УДК 517.524

С. М. Возна

ПРО ЗБІЖНІСТЬ НЕПЕРЕРВНОГО J–ДРОБУ

Показано зв'язок неперервного $J-$ дробу з приєднаним дробом, до якого приводить задача інтерполяції. Досліджено збіжність неперервного $J-$дробу з частинними ланками вигляду $\dfrac{-c_n^2}{ib_n+z}$.

1. Вступ. Ідея інтерполяції розривних функцій раціональними привела до побудови інтерполяційних формул у вигляді раціональних дробів [4, 5]. При цьому будуються різні типи неперервних дробів (приєднаний дріб, правильний $C-$дріб). Між функціональними неперервними дробами існує певний зв'язок. Так, за допомогою еквівалентних перетворень приєднаний дріб можна звести до неперервного $J-$дробу [2].

Неперервний дріб вигляду

$$\frac{1}{d_1+z} - \frac{c_1^2}{d_2+z} - \frac{c_2^2}{d_3+z} - \frac{c_3^2}{d_4+z} - \cdots, \quad c_n \neq 0,\ n \geq 1, \tag{1}$$

де $d_n,\ c_n,\ n \geq 1,$ — комплексні сталі, $z \in C,$ називається $J-$дробом.

Кажуть, що $J-$дріб додатно–визначений, якщо існує послідовність додатних чисел $\{g_n\}$ така, що

$$|c^2| - \mathrm{Re}\,(c_n^2) \leq 2\delta_n\delta_{n+1}(1-g_{n-1})g_n, \quad n \geq 1,$$

де $\delta_n = \mathrm{Im}\,(d_n),\ \ 0 < g_{n-1} < 1,\ n \geq 1.$

Збіжність непрерервних $J-$дробів досліджувалася в роботах [6, 7, 9, 11] та інших. Зокрема, доведено, що додатно–визначений $J-$дріб (1) збігається до голоморфної функції в області $H = \{z:\ \mathrm{Im}\,(z) > 0\},$ якщо існує стала $M > 0$ така, що $|c_n| \leq M,\ n \geq 1,$ і $\delta_1 > 0,$ причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині множини $H.$ Огляд результатів досліджень наведено в монографіях [2, 10].

Метою роботи є побудова інтерполяційної формули, яка приводить до непрерервного $J-$дробу, а також дослідження збіжності неперервного $J-$дробу (1) у випадку, коли $d_n = ib_n,\ b_n \geq 0,\ n \geq 1,$ і

$$(\mathrm{Im}\,c_n)^2 \leq k^2 g_{n-1}(1-g_n), \quad n \geq 1,$$

де k — деяка додатна стала, $\{g_n\}$ — послідовність дійсних чисел таких, що $0 < \varepsilon < g_n < 1-\varepsilon,\ n \geq 0,\ 0 < \varepsilon < 1/2.$

Збіжність додатно–визначеного $J-$дробу (1) в області H при $d_n = ib,\ b \geq 0,\ n \geq 1,$ досліджена в роботі [9], а неперервного $J-$дробу (1) в області

$$H_{b,k,\delta} = \left\{ z:\ |b-iz| > \frac{k}{\cos(\arg(b-iz))},\ |\arg(b-iz)| < \frac{\pi}{2(1+\delta)} \right\},$$

де $b = \inf b_n,\ d_n = ib_n,\ b_n \geq 0,\ n \geq 1,\ \ k$ — деяка додатна стала, $0 < \delta < 1,$ при

$$(\mathrm{Im}\,c_n)^2 \leq (1-\delta)k^2 g_{n-1}(1-g_n), \quad n \geq 1,$$

де $\{g_n\}$ — послідовність дійсних чисел таких, що $g_0 \geq 0,\ 0 \leq g_n \leq 1-\delta,\ n \geq 1,$ досліджена в [1].

