УДК 517.526

Т. М. Антонова, Н. П. Гоєнко

НАБЛИЖЕННЯ ВІДНОШЕННЯ ФУНКЦІЙ ЛАУРІЧЕЛЛИ F_D ГІЛЛЯСТИМ ЛАНЦЮГОВИМ ДРОБОМ ТИПУ НЬОРЛУНДА У КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

Досліджено збіжність гіллястого ланцюгового дробу типу Ньорлунда, що є розвиненням відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли $F_D^{(N)}(a, b_1, b_2 \ldots, b_N; c; z_1, z_2 \ldots, z_N)$ в області $\{Re\ z_k < 1/2,\ k = \overline{1,N}\}$ при умові, що $a \geq 0$, $b_i \geq 0$ $(i = \overline{1,N})$, $2c \geq a + b_1 + b_2 + \ldots + b_N + 1$.

Неперервні дроби є ефективним апаратом наближення функцій однієї змінної. Застосування різних алгоритмів до побудови розвинень відношень гіпергеометричних функцій приводить до різних типів неперервних дробів. Так, для відношення гіпергеометричних функцій

$$\frac{{}_2F_1(a, b; c; z)}{{}_2F_1(a, b+1; c+1; z)},$$

Ґаус одержав розвинення у правильний C — дріб [6, 13]. Ньорлунд (Nörlund) розглянув розвинення відношень гіпергеометричних функцій

$$\frac{{}_2F_1(a, b; c; z)}{{}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z)}$$

у неперервний дріб іншого типу [13, 12]. Значна увага до одержаних розвинень у неперервні дроби зумовлена, зокрема, тим, що дріб Ґауса збігається у площині з розрізом, дріб Ньорлунда — у півплощині, в той час, як область збіжності степеневого ряду для функції ${}_2F_1(a, b, c, z)$ — одиничний круг з центром у початку координат. Тому природно постало питання про застосування багатовимірних узагальнень неперервних дробів — гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) — до наближення аналітичних функцій багатьох змінних. Серед результатів, одержаних у цьому напрямку, відзначимо дослідження одного із двовимірних узагальнень дробу Ньорлунда для відношення функцій Аппеля F_3 [3, 7, 8].

У даній роботі розглядається питання про наближення відношення гіпергеометричних функцій Лаурічелли

$$\frac{F_D(a, \mathbf{b}; c; \mathbf{z})}{F_D(a+1, \mathbf{b}+\mathbf{e}_1; c+1; \mathbf{z})} =: F(\mathbf{z}) \tag{1}$$

гіллястими ланцюговими дробами. Функція Лаурічелли F_D є одним із узагальнень гіпергеометричної функції Ґауса ${}_2F_1(a, b; c; z)$ і означується кратним степеневим рядом [9, 11]

$$F_D(a, \mathbf{b}; c; \mathbf{z}) = \sum_{k_1, \ldots, k_N = 0}^{\infty} \frac{(a)_{k_1+\cdots+k_N}(b_1)_{k_1}\cdots(b_N)_{k_N}}{(c)_{k_1+\cdots+k_N}} \frac{z_1^{k_1}\cdots z_N^{k_N}}{k_1!\cdots k_N!}, \tag{2}$$

де $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_N)$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_N)$, параметри $a, b_1, \ldots, b_N, c$ — комплексні сталі, причому $c \neq 0, -1, -2, \ldots$; $z_1, z_2, \ldots, z_N$ — комплексні змінні, $(\alpha)_k$ — символ Похгаммера: $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$, $k = 1, 2, \ldots$. Якщо параметри a або b_i при деякому i, $1 \leq i \leq N$, дорівнюють нулю або набувають цілих від'ємних значень, тоді ряд (2) вироджується в поліном відносно змінних $z_1, z_2, \ldots, z_N$. У інших випадках, ряд (2) збігається в полікрузі [11] $D_1 = \left\{\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N : |z_i| < 1,\, i = \overline{1, N}\right\}$. Для ряду (2) справджуються деякі рекурентні співвідношення, зокрема [4]

$$F_D(a, \mathbf{b}; c; \mathbf{z}) = \left(1 - \frac{a+1}{c} z_k - \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{c} z_i\right) F_D(a+1, \mathbf{b} + \mathbf{e}_k; c+1; \mathbf{z}) +$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(a+1)(b_i + \delta_i^k)}{c(c+1)} z_i (1 - z_i) F_D(a+2, \mathbf{b} + \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_i; c+2; \mathbf{z}),\ k = \overline{1, N}, \quad (3)$$

