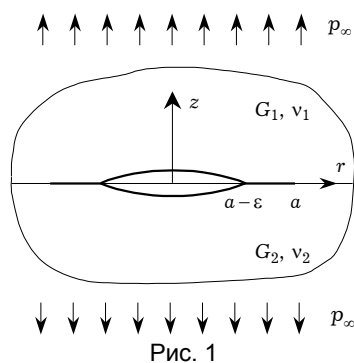


КРУГОВА МІЖФАЗНА ТРІЩИНА ЗА УМОВИ ФРИКЦІЙНОГО КОНТАКТУ ПОВЕРХОНЬ

Розглянуто напружений стан двох жорстко з'єднаних між собою пружних півпросторів із різних матеріалів, на межі розділу яких розміщена кругова тріщина. Враховано контакт поверхонь тріщини поблизу її контуру та сили тертя в області контакту. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа розв'язок інтегрального рівняння задачі отримано в замкненій формі. Визначено в явному вигляді довжину області контакту поверхонь тріщини, розподіл напружень в області контакту та на межі розділу півпросторів поза тріщиною.

У задачах про рівновагу пружних тіл із тріщинами, які розміщені на межі середовищ із різних матеріалів, має місце осциляція напружень і переміщень в околі вершин тріщини [17]. Осцилюючі розв'язки не можна вважати фізично коректними, оскільки спостерігається взаємне проникнення середовищ поблизу вершин тріщини. У роботах М. Комніоу, огляд яких наведено в [1], для знаходження коректних розв'язків запропоновано вводити малі зони контакту берегів тріщини поблизу її вершин. При цьому чисельно досліджено моделі гладкого та фрикційного контакту. Аналітичні розв'язки для міжфазної тріщини в однорідному полі напружень були одержані в [8, 13]. У роботах [14–16] одержано розв'язки в замкненій формі для тріщини з однією зоною контакту між різнорідними ізотропними, ортотропними та п'єзоелектричними матеріалами. У [12] визначено аналітичний розв'язок для системи міжфазних тріщин у полі зосереджених сил та моментів і чисельно проаналізовано випадок однієї тріщини з урахуванням тільки однієї зони контакту. У роботах [5–7, 9, 10] відповідно з моделями гладкого та фрикційного контакту отримано точні розв'язки задач для напівнескінченної та скінченної міжфазної тріщини у випадку дії нормальних зосереджених сил, прикладених до берегів тріщини. У всіх згаданих роботах розглядалися задачі плоскої деформації. Нижче в рамках фрикційної моделі контакту у замкненому вигляді дається розв'язок осесиметричної контактної задачі для кругової тріщини, яка розміщена на межі розділу двох півпросторів із різних матеріалів. Без урахування контакту поверхонь тріщини розв'язок цієї задачі, справедливий поза ε -околом контуру тріщини, отримано в роботі [3].

Постановка задачі. Інтегральне рівняння. У циліндричній системі координат (r, φ, z) розглянемо два півпростори $z \geq 0$, $z \leq 0$ з модулями зсуву G_1 , G_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 відповідно, між якими в круговій області $r < a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ їх межі $z = 0$ розміщена плоска тріщина. Поза тріщиною, $r \geq a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, півпростори жорстко з'єднані між собою вздовж своєї межі $z = 0$ (рис. 1). На нескінченності прикладено розтягуюче навантаження p_∞ . Згідно з моделлю М. Комніоу вважаємо, що біля контуру $r = a$, $z = 0$ тріщини виникає кільцева область контактного тиску $a - \varepsilon \leq r < a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $z = 0$ поверхонь тріщини $r < a$, $z = \pm 0$. Припускаємо, що в області контакту спостерігається взаємне проковзування поверхонь тріщини, так що нормальний тиск і дотичні зусилля підпо-



рядковані закону тертя Амонтона (Кулона). Ширина ε кільцевої області контакту заздалегідь невідома і має бути визначена при розв'язуванні задачі.

У півпросторах виникає напружено-деформований стан, симетричний відносно осі Oz . Змішані крайові умови на межі розділу півпросторів є такими:

$$u_z^{(1)}|_{z=0} = u_z^{(2)}|_{z=0}, \quad u_r^{(1)}|_{z=0} = u_r^{(2)}|_{z=0}, \quad r \geq a, \quad (1)$$

$$\sigma_z^{(1)}|_{z=0} = \sigma_z^{(2)}|_{z=0}, \quad \tau_{rz}^{(1)}|_{z=0} = \tau_{rz}^{(2)}|_{z=0}, \quad r \geq a, \quad (2)$$

$$u_z^{(1)}|_{z=0} = u_z^{(2)}|_{z=0}, \quad a - \varepsilon \leq r < a, \quad (3)$$

$$\tau_{rz}^{(j)}|_{z=0} = -\mu_0 \sigma_z^{(j)}|_{z=0}, \quad j = 1, 2, \quad a - \varepsilon \leq r < a, \quad (4)$$

$$\sigma_z^{(j)}|_{z=0} = 0, \quad \tau_{rz}^{(j)}|_{z=0} = 0, \quad j = 1, 2, \quad r < a - \varepsilon, \quad (5)$$

