

СМУГИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ В ОКОЛАХ ВЕРШИН ДВОХ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ПРУЖНИХ СТРІЧКОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Методом функцій стрибка досліджено розвиток локалізованих у тонких смугах зон передруйнування в композиції з двома пружними стрічковими включеннями в ізотропній матриці за поздовжнього розтягу на нескінченності. Зони передруйнування просуваються уздовж межі матриця – включення від торця кожного з включень до його центральної області та моделюються лініями розриву поздовжніх складових вектора переміщень. З урахуванням умов взаємодії включень з матрицею задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь стосовно функцій стрибка, які розв'язуються методом колокації. Розв'язок такої задачі може також служити для аналізу розвитку смуг передруйнування при розриві суцільного включення. У числових прикладах досліджено розміри смуг передруйнування і розподіл розривних зусиль у включеннях.

У багатьох випадках конструкційні матеріали з метою поліпшення їх фізико-механічних характеристик армуються стрічковими включеннями. Однак, приймаючи на себе дію зовнішнього навантаження, армувальні елементи одночасно є й потужними концентраторами напружень. З цієї причини значний теоретичний і практичний інтерес становить вивчення розподілу напружень і деформацій біля таких чужорідних включень, а також працездатність самих елементів армування. Взаємовплив двох абсолютно жорстких включень на розвиток зон передруйнування в умовах плоскої задачі вивчався у працях [1, 4]. У статті [1] на всій довжині смуг передруйнування дотичні напруження вважалися сталими, що не давало можливості отримати обмежених напружень в околах торців включень. Залишалася логарифмічна особливість, якої вдалося позбутися [4] введенням у зону передруйнування додаткової ділянки розпушення (властивого розвинутої пластичності), чим зроблено наступний крок у розвитку крайових умов при розв'язанні модельних задач для тіл із включеннями. Така модель видається реалістичнішою від використовуваних раніше, хоча досконалою її вважати не можна, оскільки реальна зона пластичності завжди охоплює вістря концентратора напружень. Нижче з використанням підходів праць [4, 6, 7] досліджується розвиток локалізованих зон передруйнування у композиції з двома пружними стрічковими включеннями.

1. Постановка задачі. Метод функцій стрибка. Розглянемо в умовах плоскої задачі ізотропне тіло (пластину), що містить два співвісні пружні стрічкові включення однакової довжини $2\ell = a_2 - a_1$ і малої (порівняно з

довжиною) товщини $2h$, розміщених симетрично відносно початку декартової системи координат xOy (рис. 1). Модуль пружності включень E_{incl} більший від модуля пружності матриці E ; коефіцієнти Пуассона відповідно – ν_{incl} та ν . Композиція розтягується на нескінченності зусиллями $\sigma_{xx}^{\infty} = q$ паралельно до лінії включень. Вважаємо, що внаслідок концентрації напружень біля торців включень виникають і зі збільшенням навантаження про-

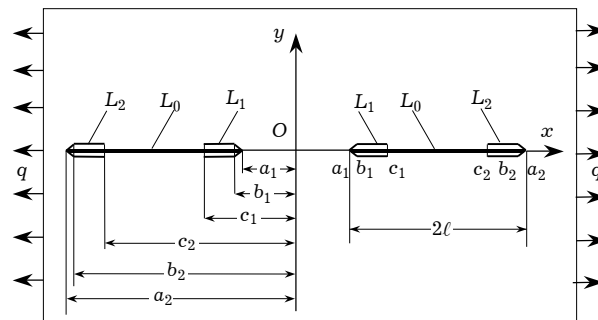


Рис. 1

ISSN 0130-9420. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2004. – 47, № 1. – С. 95-102.

суваються до їх центральної частини зони пластичного деформування. Безпосередньо до торців прилягають області розпушення матеріалу. Розвиток деформацій за межею пружності локалізується у вузьких областях – смугах вздовж межі матриця – включення. Моделювання зон передруйнування тонкими прошарками матеріалу дає можливість формулювати змішану задачу теорії пружності для тіла з пружними включеннями та лініями ковзання на межі поділу, що збігаються у торці включень.

