УДК 513.88.

Г. М. Піпа, О. Г. Сторож

# НАПІВГЛАДКІ ЗВУЖЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ОПЕРАТОРА ТА ЇХНІ ВЛАСНІ РОЗШИРЕННЯ

*Нехай $L_0$ — замкнений симетричний додатно визначений оператор в гільбертовому просторі, а $L_{min}$ — його звуження на ядро деякого допоміжного лінійного відображення, визначеного на енергетичному просторі оператора $L_0$. В термінах абстрактних граничних умов описано різні класи розширень оператора $L_{min}$ (самоспряжені, максимально невід'ємні і т.ін.).*

**1. Позначення та постановка задачі.** У цій праці використовуються такі позначення: $D(T)$, $R(T)$, $kerT$ — відповідно область визначення, область значень і многовид нулів (лінійного) оператора T, $\mathcal{B}(X,Y)$ — сукупність лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$ таких, що $D(A) = X$, $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$, $\mathfrak{C}(X)$ — клас замкнених щільно визначених операторів у просторі X, $A|E$ — звуження відображення A на множину E, $1_X$ — тотожне перетворення простору X.

Роль вихідного об'єкта відіграє додатно визначений оператор $L_0 \in \mathfrak{C}(H)$, де H — фіксований гільбертів простір зі скалярним добутком $(.|.)$. Через $L_F$ позначимо розширення за Фрідріхсом оператора $L_0$, а через $H_e$ та $(.|.)_e$ — його енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток. Відомо [10], що $H_e = D\big(L_F^{\frac{1}{2}}\big)$, $\forall u, v \in H_e \ \ (u|v)_e = \big(L_F^{\frac{1}{2}}u|L_F^{\frac{1}{2}}v\big)$ (якщо $u \in D(L_F)$, то $(u|v)_e = (L_F u|v)$ ). Під $D[T]$, де $T \in \mathfrak{C}(H)$, розуміємо многовид $D(T)$, трактований як гільбертів простір зі скалярним добутком $(y|z)_T = (y|z) + (Ty|Tz)$, під $\oplus, \ominus$ — символи ортогональної суми та ортогонального доповнення в $D[T]$, а під $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — фіксований простір граничних значень (ПГЗ) оператора $L_0$ (означення див. [1, 5]).

Припустимо, що $\Psi \in \mathcal{B}(H_e, G)$, де $G$ — допоміжний гільбертів простір, і визначимо оператор $L_{min}$ за допомогою співвідношень

$$D(L_{min}) = \{y \in D(L_0) : \Psi y = 0\}, L_{min} \subset L_0.$$

Метою цієї статті є встановлення умов, які гарантують замкненість та щільну визначеність оператора $L_{min}$, побудова спряженого оператора $L^*_{min}$, а також опис в термінах ПГЗ різних класів розширень оператора $L_{min}$ (самоспряжених, максимально невід'ємних і т.ін.). Відзначимо, що у випадку, коли $L_0$ має скінченні дефектні числа, ці питання досліджувались в [9].

**2. Умови щільної визначеності оператора $L_{min}$.** Визначимо оператор $\Psi^{\cdot} \in \mathcal{B}(G, H_e)$ за допомогою співвідношення

$$\forall u \in H_e, \forall g \in G \quad (\Psi u, g)_G = (u, \Psi^{\cdot} g)_e$$

і позначимо через $E^{\perp_e}$ та $\overline{E}^e$, де $E \subset H_e$, відповідно ортогональне доповнення та замикання множини E в $H_e$ (таким чином $\overline{R(\Psi^{\cdot})}^e = (ker\Psi)^{\perp_e}$ ).

**Лема 1**. *Множина $ker\Psi$ щільна в H тоді, і тільки тоді, коли*

$$(ker\Psi)^{\perp_e} \cap D(L_F) = \{0\}. \tag{1}$$

 ISSN 0130-9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2004. – 47, № 2. – С. 84-89.