де верхній індекс ⁽¹⁾ відповідає півпростору $z \geq 0$, індекс ⁽²⁾ – півпростору $z \leq 0$; μ_0 – коефіцієнт тертя. Знак при μ_0 у формулі (4) вибрано за припущення, що для тангенціальних переміщень в області контакту з проковзуванням виконується умова

$$\Delta u = u_r^{(1)}|_{z=0} - u_r^{(2)}|_{z=0} > 0, \quad a - \varepsilon \leq r < a, \quad (6)$$

яку необхідно перевірити після розв'язання задачі.

Розв'язок задачі на межі півпросторів ($z = 0$) подамо через чотири гармонічні функції $\Phi_2^{(1)}$, $\Phi_3^{(1)}$, $\Phi_2^{(2)}$, $\Phi_3^{(2)}$ [11]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r^{(j)}) &= \frac{\partial \Phi_3^{(j)}}{\partial z}, & u_z^{(j)} &= (3 - 4\nu_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}, \\ \frac{1}{2G_j} \sigma_z^{(j)} &= \frac{P_\infty}{2G_j} + \frac{\partial}{\partial z} [2(1 - \nu_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}], \\ \frac{1}{2G_j} \tau_{rz}^{(j)} &= \frac{\partial}{\partial r} [(1 - 2\nu_j) \Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}], & j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Від циліндричних координат r, z, φ перейдемо до тороїдних координат α, β, φ за формулами

$$r = a \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}, \quad z = a \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta}. \quad (8)$$

При цьому в площині $z = 0$ круг $r < a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ у нових координатах задається рівністю $\beta = 0$, а зовнішня частина круга $r > a$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ – рівностями $\beta = \pi$ і $\beta = -\pi$ для верхнього та нижнього півпросторів відповідно ($-\infty < \alpha < \infty$). Інтегральні зображення для гармонічних функцій $\Phi_m^{(j)}$ у тороїдних координатах у випадку осьової симетрії мають вигляд інтегралів Мелера – Фока [11]:

$$\begin{aligned} \Phi_m^{(j)}(\alpha, \beta) &= \\ &= \sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta} \int_0^\infty [A_m^{(j)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \beta + B_m^{(j)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda \beta] P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} \alpha) d\lambda, \end{aligned} \quad (9)$$

де $A_m^{(j)}(\lambda)$, $B_m^{(j)}(\lambda)$ – невідомі функції, $m = 2, 3$, $j = 1, 2$; $P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} \alpha)$ – функція Лежандра першого роду.

Запишемо крайові рівності (1), (2), (4), (5) через гармонічні функції $\Phi_m^{(j)}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 (-1)^j [(3 - 4v_j)\Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Big|_{\beta=(-1)^{j+1}\pi} = 0, \\
& \sum_{j=1}^2 (-1)^j \frac{\partial \Phi_3^{(j)}}{\partial \beta} \Big|_{\beta=(-1)^{j+1}\pi} = 0, \\
& \sum_{j=1}^2 (-1)^j G_j \frac{\partial}{\partial \beta} [2(1 - v_j)\Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Big|_{\beta=(-1)^{j+1}\pi} = 0, \\
& \sum_{j=1}^2 (-1)^j G_j [(1 - 2v_j)\Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Big|_{\beta=(-1)^{j+1}\pi} = 0, \quad 0 \leq \alpha < \infty, \\
& \frac{\partial}{\partial \beta} [2(1 - v_j)\Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Big|_{\beta=0} = \\
& \quad = -\frac{ap_\infty}{2G_j(\operatorname{ch} \alpha + 1)} + \begin{cases} 0, & 0 < \alpha < \alpha_0, \\ -\frac{G_1}{G_j} \frac{a\sigma(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha + 1}, & \alpha_0 \leq \alpha < \infty, \end{cases} \\
& [(1 - 2v_j)\Phi_2^{(j)} - \Phi_3^{(j)}] \Big|_{\beta=0} = \\
& \quad = \begin{cases} -\frac{G_1}{G_j} \mu_0 a \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\xi)}{\operatorname{ch} \xi + 1} d\xi, & 0 < \alpha < \alpha_0, \\ -\frac{G_1}{G_j} \mu_0 a \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sigma(\xi)}{\operatorname{ch} \xi + 1} d\xi, & \alpha_0 \leq \alpha < \infty, \end{cases} \quad j = 1, 2. \quad (10)
\end{aligned}$$

При цьому введено позначення невідомої функції контактних напружень

$$\sigma(\alpha) = -\frac{1}{2G_1} \sigma_z^{(1)} \Big|_{z=0}, \quad \alpha_0 \leq \alpha < \infty, \quad a - \varepsilon \leq r < a, \quad (11)$$

значення $\alpha = \alpha_0$ відповідає точці $r = a - \varepsilon$, тобто $a - \varepsilon = a \operatorname{th}(\alpha_0/2)$.

