

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ НА ОСНОВІ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ

Побудовано загальний розв'язок задач нестационарної теплопровідності для тіл циліндричної форми, які мають теплообмін із зовнішнім середовищем і нагріваються внутрішніми джерелами тепла. Цей розв'язок подано через одновимірні інтеграли від добутку розв'язків допоміжних одно- та двовимірних задач теплопровідності. Наведено випадки, коли вирази для температури записуються через розв'язки трьох одновимірних задач. Детально проаналізовано температурні поля при зосередженому та нормально-круговому нагріві.

Для розв'язування задач про визначення нестационарних температурних полів у тілах циліндричної форми використовують як інтегральні перетворення (Фур'є або Ганкеля за просторовими координатами, Лапласа за часом), так і розвинення у ряди за відповідними ортогональними функціями вздовж твірної. Для тонких пластинок, які є частковим випадком циліндричних тіл, застосовують наближений підхід, у якому тривимірна задача зводиться до розв'язування відповідних двовимірних задач [1, 4, 8, 9, 11].

Для тіл паралелепіпедної форми з початковою температурою, яка записана у вигляді добутку функцій з відокремленими змінними, температурне поле можна подати у вигляді добутку розв'язків одновимірних задач теплопровідності [3, 5]. У пропонованій роботі проведено узагальнення цього підходу для випадку циліндричних тіл довільної форми, які нагріваються внутрішніми джерелами тепла та шляхом конвективного теплообміну з навколишнім середовищем.

Постановка задачі. Розглянемо теплопровідне циліндричне тіло D , яке нагрівається внутрішніми джерелами тепла і шляхом теплообміну з зовнішнім середовищем згідно з законом Ньютона. Віднесемо його до декартової системи координат $Oxyz$, у якій вісь тіла збігається з віссю Oz .

Температура тіла T у цьому випадку є розв'язком крайової задачі

$$\begin{aligned} \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) T &= W(x, y, z, \tau), & (x, y, z) \in D, & \quad \tau > 0, \\ M_z T &= b_{1,2} P(x, y, \tau), & z = z_1, z_2, & \quad (x, y) \in D_0, \quad \tau > 0, \\ M_L T &= N(x, y, z, \tau), & (x, y) \in L, & \quad z \in D_z, \quad \tau > 0, \\ T \Big|_{\tau=0} &= \theta, & (x, y, z) \in D, & \end{aligned} \quad (1)$$

де D – область, яку займає тіло ($z \in D_z$, $(x, y) \in D_0$); D_0 – область, утворена в результаті перетину області D і площини $z = \text{const}$; D_z – область $z_1 < z < z_2$, де z_1, z_2 – сталі; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\tau = at$; t – час; $W(x, y, z, \tau)$ – функція, яка описує розподіл внутрішніх джерел тепла; $N(x, y, z, \tau)$ і $b_k P(x, y, \tau)$, $k = 1, 2$, – температури зовнішнього середовища, що омивають відповідно бічну поверхню і площини $z = z_k$, причому b_k – сталі.

Тут $M_z T$ і $M_L T$ – оператори вигляду $M_n = \frac{1}{\alpha} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial n} + \alpha \right)$, які записані для границь $z = z_k$ та L відповідно; λ – коефіцієнт теплопровідності; α –

коефіцієнт температуропровідності; $\alpha(x, y)$ – коефіцієнт тепловіддачі, що приймає відповідно значення α_k на торцевих площинах $z = z_k$ та α_L – для бічної поверхні ($(x, y) \in L, z \in D_z$); $\frac{\partial T}{\partial n}$ – похідна вздовж зовнішньої нормалі до граничної поверхні тіла. Зауважимо, що введені для зручності сталі b_k дозволяють одночасно розглядати різні задачі про нагрів тіла через площини $z = z_k$.

Розглянемо спочатку детальніше випадок, коли записані у співвідношеннях (1) функції мають вигляд

$$\begin{aligned} W(x, y, z, \tau) &= g_1(\tau)\varphi_1(z)f_1(x, y), & P(x, y, \tau) &= g_2(\tau)f_2(x, y), \\ N(x, y, z, \tau) &= g_3(\tau)\varphi_3(z)f_3(x, y), & \theta(x, y, z) &= \varphi_4(z)f_4(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $q_i, \varphi_i, f_i, i = \overline{1, 4}$, – задані функції.