Д о в е д е н н я. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $R(\Psi)$ замкнена в G, оскільки $\Psi$ можна замінити ортопроектором на підпростір $(ker\Psi)^{\perp_e}$, так що умова (1) набуває вигляду

$$R(\Psi^{\cdot}) \cap D(L_F) = \{0\}. \tag{2}$$

Припустимо, що справджується (2) і що існує таке $z \in H$, що $\forall y \in ker\Psi \quad (y|z) = 0$. Визначимо функціонал $l_z$ таким чином: $\forall y \in H_e l_z(y) = (y|z) = (y|L_F^{-1}z)_e$. Оскільки $ker\Psi \subset kerl_z$, то, як випливає з „леми про трійку" (див. [4, с. 262], [8, с. 23]), існує функціонал $C \in \mathcal{B}(G, \mathbb{C})$ такий, що $l_z = C\Psi$, тобто $\forall y \in H_e \quad (y|z) = C\Psi y$. Використовуючи теорему Рісса про загальний вигляд лінійного неперервного функціоналу в гільбертовому просторі, бачимо, що для деякого $c \in G$ справджується співвідношення $\forall y \in H_e \quad (y|z) = (\Psi y|c)_G$. Зокрема, $\forall y \in H_e \cap D(L_0^*) = D(L_F) \quad (y|z) = (y|\Psi^{\cdot}c)_e = (L_F y|\Psi^{\cdot}c)$. Звідси випливає, що $\Psi^{\cdot}c \in D(L_F^*) = D(L_F)$ і $L_F\Psi^{\cdot}c = z$. Враховуючи (2), бачимо, що $\Psi^{\cdot}c = 0$, а отже $z = 0$, тобто $ker\Psi$ щільна в H.

Навпаки, нехай $ker\Psi$ щільна в H, а $z \in (ker\Psi)^{\perp_e} \cap D(L_F)$. Тоді $\forall y \in ker\Psi \quad (y|z)_e = (y|L_F z) = 0$, а отже z=0.

**Зауваження 1.** а) Надалі припускаємо, що $\Psi$, а отже й $\Psi^{\cdot}$ нормально розв'язні оператори (див. [3] с. 295), тому, не зменшуючи загальності, можна вважати, що

$$R(\Psi) = G, \quad ker\Psi^{\cdot} = 0. \tag{3}$$

б) Зрозуміло, що умова (2) є необхідною для щільної визначеності оператора $L_{min}$. Легко бачити, що якщо

$$\overline{D(L_{min})}^e = \overline{ker\Psi \cap D(L_0)}^e = ker\Psi, \tag{4}$$

то вона стає достатньою.

в) Оператор $L_{min}$ є замкненим. Це випливає з того, що

$$\Psi|D(L_0) \in \mathcal{B}(D[L_0], G). \tag{5}$$

**Лема 2**. *Якщо справджуються умови* (2), (3) *і, крім цього,*

$$R(\Psi|D(L_0)) = R(\Psi), \tag{6}$$

*то* $L_{min} \in \mathfrak{C}(H)$.

Д о в е д е н н я. Визначимо оператор $\Psi' : G \to D(L_0)$ за допомогою співвідношення: $\forall y \in D(L_0), \forall g \in G \ (\Psi y|g)_G = (y|\Psi' g)_{L_0}$. З (5) випливає, що $\Psi' \in \mathcal{B}(G, D[L_0])$, а з цитованої вище теореми з монографії [3] — що $R(\Psi')$ замкнена в $D[L_0]$, так що

$$D(L_0) = D(L_{min}) \oplus_{L_0} R(\Psi'). \tag{7}$$

Нехай $y \in ker\Psi$. Існує послідовність $(y_n) \subset D(L_0)$, яка збігається до $y$ в $H_e$. З (7) випливає, що при деяких $u_n \in D(L_{min})$, $h_n \in G \ y_n = u_n + \Psi' h_n$. Зрозуміло, що $\Psi\Psi' h_n = \Psi y_n \to \Psi y = 0$. Крім цього (див. (3), (6)), $ker\Psi' = \{0\}$, а отже $(\Psi\Psi')^{-1} \in \mathcal{B}(G)$. Таким чином $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. Тепер вже зрозуміло, що $(u_n)$ збігається до $y$ в $H_e$, а тому справджується (4). Для завершення доведення досить використати зауваження 1.