2. Інтерполяція приєднаним дробом. Нехай для функції однієї змінної $f(x)$ задані її значення в точках x_k, $k = 0, 1, \ldots, 2[n/2] + 1$, де $[n/2]$ — ціла частина числа $n/2$, що належать відрізку $[a, b]$. Розглянемо приєднаний неперервний дріб вигляду

$$K_{2[n/2]+1}(x) = \omega_0(x_0) + \omega_1(x_1)(x - x_0) +$$
$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=0}^{[n/2]-1} \frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+1})}{\omega_{2k+2}(\mathbf{x}_{2k+2}) + \omega_{2k+3}(\mathbf{x}_{2k+3})(x - x_{2k+2})}, \tag{2}$$

коефіцієнти якого отримуються з наступних співвідношень

$$\omega_0(x) = f(x), \tag{3}$$

$$\omega_{2k}(\mathbf{x}_{2k}) \equiv \omega_{2k}(x_0, \ldots, x_{2k-2}; x_{2k-1}, x_{2k}) =$$
$$\frac{x_{2k} - x_{2k-1}}{\omega_{2k-1}(x_0, \ldots; x_{2k-2}, x_{2k}) - \omega_{2k-1}(x_0, \ldots; x_{2k-2}, x_{2k-1})}, \tag{4}$$

$$\omega_{2k+1}(\mathbf{x}_{2k+1}) \equiv \omega_{2k+1}(x_0, \ldots, x_{2k-1}; x_{2k}, x_{2k+1}) =$$
$$\frac{\omega_{2k}(x_0, \ldots, x_{2k-2}; x_{2k-1}, x_{2k+1}) - \omega_{2k}(x_0, \ldots, x_{2k-2}; x_{2k-1}, x_{2k})}{x_{2k+1} - x_{2k}}, \tag{5}$$

де $k = 0, 1, \ldots, [n/2]$. Співвідношення (4) та (5) є оберненими розділеними різницями Тіле та розділеними різницями Ньютона, відповідно. Тому різниці (4), (5) назвемо змішаними розділеними різницями [3].

Теорема 1. *Неперервний дріб* (2), *коефіцієнти якого* $\omega_k(\mathbf{x}_k)$, $k = 0, \ldots, 2[n/2] + 1$, *визначаються формулами* (3)–(5), *є інтерполяційним для функції* $f(x)$ *у точках* $x_0, x_1, \ldots, x_{2[n/2]+1}$, *що належать відрізку* $[a, b]$.

Д о в е д е н н я проведемо методом повної математичної індукції. При $n = 0$ маємо $K_1(x_0) = f(x_0)$. Використовуючи формули (3), (5), при $n = 1$ отримаємо

$$K_1(x_0) = \omega_0(x_0) = f(x_0),$$
$$K_1(x_1) = \omega_0(x_0)(x_0) + (x_1 - x_0)\omega_1(\mathbf{x}_1) = \omega_0(x_0) + \omega_0(x_1) - \omega_0(x_0) = f(x_1).$$

Нехай дріб (2) співпадає з функцією $f(x)$ у всіх точках $x_0, x_1, \ldots, x_{2s+1}$ при $s < [n/2]$. Тоді для точок $x_0, x_1, \ldots, x_{2s+3}$ формулу (2) запишемо у вигляді

$$K_{2s+3}(x) = f(x_0) + \omega_1(\mathbf{x}_1)(x - x_0) +$$
$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=0}^{s} \frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+1})}{\omega_{2k+2}(\mathbf{x}_{2k+2}) + \omega_{2k+3}(\mathbf{x}_{2k+3})(x - x_{2k+2})}.$$

За припущенням індукції $K_{2s+3}(x_k) = f(x_k)$ при $k = 0, 1, \ldots, 2s + 1$. Перевіримо точки x_{2s+2} і x_{2s+3}. При $x = x_{2s+2}$ отримаємо

$$K_{2s+3}(x_{2s+2}) = \omega_0(x_0) + \omega_1(\mathbf{x}_1)(x_{2s+2} - x_0) +$$
$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=0}^{s} \frac{(x_{2s+2} - x_{2k})(x_{2s+2} - x_{2k+1})}{\omega_{2k+2}(\mathbf{x}_{2k+2}) + \omega_{2k+3}(\mathbf{x}_{2k+3})(x_{2s+2} - x_{2k+2})} =$$
$$\omega_0(x_0) + \omega_1(\mathbf{x}_1)(x_{2s+2} - x_0) +$$
$$\frac{(x_{2s+2} - x_0)(x_{2s+2} - x_1)}{\omega_2(\mathbf{x}_2) + \omega_3(\mathbf{x}_3)(x_{2s+2} - x_2)} + \cdots + \frac{(x_{2s+2} - x_{2s-2})(x_{2s+2} - x_{2s-1})}{\omega_{2s}(\mathbf{x}_{2s}) + \omega_{2s+1}(\mathbf{x}_{2s+1})(x_{2s+2} - x_{2s})} +$$
$$\frac{(x_{2s+2} - x_{2s})(x_{2s+2} - x_{2s+1})}{\omega_{2s+2}(\mathbf{x}_{2s+2})}.$$

