні функції для конуса:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \gamma + R^2}} = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(m(\varphi - \varphi_1))}{1 + \delta_{m0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(r/R)^{i\tau}}{\sqrt{rR} \operatorname{ch}(\pi\tau)} P_{-1/2+i\tau}^{-m}(-\cos \theta) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta_1) d\tau, \quad (4)$$

де δ_{mk} – символ Кронекера. Доведення рівності (4) базується на обчисленні контурного інтеграла від підінтегральної функції у комплексній τ -площині із застосуванням теорії лишків. Почленним інтегруванням останньої формули за змінною φ_1 внутрішній інтеграл у (3) перетворюємо до вигляду

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \gamma + R^2}} = \\ = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(r/R)^{i\tau}}{\sqrt{rR} \operatorname{ch}(\pi\tau)} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta) P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta_1) d\tau.$$

Підставивши цей результат у (3) і задовольнивши граничну умову на поверхні конуса з використанням формули обернення перетворення Мелліна, отримаємо

$$\frac{1}{4 \operatorname{ch}(\pi\tau)} R^{-1/2-i\tau} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \alpha) \int_0^{\beta} f(\theta_1) P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta_1) R^2 \sin \theta_1 d\theta_1 + \\ + A(\tau) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\tau\right) P_{-1/2+i\tau}(\cos \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} v_1(r) r^{-1/2-i\tau} dr. \quad (5)$$

При цьому потенціал конуса задовольняє умову $v_1(r) r^{-1/2} \in L(0, \infty)$.

Виключаючи невідому функцію $A(\tau)$ із (3) за допомогою (5), потенціал подамо у вигляді

$$\begin{aligned}
u(r, \theta) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r^{-1/2+i\tau} \frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \alpha)} \int_0^{\infty} v_1(x) x^{-1/2-i\tau} dx d\tau - \\
& - \frac{R}{4} \int_0^{\beta} f(\theta_1) \sin \theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\tau)} \left(\frac{r}{R}\right)^{-1/2+i\tau} \frac{P_{-1/2+i\tau}(-\cos \alpha)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \alpha)} \times \\
& \times P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta) P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta_1) d\tau d\theta_1 + \\
& + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\beta} f(\theta_1) R^2 \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \gamma + R^2}} d\theta_1. \quad (6)
\end{aligned}$$

Із формули (6) випливає, що для того щоб потенціал задовольняв граничну умову на сегменті, щільність розподілу заряду на ньому повинна бути розв'язком інтегрального рівняння

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{f(M_1)}{r_{MM_1}} d\sigma_1 = g(\theta), \quad M(R, \theta) \in \Gamma, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned}
g(\theta) = & \frac{R}{4} \int_0^{\beta} \mathcal{K}(\theta, \omega) f(\omega) \sin \omega d\omega + v_2(\theta) - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R^{-1/2+i\tau} \frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \alpha)} \tilde{v}_1(\tau) d\tau, \\
\mathcal{K}(\theta, \omega) = & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(\pi\tau)} \frac{P_{-1/2+i\tau}(-\cos \alpha)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \alpha)} P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta) P_{-1/2+i\tau}(\cos \omega) d\tau, \\
\tilde{v}_1(\tau) = & \int_0^{\infty} v_1(x) x^{-1/2-i\tau} dx.
\end{aligned}$$

Запишемо інтеграл з лівої частини рівняння (7) у вигляді ряду за сферичними функціями, використовуючи розвинення

$$\frac{1}{r_{MM_1}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2Rr \cos \gamma + R^2}} = \begin{cases} \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos \gamma), & r < R, \\ \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma), & r > R. \end{cases}$$

Після заміни $P_n(\cos \gamma)$ за формулою додавання для функцій Лежандра [1]

$$\begin{aligned}
P_n(\cos \gamma) = & P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta_1) + \\
& + 2 \sum_{m=1}^n (-1)^m P_n^{-m}(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta_1) \cos(m(\varphi - \varphi_1))
\end{aligned}$$

та інтегрування $\frac{1}{r_{MM_1}}$ за змінною φ_1 у проміжку від 0 до 2π для потенціалу простого шару одержуємо вираз

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{f(M_1)}{r_{MM_1}} d\sigma_1 = & \frac{R}{2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \int_0^{\beta} f(\theta_1) P_n(\cos \theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1, \\
& M(R, \theta) \in \Gamma. \quad (8)
\end{aligned}$$