**3. Оператор** $L_{max}$. Як і вище, припускатимемо, що справджуються умови (2), (3). Зрозуміло, що $D(L_0^*) \cap R(\Psi^{\cdot}) = \{0\}$. Визначимо оператор $L_{max}$ за допомогою співвідношень:

$$D(L_{max}) = D(L_0^*) \dot{+} R(\Psi^{\cdot}), \quad \forall z \in D(L_0^*), \forall h \in G, \quad L_{max}(z + \Psi^{\cdot}h) = L_0^* z.$$

З (3) випливає, що $h$ визначається, виходячи з $y = z + \Psi^{\cdot} h$, однозначно (зрозуміло, лінійним чином), тому існує лінійний оператор $\Gamma_3 : D(L_{max}) \to G$ такий, що

$$\forall y = z + \Psi^{\cdot} h \in D(L_{max}), \quad \Gamma_3 y = -h.$$

Таким чином,

$$\forall y \in D(L_{max}), \quad L_{max} y = L_0^*(y + \Psi^{\cdot}\Gamma_3 y).$$

**Лема 3**. *Якщо* $L_{min} \in \mathfrak{C}(H)$, *то* $L_{max} \subset L_{min}^*$, *зокрема* $L_{max}$ *має замикання.*

Д о в е д е н н я. Ясно, що $L_0^* \subset L_{min}^*$. З іншого боку, $\forall y \in D(L_{min})$, $\forall h \in G (L_{min} y|\Psi^{\cdot} h) = (y|\Psi^{\cdot} h)_e = (\Psi y|h)_G = 0$. Тому $\Psi^{\cdot} h \in D(L_{min}^*)$, $L_{min}^* \Psi^{\cdot} h = 0$.

**Зауваження 2.**

$$ker L_{max} = ker L_0^* \dot{+} R(\Psi^{\cdot}). \tag{8}$$

Це випливає зі встановленого в [6] співвідношення

$$D(L_0^*) = D(L_F) \dot{+} ker L_0^*, \tag{9}$$

а також з того, що $ker L_F = \{0\}$.

**Лема 4**. $L_{max}$ *є замкненим тоді, і тільки тоді, коли*

$$ker L_0^* \dot{+} R(\Psi^{\cdot}) \tag{10}$$

*замкнена в* $H$.

Д о в е д е н н я. Необхідність умови (10) випливає з (8) і з того, що многовид нулів замкненого оператора є замкненим.

Для того, щоб переконатися в достатності цієї умови, припустимо, що $w_n = u_n + z_n + r_n \to w$ при $n \to \infty$ $(u_n \in D(L_F)$ , $z_n \in ker L_0^*$ , $r_n \in R(\Psi^{\cdot}))$, $L_{max} w_n = L_F u_n \to v$ при $n \to \infty$.

З останнього співвідношення випливає, що $u_n \to L_F^{-1} v$, а отже $z_n + r_n \to w - L_F^{-1} v$ при $n \to \infty$. Таким чином (див. (10)), $w - L_F^{-1} v \in ker L_0^* \dot{+} R(\Psi^{\cdot})$, тобто $\exists z \in ker L_0^*, \exists r \in R(\Psi^{\cdot}) : w - L_F^{-1} v = z + r$.

Маємо, $w = L_F^{-1} v + z + r \in D(L_{max})$ , $L_{max} w = v$.

**Теорема 1**. *Якщо* $L_{min} \in \mathfrak{C}(H)$ *і справджуються умови* (3), (10), *то* $L_{min}^* = L_{max}$.

Д о в е д е н н я. Відомо (див. [7], [8, с.49]), що

$$D(L_{min}^*) = D(L_0^*) \dot{+} L_0[D(L_0) \ominus_{L_0} D(L_{min})] = D(L_0^*) \dot{+} L_0 \overline{R(\Psi')} \tag{11}$$

(мається на увазі замикання за нормою графіка оператора $L_0$ ),

$$\forall u \in D(L_0) \ominus_{L_0} D(L_{min}), \quad L_{min}^* L_0 u = -u. \tag{12}$$

Нехай $y \in D(L_{min}^*)$. З огляду на (11), існують такі $x \in D(L_0^*), u \in \overline{R(\Psi')}$, що $y = x + L_0 u$. Тому існує послідовність $(h_n) \subset G$ така, що $u_n = \Psi' h_n \to u$ відносно норми графіка оператора $L_0$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u \ , \ \lim_{n\to\infty} L_0 u_n = L_0 u \tag{13}$$

(відносно норми простору H). Покладемо

$$y_n = x + L_0 u_n = x + L_0 \Psi' h_n. \tag{14}$$

З означення оператора $\Psi'$ випливає, що $y_n \in D(L_{max})$, а з (13), (14) — що $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Далі (див. (12)), $L_{max}y_n = L_{max}(x + L_0\Psi' h_n) = L_0^* x - u_n$, так що $\lim\limits_{n\to\infty} L_{max}y_n = Lx - u$. Але, в силу леми 4, $L_{max}$ — замкнений оператор, тому $y \in D(L_{max})$ , $L_{max}y_n = Lx - u$, тобто $D(L_{min}^*) \subset D(L_{max})$. Для завершення доведення досить застосувати лему 3.