де $\mathbf{e}_i = (\delta_1^i, \delta_2^i, \ldots, \delta_N^i)$; δ_j^i — символ Кронекера. На основі формул (3) побудовано розвинення відношення (1) у скінченний гіллястий ланцюговий дріб вигляду:

$$F(\mathbf{z}) = b_0(\mathbf{z}) + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}(\mathbf{z})}{b_{i(1)}(\mathbf{z})} + \cdots + \sum_{i_{n-1}=1}^{N} \frac{a_{i(n-1)}(\mathbf{z})}{b_{i(n-1)}(\mathbf{z})} + \sum_{i_n=1}^{N} \frac{a_{i(n)}(\mathbf{z})}{P_{i(n)}(\mathbf{z})}, \quad (4)$$

де

$$P_{i(n)}(\mathbf{z}) = \frac{F_D\left(a+n,\, \mathbf{b} + \sum\limits_{j=1}^{N} p_{i(n-1)j} \mathbf{e}_j;\, c+n;\, \mathbf{z}\right)}{F_D\left(a+n+1, \mathbf{b} + \sum\limits_{j=1}^{N} p_{i(n)j} \mathbf{e}_j;\, c+n+1;\, \mathbf{z}\right)}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$ — мультиіндекс, $i(k) \in I_k := \{i(k) :\ i_p = \overline{1, N},\ p = \overline{1, k}\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ $i(0) = 0$, елементи ГЛД (4) обчислюються за формулами

$$b_0(\mathbf{z}) = 1 - \frac{a+1}{c} z_1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{c} z_i,\ a_{i(k)}(\mathbf{z}) = \frac{(a+k)(b_{i_k} + p_{i(k)})}{(c+k-1)(c+k)} z_{i_k} (1 - z_{i_k}), \quad (5)$$

$$b_{i(k)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{a+k}{c+k} z_{i_k} - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j + p_{i(k)j}}{c+k} z_j, \qquad p_{i(k)} = \sum_{m=1}^{k-1} \delta_{i_m}^{i_k} + \delta_{i_k}^1. \quad (6)$$

Нескінченний ГЛД вигляду

$$b_0(\mathbf{z}) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z})}, \quad (7)$$

де частинні чисельники $a_{i(k)}(\mathbf{z})$ і частинні знаменники $b_{i(k)}(\mathbf{z})$ обчислюються за формулами (5)–(6) для $k = 1, 2, \ldots,$ є формальним розвиненням відношення (1) у ГЛД. Зауважимо, що при $N = 1$ ГЛД (7) перетворюється у неперервний дріб Ньорлунда для відношення функцій Ґауса.

Апроксимантами (підхідними дробами) ГЛД (7) називаються скінченні ГЛД вигляду $f_n(\mathbf{z}) = b_0(\mathbf{z}) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z})}$.

Оскільки елементи дробу (7) $a_{i(k)}(\mathbf{z})$, $b_{i(k)}(\mathbf{z})$ є многочленами від z_1, $z_2, \ldots, z_N$, то $f_n(\mathbf{z})$ — раціональні функції.

Гіллястий ланцюговий дріб (7) збігається (рівномірно збігається) в деякій області D, якщо збігається (рівномірно збігається) послідовність його апроксимант $\{f_n(\mathbf{z})\}$ в області D.

Збіжність ГЛД (7) досліджувалась [5, 2] в областях

$$\left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N : z_i < 1/2, i = \overline{1,N}\right\}$$

і

$$\left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : 1/2 - Re\ z_i < \sqrt{|z_i(1-z_i)|}, i = \overline{1,N}\right\}.$$

У даній роботі розглядаємо випадок $\left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : Re\ z_i < 1/2, i = \overline{1,N}\right\}$.