Оскільки товщина включень є малою, то їх вплив згідно з працями [2, 6, 7] змоделюємо функціями стрибків вектора напружень і похідної від вектора переміщень під час переходу через їх серединну лінію, зносячи умови контакту на вісь абсцис:

$$\begin{aligned} [\sigma_{yy}(x) - i\sigma_{xy}(x)] &= f_1(x) - if_2(x) = f_1^*(x), \\ \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x)}{\partial x} \right] &= f_3(x) + if_4(x) = f_3^*(x), \end{aligned} \quad (1)$$

де σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} – компоненти тензора напружень; u , v – компоненти вектора переміщень відповідно уздовж осей Ox , Oy ; $[\varphi(x)] = \varphi^-(x) - \varphi^+(x)$; $\varphi^\pm(x)$ – граничні значення функції φ на верхньому ($y > 0$) й нижньому ($y < 0$) боках лінії $y = 0$; $f_j(x)$, $j = 1, \dots, 4$, – невідомі функції стрибка, причому за межами включень ($|x| < a_1 \cup |x| > a_2$) усі функції $f_j(x) = 0$. Внаслідок симетрії навантаження на осі Ox ($y = 0$) виконуються такі крайові умови:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^+(x) &= \sigma_{yy}^-(x), & \sigma_{xy}^+(x) &= -\sigma_{xy}^-(x), \\ \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^+ &= \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^-, & \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^+ &= -\left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^-. \end{aligned} \quad (2)$$

Зони передруйнування розвиваються в околах торців включень уздовж межі матриця – включення, просуваючись від кожного краю до центральної частини: $x \in L_1$ ($a_1 < |x| < c_1$) – в околах ближчих торців і $x \in L_2$ ($c_2 < |x| < a_2$) – в околах віддалених торців. Кожна із зон складається з двох частин: ділянки розпушення $a_1 < |x| < b_1$, $b_2 < |x| < a_2$ та ділянки пластичності $b_1 < |x| < c_1$, $c_2 < |x| < b_2$ ($a_1 < b_1 < c_1 < c_2 < b_2 < a_2$). Довжини зон розпушення $b_1 - a_1$ та $b_2 - a_2$ є незначними порівняно з півдовжиною включення для того, щоб лінії ковзання щойно починали впливати на напружено-деформований стан у тілі. При цьому на ділянках розпушення дотичні напруження лінійно зростають від нуля до граничного значення τ_s^* , властивого зоні повної пластичності:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^+ &= -\sigma_{xy}^- = -\tau_s^* \frac{|x| - a_1}{b_1 - a_1} \operatorname{sgn}(x), & a_1 < |x| < b_1, \\ \sigma_{xy}^+ &= -\sigma_{xy}^- = \tau_s^* \frac{a_2 - |x|}{a_2 - b_2} \operatorname{sgn}(x), & b_2 < |x| < a_2, \end{aligned} \quad (3)$$

а на ділянках пластичного деформування є сталими:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^+ &= -\sigma_{xy}^- = -\tau_s^* \operatorname{sgn}(x), & b_1 < |x| < c_1, \\ \sigma_{xy}^+ &= -\sigma_{xy}^- = \tau_s^* \operatorname{sgn}(x), & c_2 < |x| < b_2, & \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

де τ_s^* – зсувна міцність адгезії поверхні матриця – включення, а при пластичному деформуванні – її зсувний поріг пластичності.