**4. Про один ПГЗ оператора** $L_{min}$. Нижче скрізь припускається, що справджуються умови (2), (3), (6), (10), а отже $L_{min} \in \mathfrak{C}(H)$ і $L_{min}^* = L_{max}$. Далі, нехай $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — фіксований ПГЗ оператора $L_0$, а $\mathcal{P}$ — проектор $D(L_0^*) \to D(L_F)$, що відповідає розкладові (9). Відомо (див. [13]), що якщо $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ є жорстким ПГЗ, тобто, якщо

$$ker\Gamma_1 = D(L_0) \oplus kerL_0^* \ \ , \ \ ker\Gamma_2 = D(L_F), \tag{15}$$

то

$$\mathcal{P}y = y - Z_0\Gamma_2 y, \tag{16}$$

де $Z_0 = (\Gamma_1 L_F^{-1})^*$. Більше того, $\Gamma_2$ і $\mathcal{P}$ можна продовжити до лінійних операторів, визначених на $H_e \dotplus kerL_0^*$, поклавши $\forall u \in H_e$, $\Gamma_2 u = 0$ , $\mathcal{P}u = 0$. При цьому (16) залишається в силі, якщо під $\mathcal{P}$ розуміти проектор $H_e \dotplus kerL_0^* \to H_e$, що діє паралельно до $kerL_0^*$.

Продовжимо $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ за лінійністю нулем на $R(\Psi^\cdot)$ до операторів $\Gamma_i^{(\Psi)}$ : $D(L_{max}) \to \mathcal{H}$ (i=1,2), прийнявши $\forall y = z + \Psi^\cdot h$ $(z \in D(L_0^*)$ , $h \in G)$, $\Gamma_i^{(\Psi)} y = \Gamma_i z$ $(i = 1, 2)$.

Нарешті, покладемо $\forall y \in D(L_{max})$, $\Gamma_4 y = \Psi\mathcal{P}y$.

**Теорема 2**. $(\mathcal{H} \oplus G, \Gamma_1^{(\Psi)} \oplus \Gamma_3, \Gamma_2^{(\Psi)} \oplus \Gamma_4)$ *— ПГЗ оператора* $L_{min}$.

Д о в е д е н н я. Очевидно, що $R(\Gamma_1^{(\Psi)} \oplus \Gamma_2^{(\Psi)}) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $R(\Gamma_3) = R(\Gamma_4) = G$. Виходячи звідси і використовуючи лему 4.5.2 монографії [8], неважко переконатись, що $R(\Gamma_1^{(\Psi)} \oplus \Gamma_2^{(\Psi)} \oplus \Gamma_3 \oplus \Gamma_4) = R(\Gamma_1^{(\Psi)}) \oplus R(\Gamma_2^{(\Psi)}) \oplus R(\Gamma_3) \oplus R(\Gamma_4)$. Нарешті, міркуючи так, як в [9], переконуємось, що $\forall y, z \in D(L_{max})$,

$$(L_{max}y|z) - (y|L_{max}z) =$$
$$((\Gamma_1^{(\Psi)} + \Gamma_3)y|(\Gamma_2^{(\Psi)} + \Gamma_4)z)_{\mathcal{H}\oplus G} - ((\Gamma_2^{(\Psi)} + \Gamma_4)y|(\Gamma_1^{(\Psi)} + \Gamma_3)z)_{\mathcal{H}\oplus G}.$$

Теорему доведено.

Введемо такі позначення: $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus G$ , $\widehat{\Gamma}_1^{(\Psi)} = \Gamma_1^{(\Psi)} \oplus \Gamma_3$ , $\widehat{\Gamma}_2^{(\Psi)} = \Gamma_2^{(\Psi)} \oplus \Gamma_4$.