Застосовуючи до крайової задачі підхід, що ґрунтується на відокремленні змінних [2, 3], розв'язок цієї задачі запишемо у вигляді

$$T = T_W + T_Z + T_N + T_0, \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} T_W &= - \int_0^\tau q_1(\tau - \eta)B(z, \eta, \varphi_1)F(x, y, \eta, f_1) d\eta, \\ T_Z &= \int_0^\tau q_2(\tau - \eta)A(z, \eta)F(x, y, \eta, f_2) d\eta, \\ T_N &= \int_0^\tau q_3(\tau - \eta)B(z, \eta, \varphi_3)\Phi(x, y, \eta, f_3) d\eta, \\ T_0 &= B(z, \tau, \varphi_4)F(x, y, \tau, f_4). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут функції $A(z, \tau), B(z, \tau, \varphi), F(x, y, \tau, f), \Phi(x, y, \tau, f)$ є розв'язками крайових задач:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) A &= 0, & A \Big|_{\tau=0} &= 0, & z \in D_z, & M_z A &= b_k \delta_+(\tau), & z = z_k, & k = 1, 2, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) B &= 0, & B \Big|_{\tau=0} &= \varphi(z), & z \in D_z, & M_z B &= 0, & z = z_k, & k = 1, 2, \\ \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) F &= 0, & F \Big|_{\tau=0} &= f(x, y), & z \in D_0, & M_L F &= 0, & (x, y) \in L, \\ \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \Phi &= 0, & \Phi \Big|_{\tau=0} &= 0, & z \in D_0, & M_L \Phi &= F \delta_+(\tau), & (x, y) \in L, \end{aligned} \quad (5)$$

де $\varphi(z), f(x, y)$ – задані функції.

Зазначимо, що T_W – складова температури, що відповідає нагріву джерелами тепла; T_Z і T_N відповідають нагріву середовищ, що омивають площини z_1, z_2 або бічну поверхню відповідно; T_0 відповідає заданій початковій температурі. У правильності формули можна переконатись безпосередньо, якщо підставити розв'язок (3) у рівняння, початкові та граничні умови (1), аналогічно, як це виконано для паралелепіпеда у [3, 5].

Розглянемо тепер більш загальний випадок, коли записані у співвідношеннях (1) функції мають вигляд

$$\begin{aligned} W(x, y, z, \tau) &= g_1(\tau)\varphi_1(z, \tau)f_1(x, y, \tau), & P(x, y, \tau) &= g_2(\tau)f_2(x, y, \tau), \\ N(x, y, z, \tau) &= g_3(\tau)\varphi_3(z, \tau)f_3(x, y, \tau), & \theta(x, y, z) &= \varphi_4(z)f_4(x, y). \end{aligned} \quad (6)$$

Тоді розв'язок також записується у вигляді (3), у якому

$$\begin{aligned} T_W &= - \int_0^\tau q_1(\tau - \eta)B(z, \eta, \tau - \eta, \varphi_1)F(x, y, \eta, \tau - \eta, f_1) d\eta, \\ T_Z &= \int_0^\tau q_2(\tau - \eta)A(z, \eta, \tau - \eta)F(x, y, \eta, \tau - \eta, f_2) d\eta, \\ T_N &= \int_0^\tau q_3(\tau - \eta)B(z, \eta, \tau - \eta, \varphi_3)\Phi(x, y, \eta, \tau - \eta, f_3) d\eta, \\ T_0 &= B(z, \tau, \varphi_4)F(x, y, \tau, f_4). \end{aligned} \quad (7)$$

Тут функції $A(z, \tau, \eta)$, $B(z, \tau, \eta, \varphi)$, $F(x, y, \tau, \eta, f)$, $\Phi(x, y, \tau, \eta, f)$ визначаються шляхом розв'язування крайових задач (5), у яких покладено $\varphi = \varphi(z, \eta)$, $f = f(x, y, \eta)$. При цьому величина η вважається відомим параметром.