Використовуючи формулу для $\omega_{2s+2}(\mathbf{x}_{2s+2})$, отримаємо останню ланку дробу у вигляді

$$(x_{2s+2}-x_{2s})(\omega_{2s+1}(x_0,\ldots;x_{2s},x_{2s+2})-\omega_{2s+1}(\mathbf{x}_{2s+1})),$$

тобто останній частинний знаменник набере вигляду

$$\omega_{2s}(\mathbf{x}_{2s})+(x_{2s+2}-x_{2s})(\omega_{2s+1}(x_0,\ldots;x_{2s},x_{2s+2})-\omega_{2s+1}(x_{2s+1})+\omega_{2s+1}(\mathbf{x}_{2s+1})).$$

Поступово вкладаючи значення розділених і обернених розділених різниць у відповідних точках $K_{2s+3}(x)$, отримаємо

$$K_{2s+3}(x_{2s+2})=\omega_0(x_0)+(x_{2s+2}-x_0)[\omega_1(\mathbf{x}_1)+\omega_1(x_0,x_{2s+2})-\omega_1(\mathbf{x}_1)]=$$
$$\omega_0(x_0)+\frac{(x_{2s+2}-x_0)(\omega_0(x_{2s+2})-\omega_0(x_0))}{x_{2s+2}-x_0}=\omega_0(x_{2s+2})=f(x_{2s+2}).$$

При $x=x_{2s+3}$ відразу запишемо $\omega_{2s+3}(\mathbf{x}_{2s+3})$ за формулою (5) і, повторюючи послідовні вкладення різниць, отримаємо, що $K_{2s+3}(x_{2s+3})=f(x_{2s+3})$. Теорема доведена.

Оскільки інтерполяційна формула (2) використовує як розділені різниці Ньютона, так і обернені розділені різниці Тіле, то назвемо її формулою Ньютона–Тіле [3].

Для визначення якості наближення інтерполяційною формулою потрібно мати явний вигляд її залишкового члена.

Нехай задані вузли інтерполяції $x_0,x_1,\ldots,x_{2[n/2]+1}$, значення функції $f(x)$ в яких не збігаються. Зобразимо $f(x)$ у вигляді

$$f(x)=K_{2[n/2]+1}(x)+r_{2[n/2]+1}(x), \tag{6}$$

де

$$K_{2[n/2]+1}(x)=\frac{A_{[n/2]}(x)}{B_{[n/2]}(x)}$$

— $[n/2]$-й підхідний дріб інтерполяційного дробу (2), $r_{2[n/2]+1}(x)$ — залишковий член формули Ньютона–Тіле. Нехай (a,b) — найменший інтервал, який містить вузли інтерполяції $x_0,x_1,\ldots,x_{2[n/2]+1}$, і, нехай на цьому інтервалі функція $f(x)$ має полюси у точках $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\nu$ порядків $r_1,r_2,\ldots,r_\nu$ відповідно, де $r_1+r_2+\cdots+r_\nu=m$. Крім того, нехай ні один із цих полюсів не збігається з вузлами інтерполяції і у всіх точках інтервалу (a,b), крім полюсів, функція $f(x)$ має скінченні похідні до порядку $2([n/2]+1)$ включно. Якщо ввести позначення

$$\varphi(x)=(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\ldots(x-\alpha_\nu)^{r_\nu},$$

то функція $f(x)\varphi(x)$ є скінченною у всіх точках інтервалу (a,b).

Візьмемо n настільки великим, щоб $\deg B_{[n/2]}(x)>m$. Покладемо

$$r_{2[n/2]+1}(x)=\lambda(x)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{2[n/2]+1})}{B_{[n/2]}(x)\varphi(x)}, \tag{7}$$

де $\lambda(x)$ виберемо так, щоб виконувалась рівність (6).