Теорема 1. *Нехай параметри $a, b_1, b_2, \ldots, b_N, c$ гіпергеометричної функції F_D є дійсні числа, що задовольняють наступні умови:*

$$a \geq 0, \quad b_i \geq 0, \quad i = \overline{1,N}, \quad 2c \geq a + \sum_{j=1}^{N} b_j + 1. \tag{8}$$

Тоді

(A) *гіллястий ланцюговий дріб типу Ньорлунда* (7) *збігається рівномірно всередині області*

$$G = \left\{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N : Re\ z_i < \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1,N}\right\}$$

до голоморфної функції $f(\mathbf{z})$;

(Б) *функція $f(\mathbf{z})$ є аналітичним продовженням функції*

$$F(\mathbf{z}) := \frac{F_D(a, b_1, b_2 \ldots, b_N; c; \mathbf{z})}{F_D(a+1, b_1+1, b_2, \ldots, b_N; c+1; \mathbf{z})},$$

голоморфної в деякому околі початку координат, в область G.

Д о в е д е н н я твердження(A) грунтується на використанні наведених нижче теорем і лем.

Теорема 2. [1] *Нехай $\{\varphi_n(\mathbf{z})\}$ — послідовність голоморфних функцій в області $D \subset \mathbb{C}^N$, рівномірно обмежених всередині D, і $\{\varphi_n(\mathbf{z})\}$ збігається в кожній точці множини $\Delta \subset D$, яка є $2N$ — вимірним околом або N — вимірним дійсним околом деякої точки $\mathbf{z}^0 \in D$. Тоді $\{\varphi_n(\mathbf{z})\}$ збігається рівномірно всередині області D до голоморфної функції $\varphi(\mathbf{z})$.*

Теорема 3. [5] *Нехай параметри гіпергеометричної функції $F_D(a, b_1, b_2 \ldots, b_N; c; \mathbf{z})$ задовольняють умови*

$$a \geq 0, \quad b_i \geq 0, \ i = \overline{1,N}, \quad 2c \geq a + \sum_{i=1}^{N} b_i + 1.$$

Тоді гіллястий ланцюговий дріб (7) збігається в області

$$\left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N : \ z_i < 1/2, \ i = \overline{1,N}\right\}.$$

Лема 1. *Нехай елементи* $c_{i(k)}(\mathbf{z})$, $d_{i(k)}(\mathbf{z})$ *ГЛД*

$$d_0(\mathbf{z})+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}(\mathbf{z})}{d_{i(k)}(\mathbf{z})}, \tag{9}$$

які визначені в деякій області $D\subset\mathbb{C}^N$, *задовольняють умови:*

1).

$$Re\ d_{i(k)}(\mathbf{z})>0 \tag{10}$$

для довільного мультиіндексу $i(k)\in I_k$, $k-1,2,\dots,$ *і кожного* $\mathbf{z}\in D$;

2). *існують такі додатні функції* $g_{i(k)}(\mathbf{z})$, *визначені в області* D, *що для кожного* $\mathbf{z}\in D$,

$$0<g_{i(k)}(\mathbf{z})\le Re\ d_{i(k)}(\mathbf{z}),\ \ i(k)\in I_k,\ k=1,2,\dots, \tag{11}$$

і

$$\sum_{i_k=1}^{N}\frac{|c_{i(k)}(\mathbf{z})|-\ Re\ c_{i(k)}(\mathbf{z})}{g_{i(k)}(\mathbf{z})}\le 2(\ Re\ d_{i(k-1)}(\mathbf{z})-g_{i(k-1)}(\mathbf{z})), \tag{12}$$

$i(k)\in I_k$, $k=2,3,\dots$.

Тоді для залишків ГЛД (9) *справджуються нерівності*

$$Re\ Q^n_{i(k)}(\mathbf{z})\ge g_{i(k)}(\mathbf{z}),\quad \mathbf{z}\in D,\quad i(k)\in I_k,\quad k=1,2,\dots, \tag{13}$$

де

$$Q^n_{i(s)}(\mathbf{z})=d_{i(s)}(\mathbf{z})+\sum_{i_{s+1}=1}^{N}\frac{c_{i(s+1)}(\mathbf{z})}{Q^n_{i(s+1)}(\mathbf{z})},\quad Q^n_{i(n)}(\mathbf{z})=d_{i(n)}(\mathbf{z}), \tag{14}$$

$s=\overline{1,n-1}$, $n=1,2,\dots$.