Наведені вище розв'язки дозволяють також досліджувати і загальний випадок, якщо попередньо функції $W = W(x, y, z, \tau)$, $P = P(x, y, \tau)$, $N = N(x, y, z, \tau)$, $\theta = \theta(x, y, z)$ записати у вигляді рядів за довільною ортогональною і повною на (z_1, z_2) системою функцій від змінної z . Тоді задача зводиться до суперпозиції задач з відповідними розглянутими вище умовами.

Розв'язки допоміжних задач. Побудований вище розв'язок зводиться до розв'язування чотирьох крайових задач. При цьому розглянемо окремо випадки прямої ($z_1 \rightarrow -\infty$, $z_2 \rightarrow \infty$), півпрямой $z > 0$ ($z_1 = 0$, $z_2 \rightarrow \infty$) і відрізка $-h < z < h$ ($z_1 = -h$, $z_2 = h$). Відповідні функції для випадків прямої, півпрямой і відрізка будемо позначати надалі індексами 0, 1 і 2.

Визначення функції А. Покажемо, що $A = \frac{\partial}{\partial \tau} C$, де функція C визначається із крайової задачі

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) C = 0, \quad C \Big|_{\tau=0} = 0, \quad z \in D_z, \quad M_z C = b_k, \quad z = z_k, \quad k = 1, 2.$$

Продиференціювавши рівняння за часом, отримаємо

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\partial C}{\partial \tau} = 0.$$

З рівняння для визначення функції C маємо $\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$. Звідси та з початкової умови $C \Big|_{\tau=0} = 0$ одержуємо $\frac{\partial C}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \Big|_{\tau=0} = 0$. Продиференціювавши граничну умову, яку запишемо у вигляді $M_z C = b_k S_+(\tau)$, отримаємо $M_z \frac{\partial C}{\partial \tau} = b_k \delta_+(\tau)$. Таким чином, одержуємо, що функція $\frac{\partial C}{\partial \tau}$ задовольняє крайову задачу для визначення функції A .

Вираз функції C для півпрямої при $b_1 = 1$ має вигляд [5]

$$C_1 = \operatorname{erfc}(z_{1*}) - \exp(-z_{1*}^2) \exp(z_{2*}^2) \operatorname{erfc}(z_{2*}),$$

де $z_{1*} = \frac{z}{2\sqrt{\tau}}$, $z_{2*} = z_{1*} + H\sqrt{\tau}$, $H = \frac{\alpha_1}{\lambda}$. Звідси одержуємо

$$A_1 = -H \exp(-z_{1*}^2) \left[H \exp(z_{2*}^2) \operatorname{erfc}(z_{2*}) - \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \right]. \quad (8)$$

Функція C для відрізка має вигляд [5]

$$C_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \Theta_n \theta_n(\zeta) h^2 [1 - \exp(-\beta_n^2 \text{Fo})],$$

де $\Theta_n = \frac{d_n}{h^2} D_n$, $d_n = \text{Bi}_1 \theta_n(-1)b_1 + \text{Bi}_2 \theta_n(+1)b_2$, $\text{Fo} = \frac{\tau}{h^2}$, $\zeta = \frac{z}{h}$, $\text{Bi}_j = \frac{h\alpha_j}{\lambda}$.

Вирази для коефіцієнтів D_n , θ_n , β_n наведено в [5, 6].

Тоді функція A для відрізка набуде вигляду

$$A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n \theta_n(\zeta) \exp(-\beta_n^2 \text{Fo}). \quad (9)$$

При малих значеннях Fo ряд (9) збігається повільно. Для цього випадку отримано наближений розв'язок з використанням перетворення Лапласа та формул для його асимптотичного обернення [5]:

$$\begin{aligned} A_2 \cong & b_1 A_1(h-z, \tau, H_1) + b_2 A_1(h+z, \tau, H_2) + \\ & + \frac{1}{\text{Bi}} [b_1 \widetilde{\text{Bi}} A_1(3h+z, \tau, H_1) + 2b_2 \text{Bi}_2 A_1(3h-z, \tau, H_1) - \\ & - 2b_1 \text{Bi}_1 A_1(3h+z, \tau, H_2) - b_2 \widetilde{\text{Bi}} A_1(3h-z, \tau, H_2)], \end{aligned} \quad (10)$$

де $\overline{\text{Bi}} = \text{Bi}_1 - \text{Bi}_2$, $\widetilde{\text{Bi}} = \text{Bi}_1 + \text{Bi}_2$.

