УДК 517.524

А. В. Загороднюк, І. В. Чернега

СИМЕТРІЇ ПРОСТОРІВ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Досліджуються алгебри аналітичних функцій на банаховому просторі, симетричних відносно деякої напівгрупи ізометричних операторів. Побудовано оператор симетризації, який є гомоморфізмом алгебр.

Вступ.

Останнім часом з'явилася значна кількість публікацій, присвячених дослідженню алгебр аналітичних функцій на одиничній кулі банахового простору. Так, наприклад, спектр таких алгебр досліджувався в [3]; властивості алгебри рівномірно неперервних голоморфних функцій на одиничній кулі комплексного банахового простору розглядалися в [5]. В [2] досліджено множину максимальних ідеалів алгебри симетричних голоморфних функцій на l_p.

Спектр алгебри симетричних аналітичних функцій на просторах $L_1[0,1]$ та $L_2[0,1]$ описано в [1]; в статті [6] отримано деякі результати на цю ж тему у випадку $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$.

1. Попередні відомості і позначення.

Нехай X — банахів простір над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$.

Функція $P : X \to \mathbb{C}$ називається $n-$ однорідним поліномом, якщо існує симетрична $n-$ лінійна форма $\widetilde{P} : X^n \to \mathbb{C}$ така, що $P(x) = \widetilde{P}(x, \ldots, x)$ для всіх $x \in X$.

Поліном степеня n на X є скінченною сумою k–однорідних поліномів, $k = 0, \ldots, n$. Через $P(^nX)$ будемо позначати простір $n-$ однорідних неперервних поліномів з X в $\mathbb{C}$ і через $P(X)-$ простір всіх неперервних поліномів.

Позначимо через $C_b(X)$ — простір неперервних обмежених на обмежених множинах функцій на X, $B(X)$ — простір всіх обмежених функцій. Через G будемо позначати деяку нескінченну напівгрупу ізометричних операторів з X в X. Скажемо, що функція $f \in B(X)$ є G–симетричною, якщо $f(\sigma(x)) = f(x)$ для довільного $x \in X$, $\sigma \in G$.

Будемо також використовувати наступні стандартні позначення: через $H_b(X)$ позначатимемо простір цілих функцій обмеженого типу, тобто аналітичних функцій, які є обмеженими на обмежених множинах. Зауважимо, що даний простір є алгеброю Фреше. Підалгебру алгебри $H_b(X)$, що складається з відповідних G–симетричних функцій, позначимо $H_{bs}(X)$. Нехай $H^{\infty}_{uc}(B)$ — алгебра рівномірно неперервних обмежених аналітичних функцій на одиничній кулі B банахового простору X і $A_{us}(B)$ — алгебра рівномірно неперервних G–симетричних аналітичних функцій на B. Теорія аналітичних відображень на банахових просторах викладена в [7].

Для довільної алгебри A позначимо через $M(A)$ її спектр, тобто множину всіх неперевних комплекснозначних гомоморфізмів. Довільний елемент $f \in A$ можна розглядати як функцію на множині максимальних ідеалів: $\widehat{f}(\phi) = \phi(f)$, $\phi \in M(A)$. Множина $M(A)$ є топологічним простором з топологією Гельфанда, який є компактом, якщо A — комутативна банахова алгебра (детальніше див. [8]).

Введемо також поняття ультрафільтру (див., напр., [10]), яке ми будемо використовувати в даній статті.

Сім'я $\mathcal{F}$ підмножин множини X називається фільтром, якщо виконуються наступні умови:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap \ldots \cap F_n \in \mathcal{F}$;
3. $F_1 \in \mathcal{F}, \ \ F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_2 \in \mathcal{F}$.

Нехай $x \in X$, тоді фільтр $\mathcal{F}_x = \{F \subseteq X : x \in F\}$ називається головним фільтром, що відповідає елементу x.