Д о в е д е н н я проводиться методом математичної індукції. Позначимо $u^n_{i(k)}(\mathbf{z})=Re\ Q^n_{i(k)}(\mathbf{z})$. Нехай $\mathbf{z}=(z_1,z_2,\dots,z_N)$ — деяка фіксована точка області D. З позначення (14) і умови (11), випливає, що для довільного натурального n і довільного мультиіндексу $i(n)\in I_n$

$$u^n_{i(n)}(\mathbf{z})=\ Re\ d_{i(n)}(\mathbf{z})\ge g_{i(n)}(\mathbf{z}),$$

тобто нерівність (13) справджується для $k=n$. Припустимо, що вона правильна для деякого $k(1<k\le n)$ і довільного мультиіндексу $i(k)\in I_k$ у фіксованій точці $\mathbf{z}\in D$. Очевидно, що

$$u^n_{i(k-1)}(\mathbf{z})=Re\ d_{i(k-1)}(\mathbf{z})+\sum_{i_k=1}^{N}Re\ \frac{c_{i(k)}(\mathbf{z})}{Q^n_{i(k)}(\mathbf{z})}.$$

Розглянемо допоміжну функцію

$$h(x,y,u,v):=Re\ \frac{x+iy}{u+iv}=\frac{xu+yv}{u^2+v^2},\quad x,y,u,v\in\mathbb{R}.$$

Припускаючи, що x,y,u — фіксовані і $u>0$, знайдемо $\inf\limits_{-\infty<v<+\infty}h(x,y,u,v)$. Стаціонарні точки визначаються з рівняння $yv^2+2xuv-yu^2=0$. У випадку $y=0$

$$\inf_{-\infty<v<+\infty}h(x,y,u,v)=\begin{cases}0, & \text{при } x\ge 0,\\ \dfrac{x}{u}, & \text{при } x<0;\end{cases}$$

у випадку $y \neq 0$

$$\min_{-\infty<v<+\infty} h(x,y,u,v) = h\Big(-\frac{u}{y}(\sqrt{x^2+y^2}+x)\Big) = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2u}.$$

$$\text{Отже,} \quad \inf_{-\infty<v<+\infty} h(x,y,u,v) = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2u} \text{ при } u>0.$$

Тому, враховуючи умову (12), одержимо

$$u^n_{i(k-1)}(\mathbf{z}) \geq Re\ d_{i(k-1)}(\mathbf{z}) - \sum_{i_k=1}^{N} \frac{|c_{i(k)}(\mathbf{z})| - Re\ c_{i(k)}(\mathbf{z})}{2\ u^n_{i(k)}(\mathbf{z})} \geq$$

$$Re\ d_{i(k-1)}(\mathbf{z}) - \sum_{i_k=1}^{N} \frac{|c_{i(k)}(\mathbf{z})| - Re\ c_{i(k)}(\mathbf{z})}{2g_{i(k)}(\mathbf{z})} \geq g_{i(k-1)}(\mathbf{z}).$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Для довільного комплексного числа* $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$ *справджується нерівність*

$$|w(1-w)| - Re\ (w(1-w)) \leq 2\bigg(\frac{1}{2} - Re\ w\bigg)^2. \qquad (15)$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (15) після елементарних перетворень з врахуванням, що $w(1-w) = u(1-u) + v^2 + iv(1-2u)$, зводиться до очевидної нерівності $\left(\frac{1}{2} - u\right)^2 \geq 0$.

Д о в е д е н н я твердження (А) теореми 1. Покажемо, що послідовність апроксимант $\{f_n(\mathbf{z})\}$ ГЛД (7) є послідовністю голоморфних функцій, рівномірно обмежених всередині області G.