Надалі отриманий розв'язок, який записано стосовно границь $z = z_k$, будемо позначати також $A = A_z(z, \tau)$.

Визначення функції B . Функцію B_0 запишемо у вигляді [3]

$$B_0 = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) \exp(-t(z-s)^2) ds. \quad (11)$$

На підставі [10] для області $z > 0$ маємо

$$\begin{aligned} B_1 = & \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(s) \left[\exp(-u(z-s)^2) + \exp(-u(z+s)^2) - \right. \\ & \left. - 2H \int_0^{\infty} \exp(-u(z+s+\eta)^2 - H\eta) d\eta \right] ds, \quad u = \frac{1}{4\tau}. \end{aligned} \quad (12)$$

Використовуючи загальний розв'язок задачі теплопровідності для відрізка, отримаємо [5, 6]

$$B_2 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \varphi_n \theta_n(\zeta) \exp(-\beta_n^2 \text{Fo}), \quad \varphi_n = \int_{-1}^1 \varphi(h\zeta) \theta_n(\zeta) d\zeta. \quad (13)$$

Ці функції для випадку зосередженого нагріву ($\varphi(z) = c \delta(z - z_0)$) подаються як

$$B_0 = c \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{\pi}} \exp(-u(z-z_0)^2),$$

$$B_1 = c \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \exp(-u(z-z_0)^2) + \exp(-u(z+z_0)^2) - \right. \\ \left. - 2H \int_0^\infty \exp(-u(z+z_0+\eta)^2 - H\eta) d\eta \right\}$$

$$B_2 = c \sum_{n=1}^{\infty} D_n \theta_n(\zeta) \theta_n(\zeta_0) \exp(-\beta_n^2 Fo), \quad \zeta_0 = \frac{z_0}{n}.$$

У літературі найбільш ґрунтовно досліджено температурні поля, зумовлені зосередженими джерелами тепла. Однак ці розв'язки не можуть бути застосованими до визначення температур в околі джерела. Водночас відомо [5], що у технічній літературі для моделювання інтенсивності різних типів джерел нагріву (при зварці, нагріві газовими горілками, лазером тощо) використовують розподіл Гаусса. Для цього випадку, коли $\varphi = E(k, z - c)$, де $E(k, x) = \sqrt{\frac{k}{\pi}} \exp(-kx^2)$, k – стала, яка характеризує зосередженість нагріву, наведемо вирази для функції B . Зазначимо, що при граничному переході маємо $\lim_{k \rightarrow \infty} E(k, x) = \delta(x)$, тобто на підставі отриманого розв'язку зможемо дістати відповідний розподіл температурного поля, який відповідатиме зосередженому нагріву.

Таким чином, за формулою (11) одержуємо

$$B_0 = \frac{1}{\theta_1} \exp(-(\xi - \alpha)^2) \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}}, \quad (14)$$

$$\text{де } \theta_1^2 = 1 + \theta, \quad \theta = 4kt, \quad \xi = \chi z, \quad \alpha = \chi c, \quad \chi = \frac{\sqrt{k}}{\theta_1}.$$

Використовуючи загальний розв'язок (12) задачі теплопровідності, отримаємо

$$B_1 = \frac{1}{2\theta_1} [\exp(-(\xi - \alpha)^2)(1 + \operatorname{erf} v_1) + \exp(-(\xi + \alpha)^2)(1 + \operatorname{erf} v_2) - 2\gamma\Omega] \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}},$$

$$\text{де } \Omega = \int_0^\infty \exp(-(\xi + \alpha + \lambda)^2 - \gamma\lambda)(1 + \operatorname{erf} v_4) d\lambda,$$

$$v_1 = \alpha\theta_2 + \frac{\xi}{\theta_2}, \quad v_2 = \alpha\theta_2 - \frac{\xi}{\theta_2}, \quad v_4 = v_2 - \frac{\lambda}{\theta_2}, \quad \theta_2 = \sqrt{\theta}, \quad \gamma = \frac{H}{\chi}.$$