Виконавши обернене перетворення інтегралів Мелера – Фока після підстановки в (10) виразів (9) для гармонічних функцій $\Phi_m^{(j)}$, отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення функцій $A_m^{(j)}(\lambda)$, $B_m^{(j)}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \{ A_3^{(j)}(\lambda) \operatorname{sh} \pi \lambda + (-1)^{j+1} B_3^{(j)}(\lambda) \operatorname{ch} \pi \lambda \} = 0, \\
& \sum_{j=1}^2 \{ (-1)^{j+1} [(3 - 4v_j)A_2^{(j)}(\lambda) - A_3^{(j)}(\lambda)] \operatorname{ch} \pi \lambda + \\
& \quad + [(3 - 4v_j)B_2^{(j)}(\lambda) - B_3^{(j)}(\lambda)] \operatorname{sh} \pi \lambda \} = 0, \\
& \sum_{j=1}^2 G_j \{ (-1)^{j+1} [2(1 - v_j)A_2^{(j)}(\lambda) - A_3^{(j)}(\lambda)] \operatorname{sh} \pi \lambda + \\
& \quad + [2(1 - v_j)B_2^{(j)}(\lambda) - B_3^{(j)}(\lambda)] \operatorname{ch} \pi \lambda \} = 0,
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^2 G_j \{ (-1)^{j+1} [(1-2\nu_j)A_2^{(j)}(\lambda) - A_3^{(j)}(\lambda)] \operatorname{ch} \pi\lambda + \\ + [(1-2\nu_j)B_2^{(j)}(\lambda) - B_3^{(j)}(\lambda)] \operatorname{sh} \pi\lambda \} = 0, \\ (1-2\nu_j)A_2^{(j)}(\lambda) - A_3^{(j)}(\lambda) = a_j(\lambda, \sigma), \\ 2(1-\nu_j)B_2^{(j)}(\lambda) - B_3^{(j)}(\lambda) = b_j(\lambda, \sigma), \quad j = 1, 2, \quad (12)$$

де

$$a_j(\lambda, \sigma) = -\frac{G_1}{G_j} \sqrt{2} \mu_0 a \lambda \operatorname{th} \pi\lambda \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\xi)}{\operatorname{ch} \xi + 1} d\xi \int_0^{\xi} \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} \eta) d\eta, \\ b_j(\lambda, \sigma) = -\frac{p_{\infty}}{2G_j} \frac{a \sqrt{2} \lambda}{\operatorname{ch} \pi\lambda} - \\ -\frac{G_1}{G_j} \sqrt{2} a \operatorname{th} \pi\lambda \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{\sigma(\xi)}{\operatorname{ch} \xi + 1} \operatorname{sh} \frac{\xi}{2} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} \xi) d\xi, \quad j = 1, 2.$$

Інтегральне рівняння для визначення невідомої функції контактних напружень отримаємо з крайової умови (3) на нормальні переміщення в області контакту, яку запишемо у вигляді ($\alpha_0 \leq \alpha < \infty$)

$$\int_0^{\infty} \left[(1-\nu_1)A_2^{(1)}(\lambda) - (1-\nu_2)A_2^{(2)}(\lambda) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} a_1(\lambda, \sigma) - \frac{1}{2} a_2(\lambda, \sigma) \right] P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} \alpha) d\lambda = 0. \quad (13)$$

Підставимо у (13) функції $A_2^{(1)}(\lambda)$, $A_2^{(2)}(\lambda)$, визначені з системи рівнянь (12), і виконаємо заміни

$$\xi = \alpha_0 + \tau, \quad \alpha = \alpha_0 + t, \quad \frac{\sigma(\alpha_0 + \tau)}{\operatorname{ch}(\alpha_0 + \tau) - 1} = \varphi(\tau). \quad (14)$$