**Наслідок 1**. *Нехай* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{B}(\widehat{\mathcal{H}})$. *Визначимо оператор* $\widehat{L}$ *за допомогою співвідношень:*

$$D(\widehat{L}) = \{y \in D(L_{max}) : \mathcal{A}\widehat{\Gamma}_1 y + \mathcal{B}\widehat{\Gamma}_2 y = 0\} \quad \widehat{L} \subset L_{max}.$$

Цей оператор є самоспряженим тоді, і тільки тоді, коли $\mathcal{A}\mathcal{B}^* = \mathcal{B}\mathcal{A}^* ker(\mathcal{A} \pm i\mathcal{B}) = \{0\}$. Справедливість цього твердження випливає з результатів праці [5], див. також [11].

**Приклад 1.** Нехай $\widetilde{L}_K \subset L_{max}$, а

$$D(\widetilde{L}_K) = \{y \in D(L_{max}) : \Gamma_1^{(\Psi)} y = 0 \ , \ \Gamma_3 y + (\Psi\Psi^\cdot)^{-1}\Gamma_4 y = 0\}.$$

Застосовуючи наслідок 1 з $\mathcal{A} = 1_{\widehat{\mathcal{H}}}$, $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\Psi\Psi^\cdot)^{-1} \end{pmatrix}$, переконуємось, що $\widetilde{L}_K$ — самоспряжений оператор.

**Приклад 2.** Нехай $\widetilde{L}_F \subset L_{max}$, а $D(\widetilde{L}_F) = \{y \in D(L_{max}) : \Gamma_2^{(\Psi)} y = \Gamma_4 y = 0\}$.

Застосовуючи наслідок 1, з $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} = 1_{\widehat{\mathcal{H}}}$, бачимо, що $\widetilde{L}_F^* = \widetilde{L}_F$.

**5. М'яке та жорстке розширення оператора** $L_{min}$. У цьому пункті припускаємо, що ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ є жорстким, тобто, що виконуються умови (15). Позначимо через $\widehat{L}_K$ м'яке розширення оператора $L_{min}$. Із зауваження 2 випливає, що

$$D(\widehat{L}_K) = D(L_{min}) \dot{+} ker L_0^* \dot{+} R(\Psi^{\cdot}) \tag{17}$$

(деталі див. [6]).

**Лема 5**. $\widehat{L}_K = \widetilde{L}_K$, *де* $\widetilde{L}_K$ *— оператор з прикладу* 1.

Д о в е д е н н я. Нехай $y \in D(\widehat{L}_K)$. В силу (17) існують $y_0 \in D(L_{min}), a \in \mathcal{H}$, $b \in R(\Psi^{\cdot})$ такі, що $y = y_0 + Z_0 a + \Psi^{\cdot} b$. З означення оператора $\Gamma_3$ випливає, що $\Gamma_3 y = -b$. Далі (див. [12]), $\Gamma_1^{(\Psi)} y = \Gamma_1 Z_0 a = 0$, $\Gamma_2^{(\Psi)} y = \Gamma_2 Z_0 a = a, \Gamma_4 y = \Psi(y_0 + \Psi^{\cdot} b) = \Psi\Psi^{\cdot} b$. Звідси випливає, що $y \in D(\widetilde{L}_K)$.

Таким чином, $D(\widehat{L}_K) \subset D(\widetilde{L}_K)$, а отже $\widehat{L}_K \subset \widetilde{L}_K$. Але $\widetilde{L}_K$ та $\widehat{L}_K$ — самоспряжені оператори, тому $\widehat{L}_K = \widetilde{L}_K$.

**Лема 6**. *Нехай* $\widehat{L}_F$ *— жорстке розширення оператора* $L_{min}$, *а* $\widetilde{L}_F$ *— такий, як у прикладі* 2. *Тоді* $\widehat{L}_F = \widetilde{L}_F$.

Д о в е д е н н я. Позначимо через $\widehat{H}_e$ енергетичний простір оператора $L_{min}$. Якщо $u \in H_e$, то (див. (4)) існує послідовність $(u_n) \subset D(L_0) \cap ker\Psi$ така, що $u_n \to u$ в $H_e$ при $n \to \infty$. Оскільки $\Psi \in \mathcal{B}(H_e, G)$, то $u \in H_e \cap ker\Psi$. Таким чином, $\widehat{H}_e \subset H_e \cap ker\Psi$, а отже $D(\widehat{L}_F) \subset H_e \cap ker\Psi \cap D(L_{max})$. Але $D(L_{max}) \cap H_e = ker\Gamma_2^{(\Psi)}$, тому $D(\widehat{L}_F) \subset ker\Gamma_2^{(\Psi)} \cap ker\Gamma_4$, тобто $\widehat{L}_F \subset \widetilde{L}_F$. Але $\widetilde{L}_F$ та $\widehat{L}_F$ — самоспряжені оператори, тому $\widehat{L}_F = \widetilde{L}_F$.