Для випадку, коли $v_2 \gg 1$, вираз цієї функції значно спрощується (враховуємо, що тоді $\operatorname{erf}(v_j) \cong 1$, $j = 1, 2, 4$):

$$B_1 \cong \tilde{B}_1 = \frac{1}{\theta_1} [\exp(-(\xi - \alpha)^2) + \exp(-(\xi + \alpha)^2)(1 - R(v_3))] \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}},$$

$$\text{де } v_3 = \xi + \alpha + \gamma/2, \quad R(z) = \sqrt{\pi} \exp(z^2) \operatorname{erfc}(z).$$

Уточнимо умови, за яких можна використовувати цей наближений розв'язок. Безпосередньою перевіркою можна встановити, що \tilde{B}_1 точно задовольняє вихідне рівняння і граничну умову. При $\tau = 0$ маємо

$$\tilde{B}_1 = \exp(-k(x-a)^2) + \exp(-k(x+a)^2 \varepsilon),$$

де при $\sqrt{ka} > 2$ величина $|\varepsilon| < 1$. Тобто, якщо $\sqrt{ka} > 2$, то \tilde{B}_1 з достатньою для практичних розрахунків точністю задовольняє початкову умову.

Розв'язок одновимірної задачі теплопровідності для відрізка на основі (13) після перетворень набуде вигляду

$$B_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{q}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \theta_n(\zeta) [\theta_n(\alpha) + \delta_n] \exp\left(-\beta_n^2 \left(\text{Fo} + \frac{1}{4q}\right)\right) \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}},$$

де $\delta_n = \text{Re}(c_n - is_n) \exp(i\beta_n \zeta) \varepsilon_n$, $\varepsilon_n = -(\text{erfc}(u_n) + \text{erfc}(v_n))/2$,
 $q = kh^2$, $u_n = \sqrt{q}(1-\alpha) - i\beta_n/(2\sqrt{q})$, $v_n = \sqrt{q}(1+\alpha) + i\beta_n/(2\sqrt{q})$.

При малих значеннях змінної Fo , $q > 2$ і $a > 0$, коли збіжність ряду є повільною, доцільно застосовувати формулу

$$B_2(z, \tau) \cong B_1(z - h, \tau, H_1).$$

Отримані розв'язки, які записані стосовно границь $z = z_k$, будемо позначати надалі також як $B = B_z(z, \tau, \varphi)$.

Визначення функцій F і Φ . Знаходження функцій F та Φ для областей довільної форми може бути реалізовано лише числовими методами. У замкненому вигляді ці функції можуть бути визначені тільки для областей канонічної форми – прямокутника, кругового кільця і деяких інших часткових випадків.

Розглянемо випадок, коли область D_0 є прямокутником $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$ і коефіцієнт тепловіддачі має вигляд

$$\alpha_L = \begin{cases} \alpha_{1,2}^{(x)}, & x = x_{1,2}, \\ \alpha_{1,2}^{(y)}, & y = y_{1,2}. \end{cases}$$

Прийmemo, що

$$M_L = \begin{cases} M_x, & x = x_{1,2}, \\ M_y, & y = y_{1,2}, \end{cases}$$

де $M_x T = \frac{1}{\alpha_{1,2}^{(x)}} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_{1,2}^{(x)} T \right)$, якщо $x = x_{1,2}$; $M_y T = \frac{1}{\alpha_{1,2}^{(y)}} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_{1,2}^{(y)} T \right)$,

якщо $y = y_{1,2}$.

Для розглядуваного випадку крайову задачу для знаходження функції F запишемо у вигляді

$$\left(\Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) F = 0, \quad F|_{\tau=0} = f(x, y), \quad M_L F = 0, \quad (x, y) \in L, \quad (15)$$

де $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Приймемо, що $f = f_x(x)f_y(y)$. Тоді задача (15) є частковим випадком розглянутої вище загальної задачі (1), у якій відмінною від нуля є тільки функція θ . Тому за аналогією її розв'язок запишемо так:

$$F = B_y(y, \tau, f_y) F_x(x, \tau, f_x),$$

де функція $F_x(x, \tau, f_x)$ визначається із рівняння (5), яке має вигляд

$$\left(\Delta_x - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) F_x = 0, \quad F_x|_{\tau=0} = f_x(x), \quad x_1 < x < x_2, \\ M_x F_x = 0, \quad x = x_{1,2}.$$

Тут $B_y(y, \tau, f_y)$ визначається із рівняння (5) для знаходження B , у якому z , φ , M_z замінено відповідно на y , f_y , M_y . З формул (5) випливає, що $F_x = B_x(x, \tau, f_x)$.