Сім'я всіх фільтрів на фіксованій множині X частково впорядкована відношенням $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Фільтр, який є максимальним відносно цього часткового порядку, називається ультрафільтром. Довільний головний фільтр є ультрафільтром. Ультрафільтр, який не є головним, називається вільним. Фільтр називається узгодженим з деякою топологією на X, якщо база фільтра є базою даної топології. Ми завжди будемо припускати, що фільтр (ультрафільтр) узгоджений з топологією простору. Якщо X і Y — два топологічні простори і F — неперервне відображення, то образ ультрафільтру є ультрафільтром на Y. Фільтр $\mathcal{F}$ збігається до точки x, якщо $W \in \mathcal{F}$ для кожного околу $W \ni x$. Гаусдорфовий топологічний простір буде компактом тоді і тільки тоді, коли кожен ультрафільтр є збіжним. Тому кожна неперервна обмежена скалярнозначна функція збігається за довільним ультрафільтром. Границю функції за ультрафільтром позначатимемо $\lim\limits_{\mathcal{F} \ni z} g(z)$.

2. Випадок абстрактних напівгруп симетрії.

Нехай X — комплексний банахів простір, G — деяка нескінченна напівгрупа ізометричних операторів з X в X. Вважаємо, що на G задана сильна операторна топологія (топологія поточкової збіжності). Позначимо $\mathrm{Orb}(x) = \{\sigma(x), \sigma \in G\}$.

Лема 1. *Нехай $\mathcal{U}$ — деякий вільний ультрафільтр на G. Для кожної функції $f \in C_b(X)$ є визначена функція $f_s(x) = f_s(G,\mathcal{U})(x) \in B(X)$ рівністю*

$$f_s(x) := \lim_{\mathcal{U} \ni \sigma} f(\sigma(x)), \tag{1}$$

$\sigma \in G$. При цьому f_s є G – симетричною.

Д о в е д е н н я. Для кожного $x \in X$ множина $\mathrm{Orb}(x)$ є обмеженою. Розглянемо відображення $x : G \to X, \ \ x : \sigma \mapsto \sigma(x)$. Покажемо, що $x(\sigma)$ — неперервне відображення. Справді, нехай $\sigma_n \to \sigma$ при $n \to \infty$. Тоді $\sigma_n(x) \to \sigma(x)$, отже, $x(\sigma_n) \to x(\sigma)$. Тому $x : \mathcal{U} \to x(\mathcal{U})$ — ультрафільтр на $\mathrm{Orb}(x)$ як образ ультрафільтра при неперервному відображенні. Таким чином, границя

$$\lim_{\mathcal{U} \ni \sigma} f(\sigma(x)) = \lim_{\mathcal{U} \ni \sigma} f(x(\sigma)) = \lim_{X(\mathcal{U}) \ni x(\sigma)} f(x(\sigma)) = f_s(x)$$

існує, отже, функція f_s є коректно визначеною. Для довільного $y \in \mathrm{Orb}(x)$, очевидно, що $||y|| = ||x||$. Тому $|f(x(\sigma))| \leq \sup\limits_{||y||=||x||} |f(y)| < \infty$. Отже, функція f_s є обмеженою на обмежених множинах. Покажемо, що $f_s(x)$ — симетрична. Дійсно, оскільки ультрафільтр вільний, то границя не залежить від вибору точки на орбіті. З іншого боку, для довільного $\sigma_0 \in G, \ \ \sigma_0(x) \in \mathrm{Orb}(X)$. Тому

$$f_s(x) = \lim_{\mathcal{U} \ni \sigma} f(\sigma(x)) = \lim_{\mathcal{U} \ni \sigma} f(\sigma_0(\sigma(x))) = f_s(\sigma_0(x)).$$

Теорема 1. *Нехай $f \in H_b(X)$. Тоді $f_s \in H_{bs}(X)$, при цьому, якщо $f \in P(^nX)$, то f_s — n – однорідний симетричний поліном.*

Д о в е д е н н я. Нехай $f \in P(^nX)$. Тоді для $t \in \mathbb{C}$

$$f_s(tx) = \lim_{\mathcal{U} \ni \sigma} f(\sigma(tx)) = \lim_{\mathcal{U} \ni \sigma} t^n f(\sigma(x)) = t^n \lim_{\mathcal{U} \ni \sigma} f(\sigma(x)) = t^n f_s(x).$$

Для довільних $x, h \in X$ і $t \in \mathbb{C}$ маємо

$$f_s(x+th) = \lim_{\mathcal{U}\ni\sigma} f(\sigma(x+th)) = \lim_{\mathcal{U}\ni\sigma} f(\sigma(x)+t\sigma(h)) =$$

$$\lim_{\mathcal{U}\ni\sigma}\left(\sum_{k=0}^{n} t^k A_k\left(\sigma(x),\sigma(h)\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} t^k \lim_{\mathcal{U}\ni\sigma} A_k\left(\sigma(x),\sigma(h)\right) = \sum_{k=0}^{n} t^k A_{ks}(x,h),$$