Зауважимо,що для довільного натурального n

$$f_n(\mathbf{z}) = Q^n_0(\mathbf{z}) = b_0(\mathbf{z}) + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{a_{i(1)}(\mathbf{z})}{Q^n_{i(1)}(\mathbf{z})},$$

де залишки ГЛД (7) обчислюються за формулами, аналогічними (14):

$$Q^s_{i(s)}(\mathbf{z}) = b_{i(s)}(\mathbf{z}), \quad Q^s_{i(k)}(\mathbf{z}) = b_{i(k)}(\mathbf{z}) + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{a_{i(k+1)}(\mathbf{z})}{Q^n_{i(k+1)}(\mathbf{z})},$$

$k = \overline{0, s-1}$, $s = 1, 2, \ldots$.
Переконаємось, що при виконанні умов теореми 1 елементи $a_{i(k)}(\mathbf{z})$, $b_{i(k)}(\mathbf{z})$ ГЛД (7) в області G задовольняють умови (10)–(12) леми 1. Для кожного $\mathbf{z} \in G$ і довільного мультиіндексу $i(k) \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots$, маємо

$$Re\ b_{i(k)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{a+k}{c+k} Re\ z_{i_k} - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j + p_{i(k)j}}{c+k} Re\ z_j >$$

$$1 - \frac{1}{2}\frac{a+k}{c+k} - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\frac{b_j + p_{i(k)j}}{c+k} = \frac{2c - \left(a + \sum\limits_{j=1}^{N} b_j + 1\right)}{2(c+k)} \geq 0,$$

оскільки $\sum\limits_{j=1}^{N} p_{i(k)j} = k+1$.

Нехай $g_{i(k)}(\mathbf{z}) = \dfrac{a+k}{c+k}\left(\dfrac{1}{2} - Re\ z_{i_k}\right)$, $i(k) \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, що $g_{i(k)}(\mathbf{z}) > 0$ в області G. Оскільки

$$Re\ b_{i(k)}(\mathbf{z}) - g_{i(k)}(\mathbf{z}) = \frac{2c - a + k}{2(c+k)} - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j + p_{i(k)j}}{c+k} Re\ z_j >$$
$$\frac{2c - a - \sum\limits_{j=1}^{N} b_j - 1}{2(c+k)} \geq 0,$$

то $g_{i(k)}(\mathbf{z}) \leq Re\ b_{i(k)}(\mathbf{z})$. Використовуючи лему 2, одержимо

$$\sum_{i_k=1}^{N} \frac{|a_{i(k)}(\mathbf{z})| - \ Re\ a_{i(k)}(\mathbf{z})}{g_{i(k)}(\mathbf{z})} =$$
$$\sum_{i_k=1}^{N} \frac{b_{i_k} + p_{i(k)}}{c+k-1} \frac{|z_{i_k}(1 - z_{i_k})| - Re\ (z_{i_k}(1 - z_{i_k}))}{1/2 - Re\ z_{i_k}} \leq$$
$$2\sum_{i_k=1}^{N} \frac{b_{i_k} + p_{i(k)}}{c+k-1}\left(\frac{1}{2} - Re\ z_{i_k}\right) \leq$$
$$\frac{2c - a - \sum\limits_{j=1}^{N} b_j - 1}{c+k-1} + 2\sum_{i_k=1}^{N} \frac{b_{i_k} + p_{i(k)}}{c+k-1}\left(\frac{1}{2} - Re\ z_{i_k}\right) =$$
$$2\left(\frac{2c - a + k - 1}{2(c+k-1)} - \sum_{i_k=1}^{N} \frac{b_{i_k} + p_{i(k)}}{c+k-1} Re\ z_{i_k}\right) =$$
$$2(Re\ b_{i(k-1)}(\mathbf{z}) - g_{i(k-1)}(\mathbf{z})).$$

Отже, за лемою 1, для залишків ГЛД (7) в області G справджуються оцінки $Re\ Q^n_{i(k)}(\mathbf{z}) \geq g_{i(k)}(\mathbf{z})$, $i(k) \in I_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Тому для довільного компакту K області G

$$|f_n(\mathbf{z})| = |Q^n_0(\mathbf{z})| \leq |b_0(\mathbf{z})| + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a_{i(1)}(\mathbf{z})|}{g_{i(1)}(\mathbf{z})} \leq M < \infty,$$

де

$$M = M(K) := \sup_{\mathbf{z}\in K}\left\{1 + \frac{a+1}{c}|z_1| + \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{c}|z_i| + \right.$$
$$\left. \sum_{i_1=1}^{N} \frac{(b_{i_1} + p_{i(1)})|z_{i_1}(1 - z_{i_1})|}{c(1/2 - Re\ z_{i_1})}\right\}.$$

Таким чином, послідовність $\{f_n(\mathbf{z})\}$ є послідовністю голоморфних функцій, рівномірно обмежених всередині області G.