В результаті для нової невідомої функції $\varphi(\tau)$ отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^{\infty} k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (15)$$

$$k(t, \tau) = \operatorname{sh} \frac{\alpha_0 + \tau}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2 \pi\lambda}{\operatorname{ch} \pi(\lambda + \theta) \operatorname{ch} \pi(\lambda - \theta)} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}(\alpha_0 + \tau)) \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}(\alpha_0 + t)) d\lambda - \mu_0 \operatorname{th} \pi\theta \cdot \int_0^{\infty} \frac{\lambda \operatorname{th} \pi\lambda \operatorname{sh}^2 \pi\lambda}{\operatorname{ch} \pi(\lambda + \theta) \operatorname{ch} \pi(\lambda - \theta)} \times \\ \times P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}(\alpha_0 + t)) d\lambda \int_0^{\alpha_0 + \tau} \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} \eta) d\eta, \\ f(t) = -\frac{p_{\infty}}{G_1} \int_0^{\infty} \frac{\lambda \operatorname{sh} \pi\lambda}{\operatorname{ch} \pi(\lambda + \theta) \operatorname{ch} \pi(\lambda - \theta)} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch}(\alpha_0 + t)) d\lambda,$$

де

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{G_1(3 - 4\nu_2) + G_2}{G_1 + G_2(3 - 4\nu_1)} > 0.$$

Для міжфазної тріщини в умовах плоскої деформації відносний розмір області контактного тиску ε/a є дуже малою величиною ($\varepsilon/a < 10^{-6}$) [1, 6–10]. Будемо припускати, що й у випадку осесиметричної деформації $\varepsilon/a \ll 1$. Це припущення буде підтверджено знайденим при розв'язанні задачі значенням ε/a . При $\alpha_0 \rightarrow \infty$ ($\varepsilon/a \sim 2e^{-\alpha_0} \rightarrow 0$) інтегральне рівняння допускає асимптотичне спрощення з високою точністю (порядку ε/a). Для цього використаємо асимптотичну формулу для функції Лежандра [2]

$$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} \xi) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi/2} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\lambda\right)} e^{i\lambda\xi} \right), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (16)$$

За допомогою (16) також запишемо

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \operatorname{sh} \frac{\eta}{2} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} \eta) d\eta &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma(i\lambda)}{i\lambda \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\lambda\right)} e^{i\lambda\xi} \right) + \frac{1}{\lambda \operatorname{sh} \pi\lambda} + o(1), \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Після відповідних перетворень з використанням (16), (17) інтегральне рівняння (15) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k_0(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau &= f_0(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (18) \\ k_0(t-\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi\lambda \operatorname{ch} \pi(\lambda + i\gamma)}{\operatorname{ch} \pi(\lambda + \theta) \operatorname{ch} \pi(\lambda - \theta)} e^{-i\lambda(t-\tau)} d\lambda, \\ f_0(t) &= \frac{2i}{D\sqrt{\pi}} \cdot \frac{P_\infty}{G_1} \operatorname{Re} \left[\frac{\Gamma(1+i\theta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\theta\right)} \left(\frac{1}{2} + i\theta\right) e^{-(\frac{1}{2}+i\theta)(a_0+t)} \right], \end{aligned}$$

де

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\mu_0 \operatorname{th} \pi\theta), \quad D = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \pi\theta + \mu_0^2 \operatorname{sh}^2 \pi\theta}.$$

Розв'язання інтегрального рівняння. Інтегральне рівняння (18), яке задане на напівнескінченному інтервалі $0 \leq t < \infty$ і має різницеve ядро $k_0(t-\tau)$, допускає точний розв'язок за методом Вінера – Гопфа [4]. Для функцій

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \varphi(t) e^{izt} dt, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{izt} dt \int_0^\infty k_0(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad (19)$$

аналітичних відповідно у верхній ($\operatorname{Im} z \geq 0$) та нижній ($\operatorname{Im} z \leq 0$) півплощинах комплексної площини, маємо функціональне рівняння Вінера – Гопфа

$$\mathcal{K}(z) \Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F(z), \quad (20)$$

$$\mathcal{K}(z) = \frac{\operatorname{sh} \pi z \operatorname{ch} \pi(z + i\gamma)}{\operatorname{ch} \pi(z + \theta) \operatorname{ch} \pi(z - \theta)}, \quad F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_0(t) e^{izt} dt.$$