Розглянемо функцію

$$Z(t)=f(t)-\frac{A_{[n/2]}(t)}{B_{[n/2]}(t)}-\lambda(t)\frac{(t-x_0)(t-x_1)\ldots(t-x_{2[n/2]+1})}{B_{[n/2]}(t)\varphi(t)},$$

яка перетворюється у нуль при $t = x_0, x_1, \ldots, x_{2[n/2]+1}$, а також при $t = x$ у силу (6), (7). Тоді функція

$$\omega(t) = f(t)B_{[n/2]}(t)\varphi(t) - A_{[n/2]}(t)\varphi(t) - \lambda(t)(t-x_0)(t-x_1)\ldots(t-x_{2[n/2]+1})$$

також перетворюється у нуль при $t = x_0, x_1, \ldots, x_{2[n/2]+1}$, причому $x_k \in (a,b)$, $k = 0, 1, \ldots, 2[n/2]+1$, $x \in (a,b)$. Згідно з теоремою Ролля $\omega^{2([n/2]+1)}(t)$ має, принаймні, один корінь $t = \xi$ на інтервалі (a,b). Але $A_{[n/2]}(t)$ є многочленом степеня $[n/2]+1$, $\varphi(t)$ — многочлен степеня $m < [n/2]$. Звідси випливає, що $A_{[n/2]}(t)\varphi(t)$ є многочленом степеня меншого, ніж $2[n/2]+1$, і тому його похідна порядку $2([n/2]+1)$ тотожно дорівнює 0.

Тоді

$$\lambda(x) = \frac{1}{(2([n/2]+1))!}\frac{d^{2([n/2]+1)}}{dx^{2([n/2]+1)}}\left[f(x)B_{[n/2]}(x)\varphi(x)\right]_{x=\xi}$$

і залишковий член має наступний вигляд

$$r_{2[n/2]+1}(x) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{2[n/2]+1}(x-x_i)}{(2([n/2]+1))!B_{[n/2]}(x)\varphi(x)}\frac{d^{2([n/2]+1)}}{dx^{2([n/2]+1)}}\left[f(x)B_{[n/2]}(x)\varphi(x)\right]_{x=\xi}.$$

Якщо функція $f(x)$ не має полюсів на інтервалі (a,b), то у формулі для залишкового члена покладемо $\varphi(x) = 1$.

Розглянемо граничний випадок по відношенню до розділених і обернених розділених різниць (4), (5). За припущенням, при їх визначенні всі значення аргумента, котрі є вузлами інтерполяції, вважалися різними. Нехай тепер всі значення аргумента збігаються (нескінченно близькі між собою). Знайдемо розділені і обернені розділені різниці при однакових значеннях аргумента. Маємо

$$\omega_1(x,x) = \lim_{x_0,x_1\to x}\omega_1(\mathbf{x}_1) = \lim_{x_0,x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f'(x).$$

Для $\omega_2(x,x,x)$ із формули (4) при $x_0 = x_1 = x$, $x_2 = y$ отримаємо

$$\frac{\omega_1(x,y)-\omega_1(x,x)}{y-x} = \frac{1}{\omega_2(x,x,y)}, \quad \frac{\omega_1(y,y)-\omega_1(y,x)}{y-x} = \frac{1}{\omega_2(y,x,y)}.$$

Додаючи останні співвідношення, при $y \to x$ отримаємо

$$\lim_{y\to x}\frac{\omega_1(y,y)-\omega_1(x,x)}{y-x} = \frac{2}{\omega_2(x,x,x)},$$

тобто

$$\omega_2(x,x,x) = \lim_{x_0,x_1,x_2\to x}\omega_2(\mathbf{x}_2) = 2^{\backslash}[f'(x)],$$

де ${}^{\backslash}[f'(x)] = \dfrac{1}{f''(x)}$ — обернена похідна функції $f'(x)$ [4].