Послідовність підхідних дробів $\{f_n(\mathbf{z})\}$ ГЛД (7) за теоремою 3 збігається поточково в області

$$\Delta := \left\{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N \ : \quad Re\ z_i < \frac{1}{2}, \quad Im\ z_i = 0, \quad i = \overline{1, N}\right\},$$

яка є N–вимірним дійсним околом деякої точки області G.

Враховуючи теорему 2, доходимо висновку про рівномірну збіжність послідовності $\{f_n(\mathbf{z})\}$ до голоморфної функції $f(\mathbf{z})$ на довільному компакті K області G.

Д о в е д е н н я твердження (Б) теореми 1. З формули [2]

$$F(\mathbf{z}) - f_n(\mathbf{z}) = (-1)^n \sum_{i_1,\ldots,i_n,i_{n+1}=1}^{N} \frac{\prod\limits_{r=1}^{n+1} a_{i(r)}(\mathbf{z})}{P_{i(n+1)}(\mathbf{z}) \prod\limits_{r=1}^{n} \left[Q^n_{i(r)}(\mathbf{z})\, \widehat{Q}^{n+1}_{i(r)}(\mathbf{z})\right]},$$

де

$$\widehat{Q}^{n+1}_{i(n+1)}(\mathbf{z}) = P_{i(n+1)}(\mathbf{z}), \quad \widehat{Q}^{n+1}_{i(s)}(\mathbf{z}) = b_{i(s)}(\mathbf{z}) + \sum_{i_{s+1}=1}^{N} \frac{a_{i(s+1)}(\mathbf{z})}{\widehat{Q}^{n+1}_{i(s+1)}(\mathbf{z})},$$

$s = \overline{1,n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$ випливає, що при $\mathbf{z} \in \Delta_1$,

$$\Delta_1 := \left\{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N : \quad 0 \le Re\ z_i < \frac{1}{2}, \quad Im\ z_i = 0, \quad i = \overline{1,N}\right\},$$

$$f_{2m}(\mathbf{z}) \le F(\mathbf{z}) \le f_{2m+1}(\mathbf{z}), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

оскільки в Δ_1 $a_{i(k)}(\mathbf{z})$ — невід'ємні, $Q^n_{i(r)}(\mathbf{z})$, $\widehat{Q}^{n+1}_{i(r)}(\mathbf{z})$ — додатні. Отже,

$$f(\mathbf{z}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{z}) = F(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \Delta_1.$$

Оскільки ряд (2) збігається в полікрузі D_1 і $F_D(a, \mathbf{b}; c; \mathbf{z})|_{\mathbf{z}=(0,\ldots,0)} = 1$, то існує $\delta > 0$ таке, що $F(\mathbf{z})$ голоморфна в області

$$G_1 = \{\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N : |z_i| < \delta, \quad i = \overline{1,N}\}.$$

Тому за теоремою єдиності аналітичної функції [10] в області G_1 $f(\mathbf{z}) \equiv F(\mathbf{z})$.

Отже, ГЛД (7) збігається до голоморфної функції $f(\mathbf{z})$, яка є аналітичним продовженням $F(\mathbf{z})$ в область G. Теорема 1 доведена.