Для розв'язання функціонального рівняння (20) факторизуємо його коефіцієнт $\mathcal{K}(z)$ і праву частину $F(z)$:

$$\frac{\mathcal{K}(z)}{z} = \frac{\mathcal{K}^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)}, \quad F(z)\mathcal{K}^-(z) = f^+(z) - f^-(z), \quad (21)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^+(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - iz - i\theta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - iz + i\theta\right)}{\Gamma(1 - iz)\Gamma\left(\frac{1}{2} - iz + \gamma\right)}, \\ \mathcal{K}^-(z) &= \frac{\Gamma(1 + iz)\Gamma\left(\frac{1}{2} + iz - \gamma\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + iz + i\theta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + iz - i\theta\right)}, \\ f^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha_0}{2}} \left(e^{i\theta(\alpha_0 + 2\ln 2)} \frac{\mathcal{L}_0}{z + \theta + \frac{i}{2}} + e^{-i\theta(\alpha_0 + 2\ln 2)} \frac{\bar{\mathcal{L}}_0}{z - \theta + \frac{i}{2}} \right), \\ \mathcal{L}_0 &= -\frac{p_\infty}{DG_1} \left(\frac{1}{2} - i\theta\right)^2 \frac{\Gamma(1 - \gamma - i\theta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\theta\right)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Розв'язок функціонального рівняння Вінера – Гопфа запишеться у вигляді [4]

$$\Phi^+(z) = \frac{f^+(z)}{z\mathcal{K}^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = \frac{f^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} \quad (23)$$

за умови, що $f^+(0) = 0$, тобто

$$\operatorname{Re} \left(e^{i\theta(\alpha_0 + 2\ln 2)} \frac{\mathcal{L}_0}{\frac{1}{2} - i\theta} \right) = 0. \quad (24)$$

Умову (24) з урахуванням виразу (22) для \mathcal{L}_0 запишемо у вигляді рівняння

$$\cos \left\{ \theta(\alpha_0 + 2\ln 2) - \arg \left[\left(\frac{1}{2} + i\theta \right) \frac{\Gamma(1 - \gamma + i\theta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\theta\right)} \right] \right\} = 0, \quad (25)$$

найменший додатний корінь якого визначає ширину області контакту

$$\varepsilon = 2ae^{-\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2\theta} - 2\ln 2 + \frac{1}{\theta} \arg \left[\left(\frac{1}{2} + i\theta \right) \frac{\Gamma(1 - \gamma + i\theta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\theta\right)} \right]. \quad (26)$$

Інші додатні корені дають нефізичні розв'язки, для яких поверхні тріщини поза областю контакту взаємно перекриваються [9]. Від'ємні корені теж приводять до неможливих розв'язків, коли розмір області контакту перевищує радіус тріщини ($\varepsilon > a$).

За допомогою оберненого перетворення Фур'є із першої рівності (19) з урахуванням (23) отримуємо

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^+(t)}{t\mathcal{K}^+(t)} e^{-it\tau} dt. \quad (27)$$

Напруження на межі розділу півпросторів. Визначимо розподіл напружень в області контакту ($a - \varepsilon \leq r < a$, $z = 0$) і в зонах спряження півпросторів ($r \geq a$, $z = 0$). Обчислюючи інтеграл із (27) за теорією лишків і переходячи від функції $\varphi(\tau)$ за формулами (14), (11) до $\sigma_z^{(1)}|_{z=0}$, отримуємо нормальні напруження в області контактного тиску ($a - \varepsilon \leq r < a$):

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}|_{z=0} &= \\ &= \frac{p_\infty \theta \sqrt{1+4\theta^2}}{\left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\theta\right) \right|} \sqrt{\frac{2a}{\varepsilon}} \left[\frac{|\Gamma(1-\gamma+i\theta)|}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\gamma\right)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + i\theta, \frac{1}{2} - i\theta; \frac{3}{2} - \gamma; \frac{a-r}{\varepsilon}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right) |\Gamma(1-\gamma+i\theta)| \operatorname{ch} \pi\theta} \times \right. \\ &\quad \left. \times {}_2F_1\left(\gamma + i\theta, \gamma - i\theta; \frac{1}{2} + \gamma; \frac{a-r}{\varepsilon}\right) \left(\frac{a-r}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}+\gamma} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

де ${}_2F_1(a, b; c; z)$ – гіпергеометрична функція [2]. За формулою (28) знаходимо асимптотичну поведінку контактних напружень в околі контуру тріщини:

$$\sigma_z^{(1)}|_{z=0} \sim \frac{p_\infty \theta \sqrt{1+4\theta^2} \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\theta\right) \right|}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right) |\Gamma(1-\gamma+i\theta)|} \sqrt{\frac{2a}{\varepsilon}} \left(\frac{a-r}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}+\gamma}, \quad r \rightarrow a - 0. \quad (29)$$