де $A_k(x,h) = \tilde{P}(\underbrace{x,\ldots,x}_{n-k},\underbrace{h,\ldots,h}_{k})$ і $A_{ks}(x,h) := \lim_{\mathcal{U}\ni\sigma} A_k\left(\sigma(x),\sigma(h)\right)$. Тобто, $f_s(x+th)$ є поліномом від змінної t з коефіцієнтами A_{ks} $(k = 0,\ldots,n)$, які залежать тільки від x і h. Тому, згідно з [7] та лемою 1, f_s є n–однорідним неперервним поліномом.

Нехай тепер f — довільна функція з $H_b(X)$. Оскільки $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ є рівномірною границею n-однорідних поліномів, то ми можемо перейти до границі під знаком суми. Тому

$$f_s(x) = \lim_{\mathcal{U}\ni\sigma} f(\sigma(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\mathcal{U}\ni\sigma} f_n(\sigma(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ns}(x).$$

Отже, $f_s \in H_{bs}(X)$.

Позначимо через $\mathcal{S}_G$ відображення, яке кожному поліному P ставить у відповідність симетричний поліном P_s за формулою (1).

Лема 2. *Відображення* $\mathcal{S}_G : P(X) \to P_s(X)$ *є гомоморфізмом алгебр.*

Д о в е д е н н я. Мультиплікативність $\mathcal{S}_G$ є очевидною, оскільки границя добутку рівна добутку границь. Покажемо, що даний гомоморфізм є обмеженим. Справді,

$$||\mathcal{S}_G(P)|| = \sup_{||x||\le 1} |\lim_{\mathcal{U}\ni\sigma} P(\sigma(x))| = \|P_s\| \le \|P\|,$$

оскільки для довільного x, $||x|| \le 1$ і $\sigma \in G$, маємо $||\sigma(x)|| \le 1$ і, отже, $|P(\sigma(x))| \le |P(x)| \le ||P||$. Зауважимо, що у випадку, коли P— симетричний поліном, $||\mathcal{S}_G(P)|| = ||P||$.

Наслідок. *Відображення* $\mathcal{S}_G$ *продовжується до неперервного гомоморфізму з алгебри* $H_b(X)$ *на* $H_{bs}(X)$ *та з* $H^{\infty}_{uc}(B)$ *на* $A_{us}(B)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки простір $P(X)$ щільний в $H_b(X)$ і $H^{\infty}_{uc}(B)$, то $\mathcal{S}_G$ можна продовжити за лінійністю і неперервністю на поповнення у відповідних топологіях. Будемо зберігати те ж позначення для продовжень $\mathcal{S}_G$. Покажемо, що $\mathcal{S}_G$ — гомоморфізм. Достатньо це показати для алгебри $H^{\infty}_{uc}(B)$, оскільки $H_b(X)$ є підалгеброю в $H^{\infty}_{uc}(B)$. Кожна функція $f \in H^{\infty}_{uc}(B)$ подається у вигляді ряду Тейлора $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n \in P(^nX)$ і цей ряд збігається рівномірно на B. Отже,

$$\mathcal{S}_G(fg) = \mathcal{S}_G\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{k=1}^{\infty} g_k\right) = \mathcal{S}_G\left(\sum_{n,k=1}^{\infty} f_n g_k\right) =$$

$$\sum_{n,k=1}^{\infty} \mathcal{S}_G(f_n g_k) = \sum_{n,k=1}^{\infty} \mathcal{S}_G(f_n)\mathcal{S}_G(g_k) = \mathcal{S}_G(f)\mathcal{S}_G(g).$$

Відображення $\mathcal{S}_G$ буде сюр'єктивним, оскільки $A_{us}(B) \subset H_{uc}^{\infty}(B)$ і для довільного $f \in A_{us}(B)$ виконується рівність $\mathcal{S}_G(f) = f$.

З наслідку, зокрема, випливає, що кожен гомоморфізм I на $H_{bs}(X)$ (на $A_{us}(B)$) породжує деякий гомоморфізм $I \circ \mathcal{S}_G$ на $H_b(X)$ ($H_{uc}^{\infty}(B)$ відповідно).