Зауваження. Якщо у теоремі 1 умову (8) замінити умовою

$$a \ge 0, \quad b_i \ge 0, \quad i = \overline{1,N}, \quad 2c > a + \sum_{j=1}^{N} b_j + 1,$$

то використовуючи оцінку (13) та схему доведення леми 1, одержимо

$$Re\ Q^n_0(\mathbf{z}) = Re\ b_0(\mathbf{z}) + \sum_{i_1=1}^{N} Re\ \frac{a_{i(1)}(\mathbf{z})}{Q^n_{i(1)}(\mathbf{z})} \ge$$

$$Re\ b_0(\mathbf{z}) - \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a_{i(1)}(\mathbf{z})| - Re\ a_{i(1)}(\mathbf{z})}{2\ Re\ Q^n_{i(1)}(\mathbf{z})} \ge$$

$$Re\ b_0(\mathbf{z}) - \sum_{i_1=1}^{N} \frac{|a_{i(1)}(\mathbf{z})| - Re\ a_{i(1)}(\mathbf{z})}{2g_{i(1)}(\mathbf{z})} \ge$$

$$Re\ b_0(\mathbf{z}) - \sum_{i_1=1}^{N} \frac{b_{i_1} + p_{i(1)}}{c} \left(\frac{1}{2} - Re\ z_{i_1}\right) >$$

$$\frac{2c - a - \sum\limits_{j=1}^{N} b_j - 1}{2c} > 0.$$

Тому $\left|\dfrac{1}{f_n(\mathbf{z})}\right| \le \dfrac{1}{Re\ f_n(\mathbf{z})} \le \dfrac{2c}{2c-a-\sum\limits_{j=1}^{N} b_j - 1}.$

Отже, послідовність функцій $\left\{\dfrac{1}{f_n(\mathbf{z})}\right\}$ є рівномірно обмеженою всередині області G.

Наступна теорема є наслідком теореми 1 і цього зауваження.

Теорема 4. *Нехай* $b_1, b_2, \ldots, b_N, c$ *— дійсні числа такі, що*

$$b_1 \ge 1,\ b_2 > 0, \ldots b_N > 0, \quad i \quad 2c > \sum_{i=1}^{N} b_i + 2. \tag{16}$$

Тоді

(A) *гіллястий ланцюговий дріб* $\left(\hat{b}_0(\mathbf{z}) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{N} \dfrac{\hat{a}_{i(k)}(\mathbf{z})}{\hat{b}_{i(k)}(\mathbf{z})}\right)^{-1}$,

$$\text{де}\ \ \hat{b}_0(\mathbf{z}) = 1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{c} z_i, \quad \hat{a}_{i(k)}(\mathbf{z}) = \frac{k(b_{i_k} + \hat{p}_{i(k)})}{(c+k-2)(c+k-1)} z_{i_k}(1 - z_{i_k}),$$

$$\hat{b}_{i(k)}(\mathbf{z}) = 1 - \frac{k}{c+k-1} z_{i_k} - \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j + \hat{p}_{i(k)j}}{c+k-1} z_j, \quad \hat{p}_{i(k)} = \sum_{m=1}^{k-1} \delta_{i_m}^{i_k},$$

збігається рівномірно всередині області

$$G := \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N :\ Re\ z_i < \frac{1}{2},\ i = \overline{1,N}\right\}$$

до голоморфної функції $\hat{f}(\mathbf{z})$;

(Б) *для всіх* $\mathbf{z}$ *таких, що*

$$\mathbf{z} \in \Omega := \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \quad |z_i| < 1, \quad Re\ z_i < \frac{1}{2},\ i = \overline{1,N}\right\},$$

$$\hat{f}(\mathbf{z}) \equiv F_D(1,\ b_1,\ b_2, \ldots,\ b_N;\ c;\ \mathbf{z})$$

і $\hat{f}(\mathbf{z})$ *є аналітичним продовженням функції* $F_D(1,\ b_1,\ b_2, \ldots,\ b_N;\ c;\ \mathbf{z})$ *з області* Ω *в область* G.