За допомогою співвідношень (7)–(9) запишемо вирази для нормальних і дотичних напружень на межі спряження півпросторів $r \geq a$, $z = 0$ ($\beta = \pi$). В ε -околі контуру тріщини після перетворень вони набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G_1} (\sigma_z^{(1)} + i\tau_{rz}^{(1)}) \Big|_{\beta=\pi} &= \\ &= \frac{p_\infty}{2G_1} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1-i\theta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\theta\right)} \left(\frac{1}{2}-i\theta\right) e^{\left(\frac{1}{2}+i\theta\right)\alpha} \right) + \\ &\quad + \frac{1-i\mu_0}{2\sqrt{2\pi}} \operatorname{ch} \pi\theta \cdot e^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^+(\lambda)}{\operatorname{ch} \pi(\lambda+\theta)} e^{-i\lambda(\alpha-\alpha_0)} d\lambda, \quad \alpha > \alpha_0. \end{aligned} \quad (30)$$

Обчисливши інтеграл з (30) за теорією лишків, визначаємо розподіл напружень у зоні спряження півпросторів поблизу контуру тріщини

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}|_{z=0} &= \\ &= \frac{p_\infty \theta \sqrt{1+4\theta^2} |\Gamma(1-\gamma+i\theta)|}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\gamma\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\theta\right) \right|} \sqrt{\frac{2a}{\varepsilon}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + i\theta, \frac{1}{2} - i\theta; \frac{3}{2} - \gamma; \frac{a-r}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}^{(1)} \Big|_{z=0} &= \\
&= -\mu_0 \sigma_z^{(1)} \Big|_{z=0} + \frac{\pi p_\infty \theta \sqrt{1+4\theta^2}}{\operatorname{sh} \pi \theta \cos \pi \gamma \Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\theta\right) \Gamma(1 - \gamma + i\theta) \right|} \times \\
&\times \sqrt{\frac{2a}{\varepsilon}} {}_2F_1\left(\gamma + i\theta, \gamma - i\theta; \frac{1}{2} + \gamma; \frac{a-r}{\varepsilon}\right) \left(\frac{r-a}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}+\gamma}, \\
& \qquad \qquad \qquad a < r \leq a + \varepsilon. \tag{31}
\end{aligned}$$

Нормальні напруження мають скінченне граничне значення при $r \rightarrow a + 0$:

$$\sigma_z^{(1)} \Big|_{z=0, r=a+0} = \frac{p_\infty \theta \sqrt{1+4\theta^2} |\Gamma(1 - \gamma + i\theta)|}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \gamma\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\theta\right) \right|} \sqrt{\frac{2a}{\varepsilon}}. \tag{32}$$

Дотичні напруження мають степеневу особливість на контурі тріщини:

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}^{(1)} \Big|_{z=0} &\sim \\
&\sim \frac{\pi p_\infty \theta \sqrt{1+4\theta^2}}{\operatorname{sh} \pi \theta \cos \pi \gamma \Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\theta\right) \Gamma(1 - \gamma + i\theta) \right|} \sqrt{\frac{2a}{\varepsilon}} \left(\frac{r-a}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}+\gamma}, \\
& \qquad \qquad \qquad r \rightarrow a + 0. \tag{33}
\end{aligned}$$

На підставі асимптотичної поведінки дотичних напружень (33) біля контуру тріщини визначимо коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень

$$\begin{aligned}
K_{II} &= \frac{\sqrt{2\pi}}{p_\infty} \sqrt{\frac{\varepsilon}{a}} \lim_{r \rightarrow a+0} \left(\frac{r-a}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma} \tau_{rz}^{(1)} \Big|_{z=0} = \\
&= \frac{2\theta \sqrt{\pi^3(1+4\theta^2)}}{\operatorname{sh} \pi \theta \cos \pi \gamma \Gamma\left(\frac{1}{2} + \gamma\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\theta\right) \Gamma(1 - \gamma + i\theta) \right|}. \tag{34}
\end{aligned}$$

Поза ε -околом контуру тріщини в зоні жорсткого з'єднання півпросторів маємо ($0 < \alpha < \alpha_0$):

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(1)} \Big|_{\beta=\pi} &= p_\infty \left(1 + 16 \operatorname{ch}^2 \pi \theta \cdot \operatorname{sh}^3 \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\operatorname{ch} 2\pi\lambda + \operatorname{ch} 2\pi\theta} P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} \alpha) d\lambda \right), \\
\tau_{rz}^{(1)} \Big|_{\beta=\pi} &= -8p_\infty \operatorname{sh} 2\pi\theta \cdot \operatorname{sh}^3 \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda \operatorname{th} \pi\lambda}{\operatorname{ch} 2\pi\lambda + \operatorname{ch} 2\pi\theta} \times \\
&\times \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} \alpha) d\lambda. \tag{35}
\end{aligned}$$

Використовуючи співвідношення [2]

$$P_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{ch} \pi\lambda \int_0^\infty \frac{\cos \lambda s}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{ch} s}} ds$$

