

## ПОБУДОВА ІТЕРАЦІЙНОЇ СХЕМИ ВИЗНАЧЕННЯ РОЗПОДІЛУ ДЕПРЕСІЇ ТИСКУ В ГОРИЗОНТАЛЬНИХ ТРУБОПРОВОДАХ

*Течіння газу в трубопроводах у нестационарному випадку описується нелінійною системою взаємозв'язаних диференціальних рівнянь із частинними похідними. Запропоновано спосіб лінеаризації вихідної системи, знайдено її розв'язок і розглянуто побудову ітераційної схеми визначення розподілу тиску по довжині труби.*

У диспетчерських розрахунках гідравлічні характеристики газотранспортного потоку розраховують у стаціонарному режимі. Це, в основному, пов'язано з тим, що стаціонарний режим течіння газу достатньо добре вивчений. Розрахункові схеми побудовано на простих аналітичних залежностях, які описують процес течіння в ізотермічному режимі при певних умовах на геометричні параметри трубопроводів та умови течіння. Однак при побудові газотранспортних мереж за рахунок зміни режимів роботи процес течіння газу, як правило, є нестационарним. Крім цього, час входження потоку газу в стаціонар у трубопроводах високого та середнього тиску є достатньо великим (порядку декількох годин). Все це призводить до значної похибки при гідравлічних розрахунках. У зв'язку з цим виникає необхідність в розробці нестационарних моделей течіння газу для широкого класу трубопроводів.

Нестационарний процес течіння газу описується нелінійною системою взаємозв'язаних диференціальних рівнянь із частинними похідними [1, 2]

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\lambda v^2}{2D} \rho + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

У першому рівнянні враховано втрати енергії на тертя, нестационарний опір і на переборення різниці перепаду висот трубопроводу. Друге рівняння характеризує кількісний баланс газу.

У системі (1) позначено:  $\ell$  – довжина трубопроводу,  $x \in [0, \ell]$ ;  $t$  – час;  $p = p(x, t)$  – тиск газу;  $\rho$  – густина;  $v$  – швидкість;  $\lambda$  – коефіцієнт гідравлічного опору;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $h$  – перепад висот по трасі трубопроводу;  $D$  – діаметр труби;  $c$  – швидкість звуку в газі;  $\alpha$  – коефіцієнт Коріоліса.

Вихідна система є нелінійною і знаходження її розв'язку в аналітичному вигляді пов'язане зі значними труднощами. У працях [1, 2] запропоновано декілька способів лінеаризації такої системи без урахування сил Коріоліса та перепаду висот для довгих трубопроводів. Лінеаризовані таким чином системи рівнянь описують течіння газу в горизонтальних трубопроводах у певних діапазонах зміни швидкості по довжині трубопроводу. У трубах великого діаметру при значних об'ємах переносу газу необхідно враховувати зміну його кінетичної енергії, на що мало звертають увагу в публікаціях з цієї тематики. Розглянемо спосіб лінеаризації, який дає можливість уточнити лінеаризовану модель і побудувати ітераційний процес розв'язування системи (1).

Позначимо  $f(v) = v^2$  і цю криву замінимо хордою та дотичною, паралельною до хорди. Оскільки при транспортуванні газу швидкість змінюється від  $v_1$  до  $v_2$ , то рівняння хорди й дотичної на проміжку

$v \in [v_1, v_2]$  мають вигляд  $\varphi_i(v) = a_{0i}v - b_{0i}$ , де  $i = 1$  відповідає хорді, а  $i = 2$  – дотичній. При цьому  $a_{01} = a_{02} = v_1 + v_2$ ,  $b_{01} = v_1v_2$ ,  $b_{02} = 0.5(v_1 + v_2)^2$ . Враховуючи це, систему (1) в ізотермічному режимі течіння запишемо як

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda a_{0i}}{2D} \rho v - \frac{\lambda b_{0i}}{2D} \rho = \frac{\lambda \rho}{2D} [v^2 - \varphi_i(v)],$$

$$-\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t},$$

або

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + a_i \omega - b_i p = \frac{\lambda p}{2D} [v^2 - \varphi_i(v)],$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