Для $\omega_3(x,x,x,x)$ із формули (5) при $x_0 = x_1 = x_2 = x$, $x_3 = y$ маємо

$$\frac{\omega_2(x,x,y)-\omega_2(x,x,x)}{y-x} = \omega_3(x,x,x,y).$$

За допомогою аналогічних перетворень знаходимо

$$\frac{\omega_2(x,y,y)-\omega_2(x,x,y)}{y-x} = \omega_3(x,x,y,y), \quad \frac{\omega_2(y,y,y)-\omega_2(x,y,y)}{y-x} = \omega_3(x,y,y,y).$$

Додаючи останні співвідношення, при $y \to x$ отримаємо

$$\lim_{y \to x} \frac{\omega_2(y,y,y) - \omega_2(x,x,x)}{y - x} = 3\omega_3(x,x,x,x),$$

тобто

$$\omega_3(x,x,x,x) = \lim_{x_0,x_1,x_2,x_3 \to x} \omega_3(\mathbf{x}_3) = \frac{2}{3}({}^{\backprime}[f'(x)])'.$$

Аналогічно можна отримати розділені і обернені розділені різниці будь–якого порядку при однакових значеннях аргумента, оскільки невизначені вирази, що виникають при цьому, завжди мають границю внаслідок симетрії розділених і обернених розділених різниць відносно своїх аргументів.

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови, що забезпечують граничний перехід у формулах (4), (5), при $x_k \to x_0$, $k = 1, 2, \ldots, 2[n/2] + 1$, то отримаємо розвинення функції $f(x)$ в неперервний дріб в околі точки x_0. Якщо множина інтерполяційних точок, що належать відрізку $[a, b]$, зліченна, то для функції $f(x)$ із інтерполяційної формули (2) при $x_k \to x_0$, $k \geq 1$, отримаємо приєднаний дріб вигляду

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cfrac{(x - x_0)^2}{2\,{}^{\backprime}[f'(x)]_{x=x_0} + \frac{2}{3}({}^{\backprime}[f'(x)])'_{x=x_0}(x - x_0) + \ddots}. \tag{8}$$

Властивості такого приєднаного дробу досліджено в роботі [8].

Якщо в дробі, оберненому до приєднаного дробу (8), покласти $x - x_0 = 1/(\xi - \xi_0)$ і застосувати еквівалентні перетворення, то отримаємо неперервний $J-$дріб.

3. Збіжність неперервного $J-$дробу. Для дослідження збіжності неперервного $J-$дробу користуватимемося наступними теоремами.

Теорема 2. [2] *Нехай елементи a_n неперервного дробу*

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \frac{a_3}{1} + \cdots \tag{9}$$

задовольняють нерівності

$$|a_n| - \mathrm{Re}\left(a_n e^{-i(\alpha_{n-1} + \alpha_n)}\right) \leq 2p_{n-1}(\cos\alpha_n - p_n), \quad n \geq 1,$$

де $p_n > 0$, α_n — дійсні і

$$|p_n e^{i\alpha_n} - 1/2| \leq d < 1/2, \quad n \geq 0.$$

Тоді

1) *існують скінченні границі послідовностей парних і непарних підхідних дробів неперервного дробу* (9)*;*

2) *значення всіх підхідних дробів неперервного дробу* (9) *скінченні і лежать у півплощині*

$$V_0 = \{w : \ \mathrm{Re}\,(we^{-i\alpha_0}) \geq p_0\}; \tag{10}$$

3) *неперервний дріб* (9) *збігається тоді і лише тоді, коли хоча б один із рядів*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2n}}{a_3 a_5 \ldots a_{2n+1}} \right|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_3 a_5 \ldots a_{2n+1}}{a_4 a_6 \ldots a_{2n+2}} \right|$$

розбіжний;

4) *неперервний дріб* (9) *збігається, якщо існує стала* $C > 0$ *така, що*

$$|a_n| \leq C, \quad n \geq 1.$$

Теорема 3. [2] *Нехай*

$$\frac{a_1(z)}{b_1(z)} + \frac{a_2(z)}{b_2(z)} + \frac{a_3(z)}{b_3(z)} + \cdots \tag{11}$$