На ділянках $c_1 < |x| < c_2$ зв'язок між включеннями та матрицею є ідеальним, а на нескінченності маємо умови

$$\sigma_{xx}^\infty = q, \quad \sigma_{yy}^\infty = q, \quad \sigma_{xy}^\infty = 0. \quad (5)$$

Згідно з [5] у плоскій задачі теорії пружності за відсутності масових сил компоненти тензора напружень і вектора переміщень подають через дві аналітичні функції комплексної змінної $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(z) - i\sigma_{xy}(z) &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2G(u'(z) + iv'(z)) &= \alpha\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль зсуву матеріалу матриці; $\alpha = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ – стала Мусхелішвілі. За відомою схемою [2, 6, 7] після підставлення виразів (6) у крайові умови (1) отримуємо задачу лінійного спряження стосовно комплексних потенціалів:

$$\begin{aligned} [\Phi(x) - \Omega(x)]^- - [\Phi(x) - \Omega(x)]^+ &= f_1^*(x), \\ [\alpha\Phi(x) + \Omega(x)]^- - [\alpha\Phi(x) + \Omega(x)]^+ &= 2Gf_3^*(x). \end{aligned}$$

Їх розв'язком з урахуванням навантаження на нескінченності будуть значення:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{i}{2i(\alpha+1)} [t_1^*(z) + 2Gt_3^*(z)] + \Phi_0(z), \\ \Omega(z) &= \frac{i}{2(\alpha+1)} [-\alpha t_1^*(z) + 2Gt_3^*(z)] + \Omega_0(z), \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$t_j^*(z) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-a_2}^{-a_1} \frac{f_j^*(t) dt}{t-z} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{f_j^*(t) dt}{t-z} \right), \quad \Phi_0(z) = \frac{q}{4}, \quad \Omega_0(z) = -\frac{q}{2}.$$

За фізичним змістом величини $\Phi_0(z)$, $\Omega_0(z)$ є розв'язком однорідної задачі для суцільного тіла без включень, а інтеграли типу Коші $t_j^*(z)$ стосуються збуреного включенням напруженого стану.

Залежності (6), (7) визначають компоненти тензора напружень і похідні від переміщень у довільній точці пластини через функції стрибків:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(z) - i\sigma_{xy}(z) &= -\frac{q}{4} + \frac{i}{2(\alpha+1)} [t_1^*(z) - \alpha t_1^*(\bar{z}) + 2G(t_3^*(z) + t_3^*(\bar{z})) - \\ &\quad - (z - \bar{z})(t_1^*(\bar{z}) + 2Gt_3^*(\bar{z}))], \\ u'(z) + iv'(z) &= \frac{q(\alpha+2)}{8G} + \frac{i}{4G(\alpha+1)} [\alpha(t_1^*(z) + t_1^*(\bar{z})) + \\ &\quad + 2G(\alpha t_3^*(z) - t_3^*(\bar{z})) + (z - \bar{z})(t_1^*(\bar{z}) + 2Gt_3^*(\bar{z}))]. \end{aligned} \quad (8)$$

Система сингулярних інтегральних рівнянь для визначення функцій стрибка. З огляду на симетрію задачі та для спрощення перетворень далі розглянемо лише праве включення, розміщене на додатній частині осі Ox . Умовою ідеального механічного контакту включення з матрицею є співвідношення

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^{\text{incl}}(x, \pm h) &= \sigma_{yy}^{\pm}(x), & \sigma_{xy}^{\text{incl}}(x, \pm h) &= \sigma_{xy}^{\pm}(x), \\ \frac{\partial u^{\text{incl}}(x, \pm h)}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^{\pm}, & \frac{\partial v^{\text{incl}}(x, \pm h)}{\partial x} &= \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^{\pm}.\end{aligned}\quad (9)$$

Враховуючи малу товщину включення та формули (9), умови взаємодії тонкого ізотропного включення з матрицею як умови взаємного неідеального контакту берегів матриці у місці її спряження з включенням можна подати у вигляді