Позначимо через $\mathcal{B}(X)$ простір обмежених лінійних операторів на X. Тоді, згідно з [3], кожному φ з $H_b^*(X)$ ставиться у відповідність відображення $\Lambda_T(\varphi)$, $T \in \mathcal{B}(X)$ наступним чином:

$$(\Lambda_T(\varphi)) = \varphi(f \circ T),$$

де $f \in H_b(X)$. Якщо φ належить $M_b := M(H_b(X))$ — множині максимальних ідеалів алгебри $H_b(X)$, то $\Lambda_T(\varphi) \in M_b$ і Λ_T — неперервне відображення з M_b в M_b; і якщо $\|T\| = 1$, то Λ_T діє з M_{uc} в M_{uc}, де $M_{uc} := M(H_{uc}^{\infty}(B))$ — множина максимальних ідеалів алгебри $H_{uc}^{\infty}(B)$. Також вірно, що $\Lambda_{ST} = \Lambda_S\Lambda_T$, де $S, T \in \mathcal{B}(X)$.

Лема 3. *Множина $G_\Lambda := \{\Lambda_\sigma, \sigma \in G\}$ є напівгрупою неперервних відображень на M_b в себе та M_{uc} в себе. Якщо G — група, то G_Λ — група.*

Д о в е д е н н я. Як вже було зазначено, $\Lambda_\sigma(\varphi) \in M_b$ для довільного $\varphi \in M_b$ і $\Lambda_\sigma(\varphi) \in M_{uc}$ для довільного $\varphi \in M_{uc}$. Залишилось зауважити, що $\Lambda_{\sigma_1\sigma_2} = \Lambda_{\sigma_1}\Lambda_{\sigma_2}$. Крім того, якщо e — одиничний елемент в G, то Λ_e — одиничний в G_Λ і якщо σ^{-1} — обернений до σ, то $\Lambda_{\sigma^{-1}}$ — обернений до Λ_σ.

Нехай G — група. Визначимо на M_b (відповідно на M_{uc}) відношення еквівалентності наступним чином: $\varphi \sim \psi$ якщо існує $\sigma \in G$ таке, що $\Lambda_\sigma(\varphi) = \psi$. Тобто, $\varphi \sim \psi$ тоді і тільки тоді, коли їх орбіти відносно дії групи G_Λ збігаються.

Теорема 2. *Нехай G — група. Якщо для кожного $\varphi \in M_{uc}$ множина $\mathrm{Orb}(\varphi) = \{\Lambda_\sigma(\varphi) : \sigma \in G\}$ є замкненою в M_{uc} в топології Гельфанда, то фактор-простір $M_{uc}/\sim$ гомеоморфний множині $M(A_{us})$.*

Д о в е д е н н я. З компактності M_{uc} випливає, що $\mathrm{Orb}(\varphi)$ — компактна підмножина. Тому довільний ультрафільтр на $\mathrm{Orb}(\varphi)$ збігається до деякої точки $\varphi_s \in \mathrm{Orb}(\varphi)$. Зокрема, $\lim\limits_{\mathcal{U} \ni \sigma} \Lambda_\sigma(\varphi) = \varphi_s$. Іншими словами, для кожної функції $f \in H_{uc}^{\infty}(X)$, $\widehat{f_s}(\varphi) = \varphi_s(f)$ для деякої точки $\varphi_s \in \mathrm{Orb}(\varphi)$.

Нехай $[\varphi]$ — клас еквівалентності, що містить φ. Тоді відображення $\xi : [\varphi] \to \varphi_s$ діє з $M_{uc}/\sim$ в $M(A_{us})$. Якщо $\xi(\varphi_1) = \xi(\varphi_2)$, то $\mathrm{Orb}(\varphi_1)$ і $\mathrm{Orb}(\varphi_2)$ мають спільну точку $\{\varphi_s\}$. Оскільки G — група, то $\mathrm{Orb}(\varphi_1) = \mathrm{Orb}(\varphi_2)$, тобто, $\varphi_1 \sim \varphi_2$. Таким чином, ξ — ін'єкція. Припустимо, що $\psi \in M(A_{us})$. Тоді $\varphi := \mathcal{S}_G \circ \psi \in M_{uc}$ і $\psi = \varphi_s = \xi(\varphi)$. Таким чином, ξ — сюр'єктивне і, отже, бієктивне відображення.