де позначено

$$b_i = \frac{\lambda b_{0i}}{2Dg\alpha RT}, \quad \omega = \rho v, \quad a_i = \frac{\lambda a_{0i}}{2D}.$$

Ефективними методами розв'язування такого класу задач є ітераційні. Відомо [5], що ітераційні схеми є стійкими й швидкозбіжними в тому випадку, коли нульове наближення (лінеаризований варіант) знаходиться достатньо точно та є близьким до шуканого розв'язку. Лінеаризований варіант системи (2) має вигляд

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + a\omega - bp = 0,$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Якщо  $p^{(j)}(x, t)$  та  $w^{(j)}(x, t)$  –  $j$ -наближення шуканого розв'язку нелінійної системи, то  $(j+1)$ -наближення знаходимо шляхом розв'язання наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial \omega^{(j+1)}}{\partial t} + \frac{\partial p^{(j+1)}}{\partial x} + a_i \omega^{(j+1)} - b_i p^{(j+1)} = \frac{\lambda p}{2D} [(v^{(j)})^2 - \varphi_i(v^{(j)})],$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p^{(j+1)}}{\partial t} + \frac{\partial \omega^{(j+1)}}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Систему (4) можна розв'язувати як числовими, так і аналітичними методами.

Перейдемо до розв'язування системи (3).

Якщо  $s$  – параметр перетворення Лапласа – Карсона [3, 4],  $\bar{p} \equiv \bar{p}(x, s)$  і  $\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}(x, s)$  – зображення відповідних оригіналів  $p(x, t)$  і  $\omega(x, t)$ , то в просторі Лапласа – Карсона система (3) набуває вигляду

$$(s + a)\bar{\omega} + \bar{p}' - b\bar{p} = s\omega(x, 0),$$

$$s\bar{p} + c^2\bar{\omega}' = sp(x, 0). \quad (5)$$

У системі (5) штрихом позначено похідну відповідної функції за координатою  $x$ . Оскільки

$$\bar{\omega} = \frac{1}{s + a} [s\omega(x, 0) - \bar{p}' + b\bar{p}], \quad (6)$$

то підстановкою виразу (6) у друге з рівнянь системи (5) отримуємо диференціальне рівняння другого порядку

$$c^2 \bar{p}'' - bc^2 \bar{p}' - s(s+a)\bar{p} = \Theta(x, s), \quad (7)$$

де

$$\Theta(x, s) = (s+a) \left[ sp(x, 0) - \frac{c^2 s}{s+a} \omega'(x, 0) \right].$$

Розв'язок рівняння (4) за граничних умов

$$p(0, \tau) = p_1(\tau), \quad p(\ell, \tau) = p_2(\tau),$$

які в зображеннях Лапласа - Карсона мають вигляд

$$\bar{p}(0, s) = \bar{p}_1(s), \quad \bar{p}(\ell, s) = \bar{p}_2(s),$$

задається формулою

$$\begin{aligned} \bar{p}(x, s) = & \bar{p}^0(x, s) + [\bar{p}_1(s) - \bar{p}^0(0, s)] e^{y_1 x} + \\ & + e^{-b(\ell-x)/2} \frac{\text{sh } x\sqrt{s}}{\text{sh } \ell\sqrt{s}} \{ \bar{p}_2(s) - \bar{p}^0(\ell, s) - [\bar{p}_1(s) - \bar{p}^0(0, s)] e^{y_1 \ell} \}, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\bar{p}^0(x, s)$  - частковий розв'язок неоднорідного рівняння (7), а

$$\bar{s} = c^{-2}s(s+a) + \left(\frac{b}{2}\right)^2, \quad y_1 = \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\bar{s}}.$$

У формулі (8) граничні та початкові умови записано в загальному вигляді. Знайдемо оригінал  $p(x, t)$  зображення  $\bar{p}(x, s)$  за таких граничних і початкових умов:

$$p(x, 0) = p_0, \quad p(0, t) = p_h, \quad p(\ell, t) = p_k, \quad \omega(x, 0) = \omega_0 x + \omega_1,$$