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle &= \frac{1}{E_{\text{incl}}} \langle \sigma_{xx} \rangle - \frac{\nu_{\text{incl}}}{E_{\text{incl}}} \langle \sigma_{yy} \rangle, \\ \frac{[v]}{h} &= \frac{1}{E_{\text{incl}}} \langle \sigma_{yy} \rangle - \frac{\nu_{\text{incl}}}{E_{\text{incl}}} \langle \sigma_{xx} \rangle, \\ \frac{[v]}{h} + \left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle &= \frac{2(1 + \nu_{\text{incl}})}{E_{\text{incl}}} \langle \sigma_{xy} \rangle,\end{aligned}\quad (10)$$

де $\langle \varphi(x) \rangle = \varphi^+(x) + \varphi^-(x)$. З умови рівноваги елемента включення маємо

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{xx}^{\text{incl}}(x) \rangle &= \frac{1}{h} \int_x^{\xi} [\sigma_{xy}^{\text{incl}}(t)] dt + \frac{N_{xx}(\xi)}{h}, \\ \langle \sigma_{xy}^{\text{incl}}(x) \rangle &= \frac{1}{h} \int_x^{\xi} [\sigma_{yy}^{\text{incl}}(t)] dt + \frac{N_{xy}(\xi)}{h},\end{aligned}\quad (11)$$

де точка ξ відповідає одному з торців включення чи краю зони передруйнування ($\xi = \{c_1, c_2, a_2\}$); $N_{xx}(\xi)$, $N_{xy}(\xi)$ – нормальні та дотичні зусилля на торцях $x = \xi$. Тоді з формул (10), (11) випливають залежності

$$\begin{aligned}\frac{1}{h} \int_x^{\xi} f_2(t) dt + \nu_{\text{incl}} \langle \sigma_{yy} \rangle + E_{\text{incl}} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{h} N_{xx}(\xi) &= 0, \\ \nu_{\text{incl}} \int_x^{\xi} f_2(t) dt - E_{\text{incl}} \int_x^{\xi} f_4(t) dt + h \langle \sigma_{yy} \rangle + \nu_{\text{incl}} N_{xx}(\xi) &= 0.\end{aligned}\quad (12)$$

При цьому з огляду на умови симетрії (2) виконуються умови

$$f_2(x) = -f_2(-x), \quad f_4(x) = -f_4(-x), \quad f_1(x) = f_3(x) = 0.$$

Значення функцій стрибків на кожній із ділянок L_i , $i = 0, 1, 2$, включення позначимо зверху індексом i : $f_j(x)|_{L_i} = f_j^{(i)}(x)$. Формули (12) з урахуванням (8) і крайових умов (3), (4) породжують на трьох ділянках L_0 , L_1 , L_2 ($a_1 < x < a_2$) систему чотирьох інтегральних рівнянь стосовно шуканих функцій стрибка $f_2^{(0)}(x)$, $f_4^{(0)}(x)$, $f_4^{(1)}(x)$, $f_4^{(2)}(x)$

– для $x \in L_0$:

$$\lambda_1 t_2^0(x) + \frac{2}{h} \int_x^{c_2} f_2^{(0)}(t) dt - \lambda_2 t_4(x) - 2\lambda_1 \tau_s^* g_{01}(x) + 4\lambda_0 q = 0,$$

$$(1-\nu)t_2^0(x) - \frac{2\nu_{\text{incl}}}{h} \int_x^{c_2} f_2^{(0)}(t) dt + Et_4(x) + \frac{2E_{\text{incl}}}{h} \int_x^{c_2} f_4^{(0)}(t) dt - 2(1-\nu)\tau_s^* g_{02}(x) = 0;$$

– для $x \in L_1$:

$$\lambda_3 t_4(x) + \frac{\lambda_1 E_{\text{incl}}}{h} \int_{a_1}^x f_4^{(1)}(t) dt + \frac{\tau_s^*(1-\nu + \nu_{\text{incl}}\lambda_1)}{h} g_1(x) - 2(1-\nu)\lambda_0 q = 0;$$

– для $x \in L_2$:

$$\lambda_3 t_4(x) + \frac{\lambda_1 E_{\text{incl}}}{h} \int_x^{a_2} f_4^{(2)}(t) dt + \frac{\tau_s^*(1-\nu + \nu_{\text{incl}}\lambda_1)}{h} g_2(x) - 2(1-\nu)\lambda_0 q = 0, \quad (13)$$