Таким чином, отримуємо

$$F = B_y(y, \tau, f_y) B_x(x, \tau, f_x).$$

Рівняння для визначення функції Φ (5) перепишемо у вигляді

$$\left(\Delta_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\Phi = 0, \quad \Phi|_{\tau=0} = 0, \quad M_L\Phi = f\delta_+(\tau), \quad (x, y) \in L. \quad (16)$$

Прийемо, що $f = \begin{cases} b_{1,2}^{(x)}U(y), & x = x_{1,2}, \\ b_{1,2}^{(y)}V(x), & y = y_{1,2}, \end{cases}$, де $b_{1,2}^{(x)}$, $b_{1,2}^{(y)}$ – довільні сталі. Кра-

йова задача (16) є частковим випадком задачі (1), у якій відмінними від нуля є тільки функції P і N . Тому за аналогією її розв'язок можна записати у вигляді

$$F = A_y(y, \tau)B_x(x, \tau, V) + A_x(x, \tau)B_y(y, \tau, U).$$

Таким чином, розв'язок задачі теплопровідності для прямокутної області визначається за формулою (3), у якій:

$$\begin{aligned} T_W &= - \int_0^\tau q_1(\tau - \eta)B_z(z, \eta, \varphi_1)B_x(x, \eta, f_{1x})B_y(y, \eta, f_{1y})d\eta, \\ T_Z &= \int_0^\tau q_2(\tau - \eta)A_z(z, \eta)B_x(x, \eta, f_{2x})B_y(y, \eta, f_{2y})d\eta, \\ T_N &= \int_0^\tau q_3(\tau - \eta)B(z, \eta, \varphi_3)[A_y(y, \eta)B_x(x, \eta, U) + A_x(x, \eta)B_y(y, \eta, V)]d\eta, \\ T_0 &= B_z(z, \tau, \varphi_4)B_x(x, \tau, f_{4x})B_y(y, \tau, f_{4y}). \end{aligned} \quad (17)$$

Тут розглянуто випадок, коли $f_j = f_{jx}(x)f_{jy}(y)$ для $j = 1, 2, 4$ та

$$f_3 = \begin{cases} b_{1,2}^{(x)}U(y), & x = x_{1,2}, \\ b_{1,2}^{(y)}V(x), & y = y_{1,2}. \end{cases}$$

Для прикладу запишемо розв'язок для шару $-h < z < h$ при його нагріві джерелами тепла та теплообміном через граничні площини у випадку, коли відмінними від нуля є функції

$$\varphi_1(z), \quad f_1 = f_2 = f_x(x)f_y(y), \quad g_1(\tau) = g_2(\tau) = g(\tau).$$

Тоді на підставі співвідношень (17) вираз для температури матиме вигляд

$$T = \int_0^\tau q(\tau - \eta)[A_z(z, \eta) - B_z(z, \eta, \varphi_1)]B_x(x, \eta, f_x)B_y(y, \eta, f_y)d\eta. \quad (18)$$

Наведемо також розв'язок для випадку нескінченної пластинки при її нормально-круговому нагріві, тобто $f(x, y) = \frac{k}{\pi} \exp(-k(x^2 + y^2))$. Тоді $f_x(x) = E(k, x)$, $f_y(y) = E(k, y)$. На основі наведених виразів для функцій A і B_0 отримаємо

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{1}{\sqrt{1+4k\tau}} \exp\left(-\frac{k}{\sqrt{1+4k\tau}}x^2\right) \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}}, \\ B_y &= \frac{1}{\sqrt{1+4k\tau}} \exp\left(-\frac{k}{\sqrt{1+4k\tau}}y^2\right) \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\pi}}, \\ A_z - B_z &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(-\varphi_{1n} + \frac{d_n}{h^2}\right) \theta_n(\zeta) \exp(-\beta_n^2 Fo). \end{aligned}$$

У цьому випадку формулу для знаходження температури запишемо так:

$$T = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \left(\frac{d_n}{h^2} - \varphi_{1n}\right) \theta_n(\zeta) Q_n(r, \tau), \quad (19)$$