які в зображеннях Лапласа - Карсона мають вигляд

$$\bar{p}_1(s) = \bar{p}(0, s) = p_h, \quad \bar{p}_2(s) = \bar{p}(\ell, s) = p_k, \quad \Theta(x, s) = s(s+a)p_0 - sc^2\omega_0.$$

Будемо вважати, що початкові та граничні умови є узгодженими, тобто  $p_0 = p_h$ . Тоді розв'язок зображення  $\bar{p}(x, s)$  буде таким:

$$\begin{aligned} p(x, s) = & p_0 - \frac{c^2\omega_0}{s+a} - \frac{\omega_0}{s+a} e^{bx/2} \exp(-x\sqrt{s}) + (p_2 - p_0) e^{b(\ell-x)/2} \frac{\text{sh } x\sqrt{s}}{\text{sh } \ell\sqrt{s}} - \\ & - \frac{\omega_0}{s+a} e^{-b(\ell-x)/2} \frac{\text{sh } x\sqrt{s}}{\text{sh } \ell\sqrt{s}} + \frac{\omega_0}{s+a} e^{bx/2} \exp(-\ell\sqrt{s}) \frac{\text{sh } x\sqrt{s}}{\text{sh } \ell\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Доданки в правій частині рівності (9), починаючи з другого, позначимо через  $F_i(s)$ ,  $i = 1, 5$ , і знайдемо відповідні оригінали  $f_i(t)$ . Оригінали зображень  $F_1(s) = \frac{1}{s+a}$ ,  $F_2(s) = \frac{1}{s+a} \exp(-x\sqrt{s})$  мають вигляд [3, 4]:

$$f_1(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \quad (10)$$

та

$$\begin{aligned} f_2(t) = & \frac{1}{a} e^{-\rho x/c} \left[ 1 - \exp\left(-a\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \right] + \\ & + \sigma\left(\frac{x}{c}\right) e^{-at} \left\{ \frac{1}{a} e^{at} \int_{x/c}^{\tau} e^{-\rho\xi} \frac{I_1(\sigma\sqrt{\xi^2 - (x/c)^2})}{\sqrt{\xi^2 - (x/c)^2}} d\xi - \right. \\ & \left. - \frac{1}{a} \int_{x/c}^{\tau} e^{(a-\rho)\xi} \frac{I_1(\sigma\sqrt{\xi^2 - (x/c)^2})}{\sqrt{\xi^2 - (x/c)^2}} d\xi \right\}, \quad t > x/c, \end{aligned} \quad (11)$$

при цьому  $f_2(t) = 0$  для  $t < x/c$ ;  $I_j(x)$  – функція Бесселя уявного аргументу порядку  $j$ .

Щоб знайти оригінал  $f_3(t)$  зображення  $F_3(s) = \frac{\text{sh } x\sqrt{s}}{\text{sh } \ell\sqrt{s}}$ , розкладемо  $F_3(s)$  на прості дроби:

$$F_3(s) = \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \frac{s^2 + as + \bar{b}}{(s + s_1)(s + s_2)}, \quad (12)$$

де  $\bar{b} = \left(\frac{bc}{2}\right)^2$ ,  $d = \bar{b} + \left(\frac{k\pi c}{\ell}\right)^2$ ,  $s_{1,2} = \frac{1}{2} \left( a \mp \sqrt{a^2 - 4d} \right)$ . Якщо тепер у кожному доданку ряду (12) перейти до оригіналу, то отримаємо

$$F_3(s) = \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{\ell} (\sigma_1 + \sigma_2 e^{-s_1 t} + \sigma_3 e^{-s_2 t}).$$

Тут позначено

$$\sigma_1 = \frac{\bar{b}}{s_1 s_2}, \quad \sigma_2 = \frac{s_1^2 + as_1 + \bar{b}}{s_1(s_1 - s_2)}, \quad \sigma_3 = -\frac{s_2^2 + as_2 + \bar{b}}{s_2(s_1 - s_2)}.$$

Розклавши функцію  $F_4(s) = \frac{1}{s+a} \frac{\text{sh } x\sqrt{s}}{\text{sh } \ell\sqrt{s}}$  на прості дроби:

$$F_4(s) = \frac{x}{\ell} \frac{1}{s+a} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \frac{s^2 + as + \bar{b}}{(s+a)(s+s_1)(s+s_2)},$$