у формулах (35) та обчислюючи інтеграли за λ , знаходимо напруження у зоні спряження півпросторів, за винятком ε -околу контуру тріщини:

$$\begin{aligned}
\sigma_z^{(1)} \Big|_{z=0} &= p_\infty - \frac{\sqrt{2}}{\pi} p_\infty \operatorname{ch} \pi \theta \cdot a^3 r_1^{-3} \int_0^\infty [(\operatorname{ch} s - \\
&\quad - 2\rho) \operatorname{ch} s - 3] (\operatorname{ch} s + \rho)^{-\frac{5}{2}} \operatorname{sech} \frac{s}{2} \cos \theta s \, ds, \\
\tau_{rz}^{(1)} \Big|_{z=0} &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} p_\infty \operatorname{ch} \pi \theta \cdot a^2 r_1^{-3} \int_0^\infty (\operatorname{ch} s - 2\rho + \\
&\quad + 3) (\operatorname{ch} s + \rho)^{-\frac{5}{2}} \operatorname{sh} \frac{s}{2} \sin \theta s \, ds, \\
r_1 &= \sqrt{r^2 - a^2}, \quad \rho = \frac{r^2 + a^2}{r^2 - a^2}, \quad a + \varepsilon < r < \infty. \tag{36}
\end{aligned}$$

Перевіримо виконання умови (6) на тангенціальні переміщення в області контакту:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= u_r^{(1)} \Big|_{z=0} - u_r^{(2)} \Big|_{z=0} = \\
&= -A \cos \pi \rho \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 \pi \lambda}{\lambda \operatorname{ch} \pi(\pi + \theta) \operatorname{ch} \pi(\lambda - \theta)} e^{-i\lambda \alpha} \, d\lambda + \\
&\quad + iA \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sh} \pi \lambda \operatorname{sh} \pi(\lambda + i\rho)}{\lambda \operatorname{ch} \pi(\lambda + \theta) \operatorname{ch} \pi(\lambda - \theta)} \Phi^+(\lambda) [e^{-i(\alpha - \alpha_0)} + e^{i(\alpha + \alpha_0)}] \, d\lambda,
\end{aligned}$$

де

$$A = \frac{\mu_0 p_\infty}{\sin \pi \rho} \left(\frac{1 - \nu_1}{G_1} + \frac{1 - \nu_2}{G_2} \right), \quad \rho = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} (\mu_0 \operatorname{cth} \pi \theta).$$

Після перетворень знаходимо різницю тангенціальних переміщень граничних точок півплощин у зоні контактного тиску

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{2A \theta \sqrt{2a \varepsilon (1 + 4\theta^2)} \cos \pi(\rho - \gamma) |\Gamma(\gamma + i\theta)|}{\sqrt{1 + \mu_0^2} \operatorname{sh} 2\pi \theta \Gamma\left(\frac{3}{2} + \gamma\right) \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + i\theta\right) \right|} \times \\
&\quad \times {}_2F_1\left(\gamma + i\theta, \gamma - i\theta; \frac{3}{2} + \gamma; \frac{a - r}{\varepsilon}\right) \left(\frac{a - r}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2} + \gamma}, \quad a - \varepsilon \leq r < a. \tag{37}
\end{aligned}$$

З огляду на те, що гіпергеометрична функція ${}_2F_1\left(\gamma + i\theta, \gamma - i\theta; \frac{3}{2} + \gamma; \frac{a - r}{\varepsilon}\right)$, яка входить до виразу (37), при заданих значеннях своїх параметрів і аргументу приймає тільки дійсні додатні значення, у всіх точках області контакту біля контуру тріщини $a - \varepsilon \leq r < a$ різниця переміщень Δu із (37) завжди є додатною: $\Delta u > 0$, що підтверджує припущення (6) про напрям відносного руху поверхонь тріщини в області контакту та вибір знака при μ_0 у крайовій умові (4).

Результати обчислень. Числові значення відносної ширини області контакту ε/a і коефіцієнта інтенсивності напружень K_{II} , які обчислені за формулами (26) і (34) при різних значеннях коефіцієнта тертя μ_0 і відношеннях модулів зсуву G_1/G_2 для випадку $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, подано в табл. 1, 2. Припущення, що $\varepsilon/a \ll 1$, зроблене при асимптотичному спрощенні інтег-

рального рівняння, підтверджується табличними даними величини ε/a , яка при $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\mu_0 = 0.5$ набуває свого найбільшого значення $\varepsilon/a = 1.56 \cdot 10^{-8}$ у випадку, коли один із півпросторів є абсолютно жорстким ($G_1/G_2 = \infty$). Зі зростанням коефіцієнта тертя μ_0 і відношення модулів зсуву G_1/G_2 матеріалів півпросторів відносна ширина області контакту ε/a і коефіцієнт інтенсивності напружень K_{II} збільшуються.