**Теорема 3**. $(\widehat{\mathcal{H}}, \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2)$, *де* $\widetilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1^{(\Psi)} \oplus [(\Psi\Psi^{\cdot})^{-1}\Gamma_4 + \Gamma_3]$, $\widetilde{\Gamma}_2 = \widehat{\Gamma}_2$, *є жорстким ПГЗ оператора* $L_{min}$.

Д о в е д е н н я. Справедливість теореми випливає безпосередньо з лем 5, 6.

**Наслідок 2**. *Оператор* (17) *є максимально невід'ємним тоді, і тільки тоді, коли* $\mathcal{A}(\mathcal{B} - \mathcal{A}F)^* \leq 0$, $ker(\mathcal{A} + \mathcal{A}F - \mathcal{B}) = \{0\}$, *де* $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\Psi\Psi^{\cdot})^{-1} \end{pmatrix}$.

Справедливість цього твердження випливає з теореми 3, рівності $\mathcal{A}\widehat{\Gamma}_1 + \mathcal{B}\widehat{\Gamma}_2 = \mathcal{A}\widetilde{\Gamma}_1 + (\mathcal{B} - \mathcal{A}F)\widetilde{\Gamma}_2$ та результатів праць [2], [12].

**Зауваження 3.** Виходячи з результатів праць [5,11] (відповідно [2,12]), неважко сформулювати критерій максимальної дисипативності (відповідно максимальної акретивності) оператора (17).

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наукова думка, 1984. – 284 с.
2. *Деркач В. А., Маламуд М. М., Цекановский Э. Р.* Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция // Докл. АН СССР. – 1988. – 298, № 1. – С. 537–541.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

5. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки. – 1975. – 17, № 1. – С. 41–48.
6. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения // Мат. сб. – 1947. – 20, № 3. – С. 431–495.
7. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1972. – Вып. 16. — С. 165–186.
8. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – К.: Наук. думка, 1983. – 212 с.
9. *Мильо О. Я., Сторож О. Г.* Про умови взаємної спряженості одного класу скінченновимірних збурень додатно визначеного оператора // Мат. студії. – 1995. – Вип. 4. – С. 67–74.
10. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. – М.: Наука, 1968. – 576 с.
11. *Сторож О. Г.* Диссипативные возмущения с изменением области определения // Функцион. анализ (Ульяновск). – 1986. – Вып. 26. – С. 136–140.
12. *Сторож О. Г.* Экстремальные расширения неотрицательного оператора и аккретивные граничные задачи // Укр. мат. журн. – 1990. – 42, № 6. – С. 858–860.
13. *Сторож О. Г.* Диференціально–граничний оператор другого порядку в просторі вектор–функцій, асоційований з квадратичною формою // Мат. студії. – 1993. – Вип. 2. – С. 59–63.

## ПОЛУГЛАДКИЕ СУЖЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННОГО ОПЕРАТОРА И ИХ СОБСТВЕННЫЕ РАСШИРЕНИЯ

*Пусть $L_0$ — замкнутый симметрический положительно определённый оператор в гильбертовом пространстве, а $L_{min}$ — его сужение на ядро некоторого вспомогательного линейного отображения, определённого на энергетическом пространстве оператора $L_0$. В терминах абстрактных граничных условий описаны различные классы расширений оператора $L_{min}$ (самосопряженные, максимально неотрицательные и т. п.).*

## SEMI–SMOOTH RESTRICTIONS OF POSITIVELY DEFINED OPERATOR AND THEIR PROPER EXTENSIONS

*Let $L_0$ be a closed symmetric positively defined operator in Hilbert space and $L_{min}$ — its restriction onto the kernel of auxilari linear mapping, defined on energetic space of $L_0$. In the terms of abstract boundary conditions various extensions (selfadjoint, maximal nonnegative etc.) of $L_{min}$ are described.*

Львівський національний
університет ім. І.Франка

Отримано
05.11.03