де

$$Q_n = \int_0^{\tau} q(\tau - \eta) \exp\left(-\frac{\beta_n^2}{h^2} \eta - \frac{r^2}{4\eta + k'}\right) \frac{d\eta}{4\eta + k'}, \quad k' = \frac{1}{k}.$$

Вираз (19) збігається із наведеним для цього випадку розв'язком із [7], який отримано іншим шляхом. Зазначимо, що ряд у формулі (19) збігається повільно. Тому в [7] проведено покращення його збіжності, що вимагало подолання значних труднощів. У той же час для розрахунків доцільніше використовувати безпосередньо розв'язок у вигляді (17), оскільки наведені вище асимптотичні вирази (10) для рядів у підінтегральному виразі дозволяють уникнути погіршення збіжності для довільних випадків, у тому числі й для розглядуваного.

Загалом для довільних областей функції F і Φ є розв'язками деяких задач теплопровідності для тонких пластин без тепловіддачі. Задачі такого класу також достатньо досліджені, а результати наведені у літературі, зокрема в [3, 5, 9].

Результати числового аналізу. Для прикладу проведено розрахунки температури у напівнескінченній $y > 0$, $-\infty < x < \infty$, $-h < z < h$, та в нескінченній пластині завтовшки $2h$, що нагріваються шляхом теплообміну з середовищем через границю $z = h$. Нехай температура середовища описується нормально-круговим законом Гаусса, при цьому $T_c = S \exp(-k[(x - vt)^2 + (y - a_y)^2])$, $S = \text{const}$. Це відповідає випадку руху середовища зі швидкістю v уздовж осі Ox з центром області нагріву в точці (vt, a_y) . При розрахунках приймали: $T|_{\tau=0} = 0$; $Bi_1 = Bi_2 = 0.1$; $a = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $h = 0.005 \text{ м}$; $k = 0.0001 \text{ м}^2/\text{с}$; $v = 0.01 \text{ м/с}$; $a_y = 0.02 \text{ м}$; $t = 100 \text{ с}$. Температуру вздовж прямої руху центра джерела при $y = 0.02 \text{ м}$ (крива 1) та на границі напівнескінченної пластини $y = 0$ (крива 2) при $z = h$ наведено на рис. 1. Аналогічні результати для нескінченної пластини наведено у такому ж порядку на рис. 2. Тут вибрано рухому систему координат із початком у центрі нагріву.

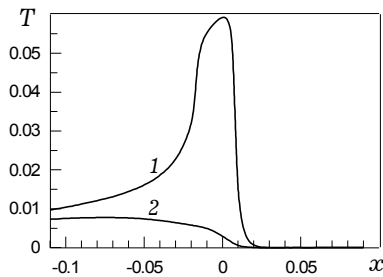


Рис. 1

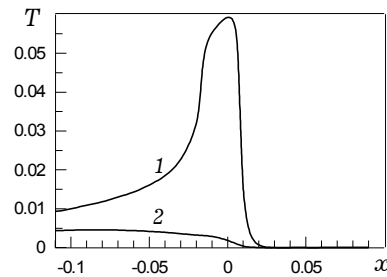


Рис. 2

Як бачимо з графіків, вплив границі на значення температури в області нагріву є незначним. У той же час температура на границі істотно відрізняється від температури в нескінченній пластині.

Розглянуто також випадок, коли $v = 0$, тобто $T_c = S \exp(-k[x^2 + (y - a_y)^2])$. Тут центр області нагріву розміщено в точці $(0, a_y)$. При розрахунках приймали: $T|_{\tau=0} = 0$, $a_y = 0.02 \text{ м}$. Температура при $x = 0$, $z = h$ залежно від координати y для моменту часу $t = 25 \text{ с}$ наведена на рис. 3. Крива 1 відповідає розподілу температури у напівнескінченній пластині, крива 2 - у нескінченній. Рис. 4 в аналогічному порядку ілюструє залежність температури від координати y для моменту часу $t = 50 \text{ с}$ за таких же умов.