Таблиця 1

		ε/a				
G_1/G_2		1.5	2	4	10	∞
μ_0						
0		$9.31 \cdot 10^{-39}$	$9.99 \cdot 10^{-24}$	$1.15 \cdot 10^{-13}$	$2.80 \cdot 10^{-10}$	$1.44 \cdot 10^{-8}$
0.25		$9.38 \cdot 10^{-39}$	$1.01 \cdot 10^{-23}$	$1.18 \cdot 10^{-13}$	$2.88 \cdot 10^{-10}$	$1.50 \cdot 10^{-8}$
0.5		$9.44 \cdot 10^{-39}$	$1.02 \cdot 10^{-23}$	$1.20 \cdot 10^{-13}$	$2.98 \cdot 10^{-10}$	$1.56 \cdot 10^{-8}$

Таблиця 2

		K_{II}				
G_1/G_2		1.5	2	4	10	∞
μ_0						
0		1.130	1.132	1.141	1.152	1.164
0.25		1.137	1.144	1.163	1.183	1.203
0.5		1.144	1.157	1.186	1.216	1.245

Таким чином, ширина області контакту поверхонь кругової тріщини, як і у випадку плоскої деформації, на декілька порядків менша від характерного розміру тріщини. З огляду на надзвичайно малий розмір області контактного тиску урахування контакту не впливає на напружено-деформований стан півпросторів поза малим оточенням контуру тріщини. Проте введення області контакту, по-перше, дозволяє уникати фізичних суперечностей щодо перекриття її поверхонь і, по-друге, дає можливість коректно визначити коефіцієнт інтенсивності зсувних напружень.

1. Дундурс Я., Комниноу М. Обзор и перспективы исследования межфазной трещины // Разрушение композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1979. – С. 78–87.
2. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 466 с.
3. Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. Обобщение критерия Гриффитса – Снеддона на случай неоднородного тела // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28, № 6. – С. 1061–1069.
4. Нобл Б. Метод Винера – Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.
5. Острик В. И. Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – 39, № 2. – С. 58–65.
6. Острик В. И., Улітко А. Ф. Контактна задача для міжфазної напівнескінченної тріщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 3. – С. 88–95.
7. Острик В. И., Улітко А. Ф. Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 2. – С. 119–126.
8. Симонов И. В. Межфазная трещина в однородном поле напряжений // Механика композитных материалов. – 1985. – № 6. – С. 969–976.
9. Улітко А. Ф. Полубесконечный разрез вдоль границы жестко соединенных полуплоскостей из различных материалов // Современ. проблемы механики сплошной среды. – Ростов-на-Дону: Книга, 1995. – С. 185–193.

10. Улітко А. Ф., Острик В. І. Міжфазна тріщина за умови фрикційного контакту берегів // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 2. – С. 133–141.
11. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
12. Харун І. В., Лобода В. В. Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, № 2. – С. 103–113.
13. Gutesen A. K., Dundurs J. The interface crack under a combined loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – 55. – P. 580–586.
14. Herrmann K. P., Loboda V. V. Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimetals by consideration of various contact zone models // Arch. Appl. Mech. – 2000. – 70. – P. 127–143.
15. Herrmann K. P., Loboda V. V. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial // Arch. Appl. Mech. – 1999. – 69. – P. 311–335.
16. Loboda V. V. The quasi-invariant in the theory of interface crack // Eng. Fract. Mech. – 1993. – 44. – P. 573–580.
17. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1952. – 19, No. 4. – P. 526–535.

КРУГОВАЯ МЕЖФАЗНАЯ ТРЕЩИНА В УСЛОВИЯХ ФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрено напряженное состояние двух жестко соединенных между собой упругих полупространств из разных материалов, на границе раздела которых находится круговая трещина. Учтены контакт поверхностей трещины вблизи ее контура и силы трения в области контакта. С применением метода Винера – Хопфа решение интегрального уравнения задачи получено в замкнутой форме. Найдены в явном виде размер области контакта поверхностей трещины, распределение напряжений в области контакта и на границе раздела полупространств вне трещины.

CIRCULAR INTERFACE CRACK WITH FRICTIONAL CONTACT OF FACES

The stressed state of two rigidly connected elastic half-spaces from different materials with a circular crack on the interface is studied. The contact of crack faces close to its contour is taken into account. Friction forces are considered in the contact zone. Using Winner – Hopf's method, the solution to the integral equation of the problem is obtained in the closed form. The size of contact region of the crack faces and the distribution of stresses in it and on the interface of half-spaces outside of the crack are found explicitly.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка

Одержано
21.04.03