— неперервний дріб такий, що для кожного n, $n \geq 1$, *елементи* $a_n(z)$, $b_n(z)$ *— голоморфні функції комплексної змінної* z *для всіх* z *із деякої області* $D \subset C$. *Далі, нехай існують різні комплексні числа* α *і* β *такі, що для кожного* n, $n \geq 1$, $n-$*і підхідні дроби* $f_n(z)$ *задовольняють умовам*

$$f_n(z) \neq \alpha, \beta, \infty \quad \text{для всіх} \quad z \in D.$$

Якщо неперервний дріб (11) *збігається до скінченного значення* $f(z)$ *для кожного* $z \in \Delta$, *де* Δ *— нескінченна множина хоча б з однією граничною точкою в* D, *то дріб* (11) *збігається рівномірно на кожній компактній підмножині множини* D *до голоморфної функції в* D.

Доведемо справедливість наступної теореми.

Теорема 4. *Нехай для елементів неперервного* $J-$*дробу* (1) *виконуються такі умови:*

1) $d_n = ib_n$, $b_n \geq 0$, $n \geq 1$.

2) c_n *— ненульові комплексні сталі, які задовольняють нерівності*

$$(\operatorname{Im} c_n)^2 \leq k^2 g_{n-1}(1 - g_n), \quad n \geq 1, \tag{12}$$

де k *— деяка додатна стала, а* $\{g_n\}$ *— послідовність дійсних чисел таких, що*

$$0 < \varepsilon < g_n < 1 - \varepsilon, \quad n \geq 0, \quad 0 < \varepsilon < 1/2. \tag{13}$$

Тоді

1) *послідовності парних і непарних підхідних дробів неперервного* $J-$*дробу* (1) *збігаються в області*

$$H_{b,k} = \left\{ z : \; |b - iz| > \frac{k}{\cos(\arg(b - iz))}, \quad |\arg(b - iz)| < \frac{\pi}{2} \right\}, \tag{14}$$

де $b = \inf\limits_n b_n$, *причому збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині області* $H_{b,k}$ *;*

2) *неперервний* $J-$*дріб* (1) *збігається до функції, голоморфної в* $H_{b,k}$, *тоді і лише тоді, коли хоча б один із рядів*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_1 c_3 \ldots c_{2n-1}}{c_2 c_4 \ldots c_{2n}} \right|^2 \sqrt{1 + b_{2n+1} + b_{2n+1}^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{c_2 c_4 \ldots c_{2n}}{c_3 c_5 \ldots c_{2n+1}} \right|^2 \sqrt{1 + b_{2n+2} + b_{2n+2}^2}$$

розбіжний;

3) *неперервний* $J-$*дріб* (1) *збігається до функції, голоморфної в* $H_{b,k}$, *якщо існує стала* $C > 0$ *така, що*

$$|c_n| \leq C, \quad n \geq 1.$$

Д о в е д е н н я. Еквівалентними перетвореннями $J-$дріб (1) зведемо до вигляду

$$\frac{-ic_0(z)}{1} + \frac{c_1(z)}{1} + \frac{c_2(z)}{1} + \frac{c_3(z)}{1} + \cdots, \tag{15}$$

де $c_0(z) = \dfrac{1}{b_1 - iz}$, $\quad c_n(z) = \dfrac{c_n^2}{(b_n - iz)(b_{n+1} - iz)}$, $\quad n \geq 1$.

Покладемо $\dfrac{1}{b_{n+1} - iz} = r_n e^{\alpha_n}$, $\quad p_n = g_n \cos\alpha_n$, $\quad n \geq 0$.

Тоді для будь–якого індексу n, $n \geq 1$, із нерівностей (12) отримуємо

$$\left|\frac{c_n^2}{(b_n - iz)(b_{n+1} - iz)}\right| - \operatorname{Re}\frac{c_n^2 e^{-i(\alpha_{n-1}+\alpha_n)}}{(b_n - iz)(b_{n+1} - iz)} \leq 2r_{n-1}r_n k^2 g_{n-1}(1 - g_n)$$

або

$$|c_n(z)| - \operatorname{Re}\left(c_n(z)e^{-i(\alpha_{n-1}+\alpha_n)}\right) \leq 2\frac{r_{n-1}r_n k^2}{\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_n} p_{n-1}(\cos\alpha_n - p_n). \tag{16}$$