Застосуємо до функції $f(\theta)$ формулу перетворення типу дробового інтегрування з показником $1/2$ [9]:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\beta} \frac{f(t) \sin t}{\sqrt{\cos u - \cos t}} dt.$$

Зазначимо, що обернене перетворення задається формулою типу дробового диференціювання з тим самим показником:

$$f(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{\pi} \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \int_0^\beta \frac{\varphi(t) \sin t}{\sqrt{\cos \theta - \cos t}} dt. \quad (9)$$

Безпосереднім обчисленням можна переконатися, що інтеграл у формулі (8) при такому перетворенні трансформується до вигляду

$$\int_0^\beta f(\theta_1) P_n(\cos \theta_1) \sin \theta_1 d\theta_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\beta \varphi(t) \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] dt.$$

Враховуючи формулу (7), запишемо

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right] = \begin{cases} [2(\cos t - \cos \theta)]^{-1/2}, & t < \theta, \\ 0, & t > \theta. \end{cases}$$

Тоді потенціал простого шару у формулі (8) можна подати у вигляді інтеграла

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} \frac{f(M_1)}{r_{MM_1}} d\sigma_1 = \frac{R}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\theta \frac{\varphi(t)}{\sqrt{\cos t - \cos \theta}} dt.$$

Таким чином, інтегральне рівняння (7) перетворено до рівняння

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta \frac{\varphi(t)}{\sqrt{\cos t - \cos \theta}} dt = \frac{2}{R} g(\theta), \quad 0 \leq \theta < \beta. \quad (10)$$

Функцію $\varphi(t)$ з (10) виразимо через $g(\theta)$ за формулою, аналогічною до (9):

$$\varphi(t) = \frac{2}{R} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(\theta) \sin \theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos t}} dt.$$

Підставимо $g(\theta)$ із (7) і виразимо праву частину останньої формули через $\varphi(t)$, використовуючи формулу (9). Після деяких обчислень одержуємо таке інтегральне рівняння Фредгольма відносно функції $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) - \int_0^\beta \mathcal{G}(t, u) \varphi(u) du = \varphi_0(t), \quad t \in [0, \beta], \quad (11)$$

де

$$\mathcal{G}(t, u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{ch}(\tau t) \text{ch}(\tau u)}{\text{ch}(\pi \tau)} \frac{P_{-1/2+i\tau}(-\cos \alpha)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \alpha)} d\tau, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) = & \frac{2}{\sqrt{\pi} R} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{v_2(\theta) \sin \theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos t}} d\theta - \\ & - \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} R^{-1/2+i\tau} \frac{\text{ch}(\tau t)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \alpha)} \tilde{v}_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Зауважимо, що з асимптотики функції Лежандра при $\tau \rightarrow \infty$ випливає, що невластний інтеграл у формулі (12) сходиться абсолютно при $t \leq \beta < \alpha$, $u \leq \beta < \alpha$, і ядро $\mathcal{G}(t, u)$ інтегрального рівняння (11) є нескінченно диференційовною функцією у квадраті $[0, \beta] \times [0, \beta]$. Цікаво відмітити, що ядро (12) збігається з ядром інтегрального рівняння, отриманого в [11] іншим методом. У випадку $\alpha = \frac{\pi}{2}$, коли конус перетворюється у півпростір, ядро (12) обчислюється явно:

$$\mathcal{G}(t, u) = \frac{1}{2\pi} \left[\sec \left(\frac{t+u}{2} \right) + \sec \left(\frac{t-u}{2} \right) \right].$$

Другий доданок у рівності (13) є нескінченно диференційовною функцією. Тому клас правих частин інтегрального рівняння (11) визначається класом функції $v_2(\theta)$. Так, наприклад, якщо $v_2(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(\cos \theta)$, то $\varphi_0(t) \in C^\infty[0, \beta]$.