де $\lambda_0 = E_{\text{incl}}/E$ – відносна жорсткість включення;

$$\lambda_1 = (3-\nu)(1+\nu)\lambda_0 - \nu_{\text{incl}}(1-\nu),$$

$$\lambda_2 = \nu_{\text{incl}}E + (1-\nu)E_{\text{incl}}, \quad \lambda_3 = 2E_{\text{incl}} + \nu_{\text{incl}}(1-\nu)E,$$

$$t_4(x) = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{c_1} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) f_4^{(1)}(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{c_1}^{c_2} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) f_4^{(0)}(t) dt + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{c_2}^{a_2} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) f_4^{(2)}(t) dt,$$

$$t_2^0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{c_1}^{c_2} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} \right) f_2^{(0)}(t) dt,$$

$$g_{01}(x) = \frac{1}{\lambda_1 h} (a_2 + b_2 - 2c_2) - \frac{1}{\pi} g_0(x),$$

$$g_{02}(x) = -\frac{1}{(1-\nu)h} (a_2 + b_2 - 2c_2) - \frac{1}{\pi} g_0(x),$$

$$g_0(x) = \ln \frac{(x^2 - c_1^2)(c_2^2 - x^2)}{(x^2 - b_1^2)(b_2^2 - x^2)} + \frac{1}{a_2 - b_2} \left[(x + a_2) \ln \frac{x + b_2}{x + a_2} + (x - a_2) \ln \frac{a_2 - x}{b_2 - x} \right] + \\ + \frac{1}{b_1 - a_1} \left[(x - a_1) \ln \frac{x - b_1}{x - a_1} + (x + a_1) \ln \frac{x + a_1}{x + b_1} \right] + 4,$$

$$g_1(x) = 2x - a_1 - b_1, \quad g_2(x) = a_2 + b_2 - 2x.$$

З фізичних міркувань повинні також виконуватися додаткові умови загальної рівноваги включення та однозначності переміщень при обході навколо включень:

$$\int_{a_1}^{a_2} f_2(t) dt = 0, \quad \int_{a_1}^{a_2} f_4(t) dt = 0. \quad (14)$$

Систему рівнянь доповнюємо також умовами обмеженості функцій стрибка на краях смуг пластичності $x = \{c_1, c_2\}$.

Вважаючи в рівняннях $c_1 = a_1$ та $c_2 = a_2$ (смуги передруйнування відсутні), отримуємо інтегральні рівняння суто пружного розв'язку задачі для двох стрічкових включень.

Деякі числові результати та висновки. Розв'язок системи рівнянь (13) з умовами (14) подаємо у вигляді рядів за многочленами Чебишева першого роду $T_n(x)$ з виділеною кореневою особливістю і невідомими коефіцієнтами $b_n^{(0)}$, $d_n^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned}
 f_2^{(0)}(x) &= -\frac{q(c_2 - c_1)}{2\sqrt{(c_2 - x)(x - c_1)}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(0)} T_n(x), \\
 f_4^{(0)}(x) &= -\frac{q(c_2 - c_1)}{2E_{\text{incl}}\sqrt{(c_2 - x)(x - c_1)}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(0)} T_n(x), \\
 f_4^{(1)}(x) &= -\frac{q(c_1 - a_1)}{2E_{\text{incl}}\sqrt{(c_1 - x)(x - a_1)}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(1)} T_n(x), \\
 f_4^{(2)}(x) &= -\frac{q(a_2 - c_2)}{2E_{\text{incl}}\sqrt{(a_2 - x)(x - c_2)}} \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(2)} T_n(x).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Підставивши (15) у рівняння (13) та умови (14), після виконання інтегрування з урахуванням властивостей многочленів Чебишева отримуємо функціональні рівняння, які методом колокацій [2, 3] зводимо до нескінченної системи алгебричних рівнянь стосовно невідомих коефіцієнтів $b_n^{(0)}$, $d_n^{(i)}$, яку розв'язуємо методом редукції.