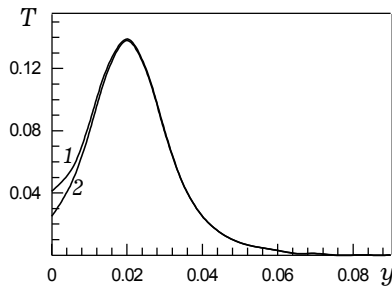


Рис. 3

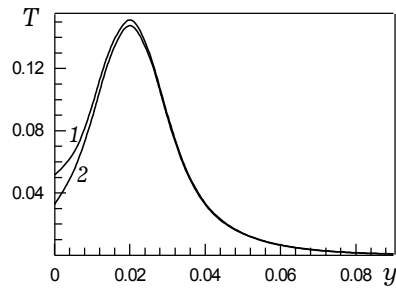


Рис. 4

Аналогічні результати при $a_y = 0.01$, $t = 100$ с наведено на рис. 5. Крива 1 характеризує розподіл температури у напівнескінченній пластині залежно від координати y , крива 2 – такі ж результати для нескінченної пластини.

Як видно з графіків, температура в нескінченній і напівнескінченній пластинках відрізняється тільки біля границі пластини. У всіх розглянутих випадках температура при $t = 100$ с в області максимальних температур виходить на асимптотичний режим.

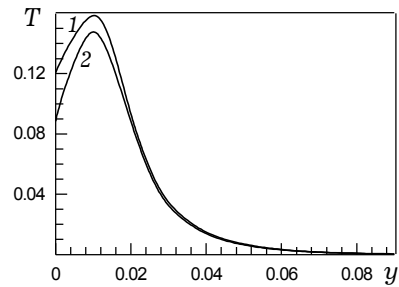


Рис. 5

Отже, у роботі показано, що розв'язування низки тривимірних задач нестационарної теплопровідності для тіл циліндричної форми зводиться до розв'язування трьох одновимірних задач теплопровідності. У випадку задач для циліндричних тіл з перерізом довільної форми отримуємо рівняння, що має подібний вигляд до рівняння теплопровідності для тонкої пластинки без тепловіддачі. Підхід може бути застосованим до розв'язування задач теплопровідності для тіл, що нагріваються внутрішніми джерелами тепла та шляхом теплообміну за законом Ньютона за умови, що функції, які описують нагрів, можуть бути зображені у вигляді функцій з відокремленими змінними.

1. Болотин В. В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // Прикл. математика и механика. – 1960. – 24, № 2. – С. 361–363.
2. Каленюк П. І., Нитребич З. М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту «Львів. політехніка», 2002. – 292 с.
3. Карслу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
4. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.
6. Максимович В. Н., Пляцко Г. В. К задаче определения нестационарных температурных полей в пластинках и оболочках // Мат. методы в термомеханике. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 100–109.
7. Максимович В. Н., Хомляк Л. В. // Решение нестационарных задач теплопроводности для пластин // Инж.-физ. журн. – 1985. – 49, № 4. – С. 694–695.
8. Мотовиловец И. А., Козлов В. И. Термоупругость. – Киев: Наук. думка, 1987. – 263 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 1.
9. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. – Киев: Наук. думка, 1972. – 308 с.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
11. Чибиряков В. К. Об уравнениях теплопроводности для пластин при конвективном теплообмене с боковых поверхностей. // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1971. – 15. – С. 60–64.

**РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ
НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ**

Построено общее решение задач нестационарной теплопроводности для тел цилиндрической формы, имеющих теплообмен с внешней средой и нагреваемых внутренними источниками тепла. Решение представлено через одномерные интегралы от произведения решений дополнительных одно- и двумерных задач теплопроводности. Рассмотрены случаи, когда выражения для температуры записываются через решения трех одномерных задач. Детально проанализированы температурные поля при сосредоточенном и нормально-круговом нагреве.

**SOLUTION OF BOUNDARY-VALUE HEAT CONDUCTION PROBLEMS FOR CYLINDRICAL
BODIES ON THE BASIS OF MODIFIED METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES**

A general solution to the non-stationary heat conduction problems for bodies of cylindrical shape is constructed. The bodies have heat exchange with the environment and are heated by internal heat sources. This solution is presented in terms of one-dimensional integrals from the products of solutions to auxiliary one- and two-dimensional heat conduction problems. The cases are noted, when the expressions for temperature are written in terms of solutions to three one-dimensional problems. The general solutions to auxiliary one-dimensional heat conduction problems are presented. The temperature fields under concentrated and normally-circular heating are analyzed in detail.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.12.03