отримаємо оригінал

$$f_4(t) = \frac{x}{\ell} f_1(t) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{\ell} g_4(t),$$

де

$$g_4(t) = \frac{1}{s_1 - s_2} (e^{-s_2 t} - e^{-s_1 t}) + \frac{\bar{b}}{a(a-s_1)(a-s_2)} (1 - e^{-at}) - \\ - \frac{\bar{b}}{s_1(a-s_1)(s_1-s_2)} (1 - e^{-s_1 t}) + \frac{\bar{b}}{s_2(a-s_2)(s_1-s_2)} (1 - e^{-s_2 t}).$$

Оригінал від зображення

$$F_5(s) = \frac{1}{s+a} \exp(-\ell\sqrt{s}) \frac{\text{sh } x\sqrt{s}}{\text{sh } \ell\sqrt{s}}$$

отримуємо аналогічно:

$$f_5(t) = \frac{1}{s+a} + \sigma \frac{x}{\ell} \left\{ \frac{x}{\ell} \int_{x/c}^t e^{-\rho(t-\xi)} \frac{I_1(\sigma\sqrt{\xi^2 - (x/c)^2})}{\sqrt{\xi^2 - (x/c)^2}} d\xi - \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \int_{x/c}^t e^{-\rho(t-\xi)} \frac{I_1(\sigma\sqrt{\xi^2 - (x/c)^2})}{\sqrt{\xi^2 - (x/c)^2}} g_5(\xi) d\xi \right\},$$

$t > x/c$ , при цьому  $f_5(t) = 0$  для  $t < x/c$ .

Згідно з формулою (9) оригінал  $p(x, t)$  зображення  $\bar{p}(x, s)$  буде таким:

$$p(x, t) = p_0 + \bar{\omega}_0 (f_1(t) - e^{bx/2} f_2(t) - e^{-b(\ell-x)/2} f_4(t) + \\ + e^{bx/2} f_5(t)) + (p_2 - p_0) e^{-b(\ell-x)/2} f_3(t), \quad (16)$$

де функції  $f_i(t)$ ,  $i = \overline{1,5}$ , визначені вище. Розподіл масопереносу  $\omega(x,t)$  можна знайти з рівняння балансу газу за відомим розподілом тиску  $p(x,t)$ , або, визначивши з рівняння (6) зображення  $\bar{\omega}(x,s)$ , знайти за ним відповідний оригінал.

Розподіл тиску в стаціонарному режимі можна отримати з формули (9) на основі теореми про граничні переходи [3], згідно з якою  $p(x,\infty) = \bar{p}(x,0)$ . Тому, оскільки в стаціонарному випадку  $\bar{s} = (b/2)^2$ , з формули (9) дістаємо

$$p(x,\infty) = p_0 + (p_2 - p_0)e^{-b(\ell-x)/2} \frac{\text{sh}(bx/2)}{\text{sh}(b\ell/2)}.$$

Отримана аналітична залежність тиску від довжини труби та часу дає можливість дослідити вплив довільного параметра фізичного процесу на розподіл тиску по довжині труби. Однак обчислення функції  $p(x,t)$  при граничних значеннях деяких параметрів, наприклад, при  $\lambda = 0$ , пов'язане з труднощами обчислювального характеру. У таких випадках доцільно розв'язувати вихідну систему при граничних значеннях цих параметрів.

Так, при  $\lambda = 0$ , що відповідає відсутності гідравлічного опору, розв'язок системи (3) за накладених вище початкових і граничних умов у зображеннях Лапласа – Карсона отримуємо з формули (9) при  $a = b = 0$ , оригінал для якого задається співвідношенням

$$p(x,t) = p_0 + \bar{\omega}_0 \left( t - f_5^0(x,t) + \begin{cases} 0, & t < x/c \\ t - x/c, & t > x/c \end{cases} + \begin{cases} 0, & t < \ell/c \\ f_5^0(x, t - \ell/c), & t > \ell/c \end{cases} + (p_2 - p_0)f_4^0(x,t) \right), \quad (17)$$

де

$$f_4^0(x,t) = \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cos \frac{k\pi x}{\ell} t,$$

$$f_5^0(x,t) = \frac{x}{\ell} t + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{\ell}{k\pi c} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} t.$$

Формула (17) отримується з рівності (16) при  $a \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow 0$ . Числове визначення границь у суперпозиції з операцією підсумовування рядів Фур'є призводить до значної похибки, оскільки обидві задачі є некоректними за Тихоновим.