Надалі будемо вважати, що тіла, які розглядаються, є провідниками і $v_1 = 0$, $v_2 = u_0 = \text{const}$. Відмітимо, що усі характеристики досліджуваного електростатичного поля безпосередньо виражаються через розв'язок $\varphi(t)$ інтегрального рівняння (11). Насамперед, формула (9) відновлює щільність розподілу заряду на сегменті. З неї безпосередньо випливає вираз для ємності сегмента за наявності заземленого конуса:

$$C = 4R \int_0^\beta \tilde{\varphi}(t) \cos \frac{t}{2} dt,$$

де $\tilde{\varphi}(t)$ – розв'язок рівняння (11) з нормованою правою частиною, яка дорівнює $2 \cos \frac{t}{2}$. За відсутності конуса одержуємо $\tilde{\varphi}(t) = 2 \cos \frac{t}{2}$, $\frac{C}{4\pi R} = \frac{R}{\pi}(\beta + \sin \beta)$, що збігається з відомим значенням ємності сферичного сегмента [4]. У загальному випадку ємність визначали після чисельного розв'язання інтегрального рівняння. Результати обчислень $\frac{C}{4\pi R}$ при різних α і β зведено в табл. 1. В останньому рядку для порівняння наведено результати для сферичного сегмента без конуса.

Таблиця 1

$\alpha \backslash \beta$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\pi/3$	0.45	0.87	–	–
$\pi/2$	0.39	0.65	0.97	–
$2\pi/3$	0.37	0.58	0.80	1.35
	0.33	0.48	0.61	0.82

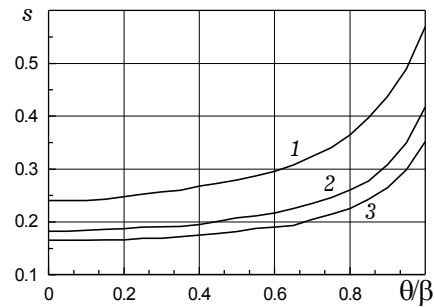


Рис. 1

З аналізу даних табл. 1 випливає, що зі збільшенням кута розхилу конуса ємність падає, а зі збільшенням кута розхилу сегмента – зростає.

На рис. 1 наведено графіки розподілу щільності заряду на сегменті для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ і значень $\beta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ (відповідно криві 1–3). При підході до границі сегмента щільність розподілу заряду, зростаючи, прямує до нескінченності, що відповідає кореневій особливості у функції $f(\theta)$ при $\theta \rightarrow \beta$. Звернемо увагу на те, що характер зміни щільності розподілу заряду на сегменті не залежить від кута розхилу сегмента при постійному куті розхилу конуса.

На рис. 2 (для $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$) і рис. 3 (для $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$) наведено еквіпотенціальні поверхні системи сферичний сегмент – конус (кривим 1–3 відповідають значення потенціалу $4\pi \frac{u}{u_0} = 0.9, 0.6, 0.4$).

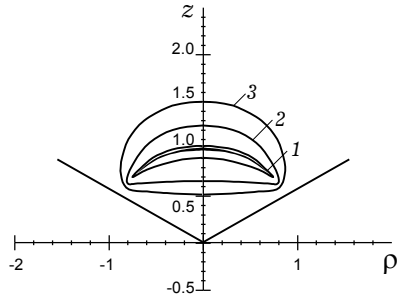


Рис. 2

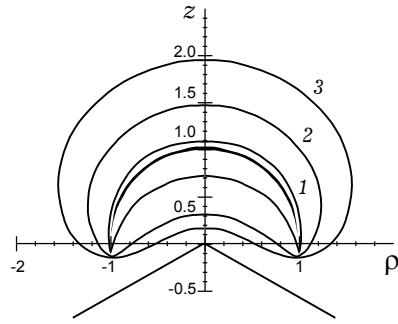


Рис. 3

2. Розглянемо задачу кручення конуса обертовим моментом, прикладеним до абсолютно твердого сферичного сегмента, зчепленого з конусом. Границя конуса вважається закріпленою. Поле переміщень U_φ у розглянутій задачі задовольняє такі умови:

$$\Delta U_\varphi = \frac{U_\varphi}{\rho^2}, \quad \{0 \leq \theta < \alpha, 0 < r < \infty\} \setminus \Gamma, \quad (14)$$

$$u(r, \alpha) = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad u|_\Gamma = U_\varphi(R, \theta) = \varepsilon R \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < \beta, \quad (15)$$

де ε – кут закручування сегмента.