Оскільки $[\varphi] = \mathrm{Orb}(\varphi)$ — замкнена множина для кожного $\varphi \in M_{uc}$, то фактор-відображення $\varphi \to [\varphi]$ неперервне. З компактності випливає неперервність оберненого відображення.

Приклади.

Нехай $X = \ell_p$, де p — натуральне число; G — група підстановок базисних елементів. Згідно з [2] для кожної точки $x \in \ell_p$, $\|x\| = 1$, $\mathrm{Orb}(x)$ є замкнена множина в M_{uc}. Проте існують орбіти, які не містять жодної точки з ℓ_p. Тобто, існує елемент $\varphi_0 \in M_b(\ell_p)$ такий, що $\mathrm{Orb}(\varphi_0) \cap \ell_p = \emptyset$.

Справді, нехай $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — симетричний базис в ℓ_p. Позначимо через

$$F_k\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k,$$

$k = p, p+1, \ldots,$ елементарні симетричні поліноми на ℓ_p. Згідно з [9] кожен симетричний поліном на ℓ_p належить до алгебраїчної оболонки поліномів F_k, $k \geq p$.

Візьмемо такий гомоморфізм $\psi_0 \in M_{bs}(\ell_p)$, що $\psi_0(F_p) = 1$ і $\psi_0(F_k) = 0$ при $k > p$. Вказаний гомоморфізм ψ_0 існує згідно з [2]. Покладемо $\varphi_0 = \mathcal{S}_G \circ \psi_0$. Нехай для деякого $x_0 \in \ell_p$, $x_0 \in \mathrm{Orb}(\varphi_0)$. Оскільки симетричні функції є постійними на орбітах, то для довільної функції $f \in H_{bs}(\ell_p)$

$$f(x_0) = \widehat{f}(\varphi_0) = \varphi_0(f) = \psi_0(f).$$

Але в [2] показано, що не існує точки, яка б задовольняла цю рівність.

У випадку, коли $X = c_0$ і G — та сама група, як в попередньому прикладі, всі орбіти в M_{uc} є незамкненими. Справді, оскільки в c_0 немає ненульових G—симетричних поліномів [9], то $\lim\limits_{\mathcal{U} \ni \sigma} \Lambda_\sigma(\varphi) = 0$ для кожного $\varphi \in M_{uc}$. Тобто, нуль є граничною точкою кожної орбіти при тому, що $0 \notin \mathrm{Orb}(x)$ для $x \neq 0$.

1. *Пузирьова І.* Симетричні аналітичні функції в L_p // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 45, № 1. – С. 56–61.
2. *Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A.* Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. Lond. Math. Soc. – 2003. – V. 35. – P. 55–64.
3. *Aron R., Cole B., Gamelin T.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space// J. Reine Angew. Math. – 1991. – V. 415. – P. 51–93.
4. *Aron R., Cole B., Gamelin T.* Weak-star continuous analytic functions// Can. J. Math. – 1995. – V. 47. – P. 673–683.
5. *Carne T.K., Cole B., Gamelin T.* A uniform algebra of analytic functions on Banach space// Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 314, № 2. – P. 639–659.
6. *Chernega I., Zagorodnyuk A.* Algebras of symmetric analytic functions on $L_p[0,1]$ // Matematychni studii, to appear.
7. *Dineen S.* Complex Analysis in Infinite Dimensional Spaces. – Springer. – 1999. – 543 p.
8. *Gamelin T.* Uniform algebras. – Chelsea, New York. – 1984. – 257 p.
9. *Gonzalez M., Gonzalo R., Jaramillo J.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces// Jour. London Math. Soc. – 1999. – V. 59. – P. 681–697.
10. *Protasov I.* Combinatorics of Numbers. – Mathematical Studies. Monograph Series. – V. 2. – 72 p.

СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Исследуются алгебры аналитических функций на банаховом пространстве, симметрических относительно некоторой полугруппы изометрических операторов. Построен оператор симметризации, который является гомоморфизмом алгебр.

SYMMETRIES OF ANALYTIC FUNCTIONS SPACES ON BANACH SPACES

Algebras of analytic functions on a Banach space which are symmetric with respect to some semigroup of isometric operators are investigated. An operator of symmetrization, which is a homomorphism of algebras, is constructed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
07.10.03