Розглянемо композицію з коефіцієнтами Пуассона $\nu = 0.3$, $\nu_{\text{incl}} = 0.2$ для різних значень відносної жорсткості включень $\lambda_0 \equiv E_{\text{incl}}/E$ та відносної відстані між ними $\alpha \equiv a_1/\ell$ за відносної товщини включень $h_* = h/\ell$.

На рис. 2 подано залежності віднесених до півдовжини включення відносних розмірів зон передруйнування біля близьких (лінії 1, 4, 7), $\varepsilon_1 = (c_1 - a_1)/\ell$, і віддалених (лінії 2, 5, 8), $\varepsilon_2 = (a_2 - c_2)/\ell$, торців від параметра навантаження $q/(2\tau_s^*)$ при відносній відстані між включеннями $\alpha = 0.01$ та товщині $h_* = 1/20$.

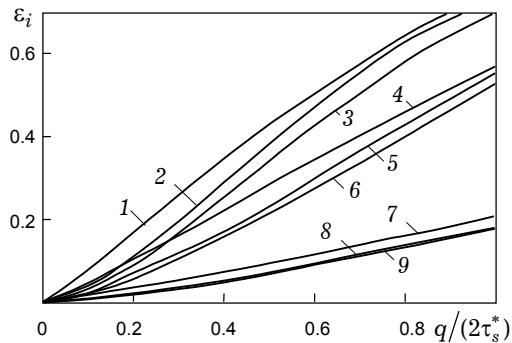


Рис. 2

Лінії 3, 6, 9 відповідають довжині цих зон при $\alpha = 10$; значення ε_1 та ε_2 при такій відносній відстані відрізняються між собою лише на четвертому-п'ятому знаках після коми, тому на графіках вони практично збігаються: включення при таких відстанях можна вважати невзаємодіючими. Для ліній 1, 2, 3 відносна жорсткість включень $\lambda_0 = 10^{10}$ (практично абсолютно жорсткі включення), для ліній 4, 5, 6 — $\lambda_0 = 20$, для ліній 7, 8, 9 — $\lambda_0 = 10/3$. В околах близьких торців порівняно з віддаленими розміри зон є більшими і зі зменшенням відстані між включеннями ця різниця зростає. Крім того, зближення включень (у граничному випадку зближення така

ситуація при вільних торцях відповідає механічному розриву включення завдовжки 4ℓ посередині) в композиції, крім зміни її властивостей міцності, супроводжується збільшенням загальної кількості пластично zdeформованого матеріалу. Результати для ліній 1–3 узгоджуються з відомими [1, 4] для абсолютно жорстких включень.

На рис. 3 подано зміну усереднених по товщині осевих розривних напружень $\sigma_* = \sigma_{xx}^{incl} / (2\tau_s^*)$ уздовж довжини $x_* = (2x - a_1 - a_2) / (a_2 - a_1)$ правого включення (координата $x_* = -1$ відповідає точці a_1 , а $x_* = +1$ – точці a_2) при товщині $h_* = 1/20$ та сталому навантаженні $q / (2\tau_s^*) = 0.25$. Для ліній 1 відносна жорсткість включень $\lambda_0 = 10^{10}$; для ліній 2 – $\lambda_0 = 20$; для ліній 3 – $\lambda_0 = 10/3$. Збільшення жорсткості включень спричиняє зростання максимальних осевих зусиль. Для кожної з пари ліній верхня відповідає відстані між включеннями $\alpha = 0.01$, нижня – відповідає $\alpha = 10$ (практично не взаємодіючі).