Розв'язок крайової задачі (14), (15) будемо шукати у вигляді

$$u(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\tau\right) r^{-1/2+i\tau} P_{-1/2+i\tau}^{(1)}(\cos \theta) d\tau + \int_0^\beta f(\theta_1) R^2 \sin \theta_1 \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi - \varphi_1) d\varphi_1}{\sqrt{r^2 - 2rR \cos \gamma + R^2}} d\theta_1. \quad (16)$$

Тут використано позначення, наведені у формулі (3). Після перетворень, аналогічних до описаних вище, одержуємо таку систему рівнянь щодо невідомих функцій:

$$\frac{\pi}{\operatorname{ch}(\pi\tau)} R^{-1/2-i\tau} P_{-1/2+i\tau}^{(1)}(-\cos \alpha) \int_0^\beta f(\theta_1) P_{-1/2+i\tau}^{(-1)}(\cos \theta_1) R^2 \sin \theta_1 d\theta_1 + A(\tau) \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\tau\right) P_{-1/2+i\tau}^{(1)}(\cos \alpha) = 0, \quad (17)$$

$$\iint_\Gamma \frac{f(\theta_1) \cos(\varphi - \varphi_1)}{r_{MM_1}} d\sigma_{M_1} \Big|_{M \in \Gamma} = g(\theta) + \varepsilon R \sin \theta, \quad (18)$$

де

$$g(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi R}{\operatorname{ch} \pi\tau} \frac{P_{-1/2+i\tau}^{(-1)}(-\cos \alpha)}{P_{-1/2+i\tau}^{(1)}(\cos \alpha)} P_{-1/2+i\tau}^{(1)}(\cos \theta) \int_0^\beta f(\theta_1) P_{-1/2+i\tau}^{(1)}(\cos \theta_1) d\theta_1 d\tau.$$

Використовуючи техніку розв'язування парних інтегральних рівнянь у вигляді рядів за функціями Лежандра, після деяких перетворень рівняння (18) запишемо як

$$\frac{d}{d\theta} \int_0^\theta \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{2(\cos t - \cos \theta)}} = g(\theta) + \varepsilon R \sin \theta, \quad 0 \leq \theta < \beta,$$

де $\varphi(t)$ – нова невідома функція, зв'язана з $f(\theta)$ формулою

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi R} \frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \int_0^\beta \frac{\varphi(t) \sin t}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos t)}} dt \right\}.$$

За допомогою (7) функцію $\varphi(t)$ виразимо через $g(\theta)$:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sin \theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos t)}} \int_0^\theta g(u) du d\theta + \frac{2}{\pi} \varepsilon R \left[c \cos \frac{t}{2} - \cos \frac{3}{2} t \right].$$

Підставивши $g(\theta)$ із (18) і виразивши праву частину останньої формули через $\varphi(t)$, після перетворень одержимо таке інтегральне рівняння Фредгольма для функції $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) - \int_0^\beta \mathcal{K}(t, u) \varphi(u) du = f_0(t), \quad t \in [0, \beta], \quad (19)$$

де

$$\mathcal{K}(t, u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{ch}(\tau u) \left(\text{ch}(\tau t) \cos \frac{\beta}{2} - \text{ch}(\tau \beta) \cos \frac{t}{2} \right) P_{-1/2+i\tau}^{(1)}(-\cos \alpha)}{\text{ch}(\pi \tau) \cos \frac{\beta}{2} P_{-1/2+i\tau}^{(1)}(\cos \alpha)} d\tau,$$

$$f_0(t) = \frac{2}{\pi} \varepsilon R \frac{\cos \frac{3}{2} t \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{3}{2} \beta \cos \frac{t}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}.$$

Зауважимо, що ядро $\mathcal{K}(t, u)$ інтегрального рівняння (19) має ті самі властивості, що й ядро $\mathcal{G}(t, u)$, розглянуте вище.

Значення дотичних напружень на поверхні сферичного сегмента визначаємо за формулою

$$\tau_{r\varphi} = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\varphi}{r} \right),$$

де G – модуль пружності матеріалу конуса.