На рис. 1 показана характерна залежність зміни тиску  $p(x,t)$  від часу в точці  $x = 20$  км для трубопроводу довжини 70 км і діаметра 1 м при переході зі стаціонарного значення 49 атм до стаціонарного значення 41 атм. Як випливає з аналізу результатів обчислень, час входу процесу течіння газу в стаціонарний режим є достатньо великим. Якщо врахувати, що зміна режимів газотранспортних потоків може відбуватися декілька разів на добу, то використання залежностей стаціонарного течіння газу для визначення гідравлічних параметрів потоку може призвести до значних похибок, що підтверджує необхідність дослідження потоків газу в трубопроводах у неусталених режимах течіння.

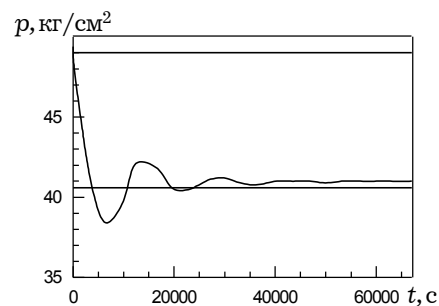


Рис. 1

З аналізу наведених результатів випливає, що обчислені за отриманими формулами значення тиску є близькими до відомих у літературі при однакових початково-граничних умовах. Однак на відміну від способів лінеаризації, запропонованих у роботах [1, 2], де в коефіцієнт лінеаризації входить середнє значення швидкості, при розглядуваному способі лінеаризації у коефіцієнти  $a$ ,  $b$  входять граничні значення зміни швидкості, варіація яких дозволяє точніше адаптувати знайдений розв'язок на основі реальних даних. Крім цього, оскільки крива  $f(v) = v^2$  лежить між січною і дотичною, це дає можливість до певної міри судити про відхилення розв'язку вихідної системи в лінеаризованому варіанті від його точного значення. Далі, оскільки  $\omega = \rho v$ , то за формулою  $\rho = p/gzRT$  [1, 2] і визначеними функціями  $\omega(x, t)$  і  $p(x, t)$  можна знайти швидкість течіння газу  $v(x, t)$  у лінеаризованому варіанті вихідної системи. За відомих розподілом швидкості  $v(x, t)$  по довжині труби на основі формули (4) можна уточнити як розподіл тиску  $p(x, t)$ , так і розподіл масового переносу  $\omega(x, t)$ .

1. Александров А. И., Яковлев Е. И. Проектирование и эксплуатация систем дальнего транспорта газа. – М.: Недра, 1974. – 432 с.
2. Бобровский С. А., Щербаков С. Г., Яковлев Е. И., Гарляускас А. И., Грачев В. В. Трубопроводный транспорт газа. – М.: Наука, 1976. – 495 с.
3. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. – М.: Высш. шк., 1975. – 407 с.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш. шк., 1965. – 465 с.
5. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1986. – 584 с.

#### ПОСТРОЕНИЕ ИТЕРАЦИОННОЙ СХЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕПРЕССИИ ДАВЛЕНИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ

*Течение газа в трубопроводах в нестационарном случае описывается нелинейной системой взаимосвязанных дифференциальных уравнений в частных производных. Предложен способ линеаризации исходной системы, найдено ее решение и рассмотрено построение итерационной схемы определения распределения давления по длине трубы.*

#### ITERATION SCHEME CONSTRUCTION FOR DETERMINATION OF PRESSURE DEPRESSION DISTRIBUTION IN HORIZONTAL CONDUITS

*Gas flow in conduits in the non-stationary case is described by a nonlinear system of correlative differential equations in partial derivatives. The initial system linearization method is offered, the solution to this system is found and the iteration scheme construction for determination of the pressure distribution along the tube length is considered in the given work.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
11.06.01