Зближення включень супроводжується збільшенням максимальних осевих зусиль у них та зміщенням точки максимуму в бік близьких торців. Зі зменшенням жорсткості включення точка максимуму також зміщується у бік зближених торців, а відносна різниця між максимальними зусиллями зменшується. Зокрема, для ліній 1 ($\lambda_0 = 10^{10}$) при $\alpha = 0.01$ точка максимуму зміщена в бік зближених торців на $x_* = 0.134$ від довжини включення, а максимальні зусилля зростають на 18.6% порівняно зі значенням, отриманим для $\alpha = 10$ (практично не взаємодіючі); для ліній 2 ($\lambda_0 = 20$) відповідно $x_* = 0.156$, а зусилля збільшуються на 14.5%; для ліній 3 ($\lambda_0 = 10/3$) $x_* = 0.186$, а зусилля – на 6.3%.

Отримані результати свідчать, що пружні властивості включення, а також взаємодія достатньо близько розміщених включень істотно впливають на їх контактну взаємодію з матрицею, а також на напружений стан самого підкріплювального елемента. Існування навіть дуже короткої зони розпушення дає можливість отримати механічно коректні результати.

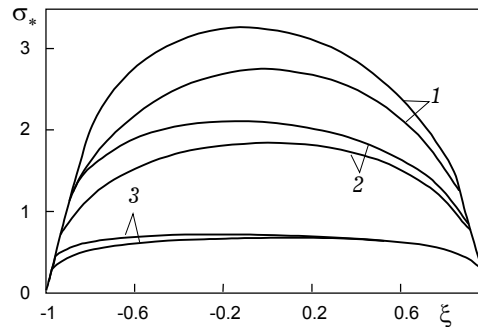


Рис. 3

1. Березницкий Л. Т., Кундрат Н. М. Исследование упругопластических эффектов при разрушении волокнистых композитов // Механика композитных материалов. – 1984. – № 5. – С. 926–930.
2. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів: Світ, 1999. – 945 с.
3. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Метод колокацій розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1990. – Вип. 242. – С. 8–13.
4. Кундрат М. М. Дослідження впливу на напружений стан смуг пластичності в околах двох взаємодіючих включень // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 4. – С. 85–89.
5. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
6. Сулим Г. Т. Система лінійних включень в ізотропному середовищі // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 7. – С. 62–65.
7. Сулим Г. Т. Концентрація напружень возле тонкостенных линейных включений // Прикл. механика. – 1981. – 17, № 11. – С. 82–89.

ПОЛОСЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТЯХ ВЕРШИН ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ УПРУГИХ ЛЕНТОЧНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Методом функций скачка исследовано развитие локализованных в тонких полосах зон предразрушения в композиции с двумя тонкими упругими ленточными включениями в изотропной матрице при продольном растяжении на бесконечности. Зоны предразрушения распространяются вдоль границы матрицы – включения от торцов к центру и моделируются линиями разрыва перемещений. С учетом условий упругого взаимодействия включений с матрицей задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций скачка, которые решаются методом коллокаций. Решение такой задачи может быть использовано для исследования развития полос предразрушения при разрыве сплошного включения. Приведены численные примеры расчета длины зон предразрушения и распределения разрывных усилий во включениях.

PREFRACTURE BANDS IN THE VICINITY OF TOPS OF TWO INTERACTING ELASTIC RIBBON-LIKE INCLUSIONS

The development of localized in thin bands, prefracture zones in a composition with two elastic ribbon-like inclusions in isotropic matrix is investigated by the method of jump functions. Zones of prefracture develop along the matrix-inclusions line from the tips to centers and are modeled by rupture of displacement. Using the complex potentials we obtain the dependence of the stress and displacement components on the load and unknown jump functions. Taking into account the interaction conditions of thin inclusions and matrix, the problem is reduced to a system of singular integral equations for the jump functions. Solution of such problem can be also used for study the development of prefracture bands at rupture of continuous inclusion. Numerical examples of zone sizes and distribution of longitudinal efforts in inclusions illustrate the method.

¹Укр. держ. ун-т водного госп-ва та природокорист., Рівне,
²Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
22.12.03