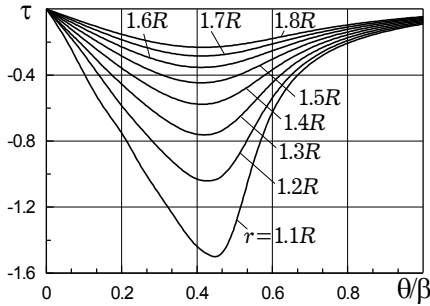


Рис. 4

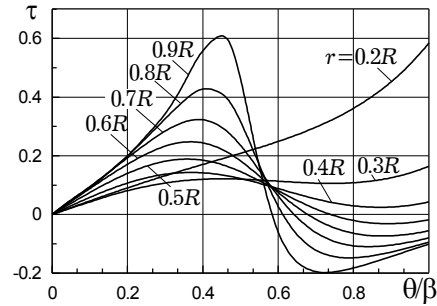


Рис. 5

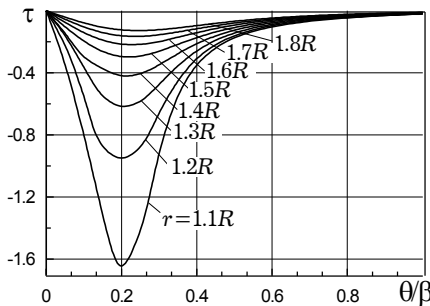


Рис. 6

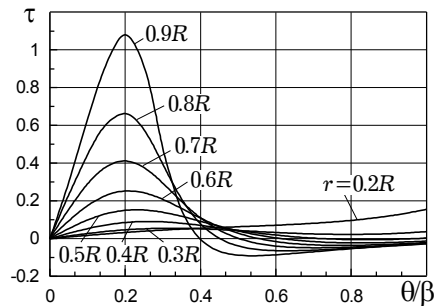


Рис. 7

На рис. 4–7 наведено графіки розподілу дотичних напружень при значеннях $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ (рис. 4, 5) та $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$ (рис. 6, 7).

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1973. – 294 с.
2. Ерофеев В. Т., Шушкевич Г. Ч. Об одной краевой задаче для цилиндра с неполным сферическим включением // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1983. – № 1. – С. 38–43.
3. Кит Г. С. Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 288 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – Москва: Наука, 1982. – 620 с.
5. Мехтиев М. Ф., Сардарова Н. А., Фомина Н. И. Асимптотическое поведение решения осесимметричной задачи теории упругости для трансверсально-изотропного полого конуса // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2003. – № 2. – С. 61–70.
6. Нуллер Б. М. К смешанной задаче о кручении упругого конуса // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1967. – № 4. – С. 146–151.
7. Проценко В. С. О расширении возможностей обобщенного метода Фурье решения краевых задач // Методы мат. физики и их прил. – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1988. – С. 3–7.
8. Проценко В. С., Николаев А. Г. Электростатическое поле незамкнутой сферической оболочки, расположенной между двумя параллельными проводящими плоскостями // Журн. техн. физики. – 1983. – 53, № 3. – С. 423–427.
9. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. – Москва: Наука, 1976. – 494 с.
10. Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 342 с.
11. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
12. Уфлянд Я. С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов // Письма в ЖТФ. – 1976. – 2, вып. 17. – С. 794–798.
13. Уфлянд Я. С., Меленковская Е. С. Кручение упругого пространства, ослабленного сферическим разрезом // Прикл. механика. – 1971. – 7, № 2. – С. 111–114.
14. Low R. D. On the torsion of an elastic cone as a mixed boundary-value problem // Quart. J. Mech. and Appl. Math. – 1966. – 19, No. 1. – P. 57.

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В КОНУСЕ С НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В ВИДЕ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

Путем совместного применения метода потенциала и обобщенного метода Фурье получено решение задачи об определении электростатического поля, создаваемого заряженными конусом и тонким сферическим сегментом и задачи об определении поля напряжений, создаваемого абсолютно твердым сферическим сегментом, впаиваемым в упругое твердое тело конической формы, к которому приложен крутящий момент. Обе задачи сведены к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с бесконечно гладкими ядрами. В первой задаче выполнен численный анализ плотности распределения заряда на сферическом сегменте и емкости системы в зависимости от геометрических параметров. Представлены изображения эквипотенциальных поверхностей исследуемого поля. Во второй задаче выполнено численное решение интегрального уравнения и проведен численный анализ касательных напряжений на сегменте в зависимости от геометрических параметров.

SOME TYPES OF PHYSICAL FIELDS IN THE CONE WITH HETEROGENEITY AS A SPHERICAL SEGMENT

By joined application of the method of potential and Fourier generalized method the problem on definition of the electrostatic field, formed by the charged cone and a thin spherical segment and also the problem on definition of the stress field, formed by absolutely hard spherical segment, sealed in an elastic solid of conic form, to which a twisting moment is applied, is solved. Both problems are reduced to the integral second kind Fredholm equations with indefinitely smooth kernels. In the first problem the numerical analysis of distribution density of charge on a spherical segment and capacity of the system versus the geometrical parameter is given. Images of equipotential surfaces in the researched field are presented. In the second one the numerical solution of the integral equation is made, on the basis of which the numerical analysis of tangential stresses in the segment versus the geometrical parameters is carried out.