В силу умов (14) для кожного $z \in H_{b,k}$ і для будь–якого індексу n, $n \geq 0$, маємо

$$r_n k = \frac{k}{|b_{n+1} - iz|} \leq \frac{k}{|b - iz|} < \cos(\arg(b - iz)) \leq \cos\alpha_n. \tag{17}$$

Використовуючи співвідношення (17), нерівність (16) запишемо у вигляді

$$|c_n(z)| - \operatorname{Re}\left(c_n(z)e^{-i(\alpha_{n-1}+\alpha_n)}\right) \leq 2p_{n-1}(\cos\alpha_n - p_n).$$

Оскільки для кожного $z \in H_{b,k}$ всі $|\alpha_n| \leq |\arg(b - iz)| < \pi/2$, то в силу умов (13) існує стала $d(\varepsilon, \arg(b - iz))$, $0 < d(\varepsilon, \arg(b - iz)) < 1/2$, така, що

$$|p_n e^{i\alpha_n} - 1/2| \leq d(\varepsilon, \arg(b - iz)), \quad n \geq 0.$$

Із твердження 1) теореми 2 випливає, що послідовності парних і непарних підхідних дробів неперервного дробу (15) збігаються до скінченних значень для всіх $z \in H_{b,k}$. Нехай $f_n(z)$ — $n-$й підхідний дріб неперервного дробу (15). Тоді із твердження 2) цієї теореми випливає, що для кожного $z \in H_{b,k}$ існує півплощина $V_0(z)$, яка визначається умовою (10) така, що

$$f_n(z) \in V_0(z) \quad \text{і} \quad f_n(z) \neq \infty, \quad n \geq 1.$$

Крім того, можна показати, що для всіх n, $n \geq 1$, і для всіх $z \in H_{b,k}$ $f_n(z)$ не можуть лежати на від'ємній дійсній півосі зліва від точки $-g_0$.

Тому, в силу теореми 3 парна і непарна частини неперервного дробу (15) рівномірно збігаються до голоморфних функцій на кожній компактній підмножині області $H_{b,k}$. Твердження 2) і 3) отримуємо із тверджень 3) і 4) теореми 2 відповідно. Теорема доведена.

4. Висновки. Побудовано інтерполяційну формулу у вигляді приєднаного дробу, який приводить до неперервного $J-$дробу. Досліджено збіжність неперервного $J-$дробу при умовах, накладених на елементи дробу, відмінних від відомих раніше.

1. *Дмитришин Р. І.* Про деякі області збіжності багатовимірного $J-$дробу // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 12–16.

2. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
3. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журнал. – 2003. – **55**, № 1. – С. 30–44.
4. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа. – М.: ГИТТЛ., – 1953. – 527 с.
5. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука., – 1983. – 311 с.
6. *Dennis J. J., Wall H. S.* The limit-circle case for a positive definite J–fraction // Duke Math. J. – 1945. – **12**. – P. 255–273.
7. *Hellinger E., Wall H. S.* Contributions to the analytic theory of continued fractions and infinite matrices // Ann. of Math. – 1943. – **44**. – № 2. – P. 103–127.
8. *Kuchmins'ka Kh. Yo., Vozna S. M.* Multipoint formula based on associated continued fraction // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2003. – **46**, № 3. – С. 40–47.
9. *Paydon J.E., Wall H. S.* The continued fraction as a sequences of linear transformation // Duke Math. J. – 1942. – **9**. – P. 360–372.
10. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.
11. *Wall H. S., Wetzel. M.* Contributions to the analytic theory of J–fractions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1944. – **55**. – P. 373–397.

О СХОДИМОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ J–ДРОБИ

Показана связь непрерывной J–дроби с присоединенной непрерывной дробью, к которой приводит задача интерполяции. Исследована сходимость непрерывной J–дроби с частными звеньями вида $\dfrac{-c_n^2}{ib_n + z}$.

ON THE CONVERGENCE OF THE CONTINUED J–FRACTION

The connection between a continued J–fraction and an associated continued fraction, obtained from some interpolation problem has been shown. For the continued J–fraction with the partial quotients of the type $\dfrac{-c_n^2}{ib_n + z}$ *the convergence has been investigated.*

Національний університет
„Львівська політехніка", Львів

Отримано
05.11.03