Д о в е д е н н я. Елементи ГЛД

$$\hat{b}_0(\mathbf{z}) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{\hat{a}_{i(k)}(\mathbf{z})}{\hat{b}_{i(k)}(\mathbf{z})} \tag{17}$$

$\hat{a}_{i(k)}(\mathbf{z})$, $\hat{b}_{i(k)}(\mathbf{z})$ одержані з формул (5)–(6) при $a = 0$ і заміні b_1 на $b_1 - 1$ та c на $c - 1$. При виконанні умов (16) справджуються і умови (8) для ГЛД (17). Правильність твердження (А) випливає з твердження (А) теореми 1 і зауваження, причому $\hat{f}(\mathbf{z}) = \dfrac{1}{f(\mathbf{z})}$. Оскільки $F_D(0, \mathbf{b}; c; \mathbf{z}) = 1$, то $(F(\mathbf{z}))^{-1} = F_D(1, \mathbf{b}; c; \mathbf{z})$. Використовуючи схему доведення твердження (Б) теореми 1 і голоморфність функції $F_D(1, \mathbf{b}; c; \mathbf{z})$ в одиничному полікрузі, завершуємо доведення теореми.

1. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка, 1986. – 176 с.
2. *Боднар Д. І., Гоєнко Н. П.* Наближення гіпергеометричних функцій Лаурічелли багатовимірними узагальненнями неперервних дробів типу Nörlund'a // Теор. набл. та гарм. аналіз. Праці УМК 2001. Секц. 10, К. Ін-т матем. – 2002. – С. 34-44.
3. *Боднар Д.І., Манзій О.С.* Дослідження збіжності розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 12–16.
4. *Гоєнко Н. П.* Алгоритми розвинення гіпергеометричних функцій Лаурічелли у гіллясті ланцюгові дроби // Вісник НУ „Львівська політехніка" – 2002. – № 411 – С. 67–73.
5. *Гоєнко Н.П.* Про збіжність гіллястого ланцюгового дробу типу Nörlund'a у випадку дійсних змінних // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2002. – **45**, № **1**. – С. 28–30.
6. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир. – 1985. – 414 с.
7. *Манзій О.С.* Про збіжність розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб у деякій необмеженій області // Мат. методи та фіз.- мех.поля. – 1999. – **42**, № 2. – С. 7–11.
8. *Манзій О.С.* Дослідження розвинення відношення гіпергеометричних функцій Аппеля F_3 у гіллястий ланцюговий дріб // Теор. набл. ф-цій та її застосув. Праці Ін-т матем. НАН Укр. – **31** – 2000. – С. 344-353.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука. – 1986. – 800 с.
10. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ (ч.II). – М.: Наука. – 1976. – 400 с.
11. *Exton H.* Multiple hypergeometric functions and applications. – New-York–Sydney–Toronto, Chichester, Ellis Horwood – 1976.–376 p.
12. *Nörlund N. E.* Volesungen über Differenzenrechnung. – Springer–Verlag, OHG, Berlin. – 1924. – 551 p.
13. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions with Application. – Amsterdam: North-Holland. – 1992. – 606 p.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛАУРИЧЕЛЛЫ F_D ВЕТВЯЩЕЙСЯ ЦЕПНОЙ ДРОБЬЮ ТИПА НЁРЛУНДА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Исследована сходимость ветвящейся цепной дроби типа Нёрлунда, являющейся разложением отношения гипергеометрических функций Лауричеллы $F_D^{(N)}(a, b_1, b_2 \ldots, b_N; c; z_1, z_2 \ldots, z_N)$, *в области* $\{ Re\ z_k < 1/2,\ k = \overline{1, N}\}$ *при условии, что* $a \geq 0$, $b_i \geq 0$ $(i = \overline{1, N})$, $2c \geq a + b_1 + b_2 + \ldots + b_N + 1$.

APPROXIMATION OF RATIO LAURICELLA FUNCTIONS F_D OF NÖRLUND'S BRANCHED CONTINUED FRACTION IN COMPLEX DOMAIN

The convergence of Nörlund's branched continued fraction that is the expansion of ratio of Lauricella hypergeometric functions $F_D^{(N)}(a, b_1, b_2 \ldots, b_N; c; z_1, z_2 \ldots, z_N)$ *in the region* $\{ Re\ z_k < 1/2,\ k = \overline{1, N}\}$ *when parameters hold* $a \geq 0$, $b_i \geq 0$ $(i = \overline{1, N})$, $2c \geq a + b_1 + b_2 + \ldots + b_N + 1$ *is investigated.*

Національний університет
„Львівська політехніка",
Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
18.10.03