УДК 517.9

О. Є. Гентош

ГАМІЛЬТОНОВА РЕДУКЦІЯ ТИПУ НЕЙМАНА СИСТЕМИ ДЕВІ–СТЮАРТСОНА

Для (2+1)–вимірної нелінійної динамічної системи Деві–Стюартсона, яка володіє трилінійним матричним зображенням Лакса, розвинено метод редукування на нелокальний скінченновимірний підпростір її розв'язків.

1. Вступ. У 1981 році Сато [1] запропонував підхід, згідно якого інтегровні (2+1)–вимірні динамічні системи виникають в результаті виключення деяких еволюцій з нескінченної ієрархії гамільтонових векторних полів для інтегро–диференціального оператора з необмеженою інтегральною частиною. У роботі [2] показано, що інтегровні за Лаксом (2+1)–вимірні нелінійні динамічні системи на нелокальних інваріантних підпросторах розв'язків, породжених локальними законами збереження та власними значеннями відповідних спектральних задач, редукуються до інтегровних за Лаксом (1+1)–вимірних систем.

Якщо інтегровні за Лаксом (2+1)–вимірні системи разом з нелінійними обмеженнями розглядати як умову сумісності двох гамільтонових векторних полів на орбітах коприєднаної дії для певного класу елементів спряженого простору алгебри Лі інтегро–диференціальних операторів з матричними коефіцієнтами, то для них можна отримати, як наслідок, загальний вигляд (аналог формули М. Адлера [3]) локальних законів збереження, і знайти їх потрійну матричну лінеризацію. Ці властивості дозволяють звести пошук часткових розв'язків (2+1)–вимірних систем до інтегрування на основі теореми Ліувілля комутуючих скінченновимірних гамільтонових векторних полів на нелокальних інваріантних підпросторах.

У статті на прикладі системи Деві–Стюартсона розвивається метод редукування [4, 5] на нелокальні скінченновимірні підпростори розв'язків, породжені локальними законами збереження та інваріантними у відношенні до системи власними значеннями асоційованих спектральних задач, для згаданого вище класу інтегровних за Лаксом (2+1)–вимірних нелінійних динамічних систем.

2. Матричне зображення Лакса для системи Деві–Стюартсона. Коприєднана дія алгебри Лі $\hat{\mathcal{G}} := C^\infty(\mathbb{S}^1;\mathcal{G})$, де $\mathcal{G}$ — матрична алгебра Лі, інтегро–диференціальних операторів виду:

$$\hat{a} := \sum_{j\ll\infty} a_j(\partial/\partial x)^j, \quad x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$$

із звичайним комутатором:

$$[\hat{a},\hat{b}] := \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a} \quad \hat{a},\hat{b} \in \hat{\mathcal{G}}$$

на елементі $\hat{l} \in \mathcal{G}^*$:

$$\hat{l} = l + \bar{f}\partial^{-1} \otimes \bar{f}^*, \tag{1}$$

де $\bar{f}, \bar{f}^*$ — вектор–функції деякого простору Соболєва і $l \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ — диференціальний оператор спряженого простору $\hat{\mathcal{G}}^* \simeq \mathcal{G}$ у відношенні до скалярного добутку:

$$(\hat{a},\hat{b}) := \int_0^{2\pi} res_{\partial/\partial x} Sp\,(\hat{a}\hat{b})\, dx,$$

де $res_{\partial/\partial x}$ позначає коефіцієнт при $(\partial/\partial x)^{-1}$, а Sp — слід матриці, за допомогою інваріантів Казіміра $\gamma_n \in I(\hat{\mathcal{G}}^*)$:

$$\gamma_n = 1/(n+1)(\hat{l}^n, \hat{l}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

породжує ієрархію гамільтонових векторних полів:

$$\begin{cases} d\hat{l}/d\tau_n = [\hat{l}_+^n, \hat{l}], \\ d\bar{f}/d\tau_n = \hat{l}_+^n \bar{f}, \\ d\bar{f}^*/d\tau_n = -(\hat{l}^*)_+^n \bar{f}^*, \quad \tau_n \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3}$$

Якщо $l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial/\partial x - \begin{pmatrix} 0 & u \\ -\tilde{u} & 0 \end{pmatrix}, \in \hat{\mathcal{G}}^*$, де $u, \tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{C})$ та $\mathcal{G} = gl(2; \mathbb{C})$, то $\bar{f} = (f, g)^T \in C^\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{C}^2)$ і $\bar{f}^* = (f^*, g^*)^T \in C^\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{C}^2)$.

Розглянемо перше та друге рівняння з ієрархії (3) для $\tau_1 = y$ і $\tau_2 = t$ як умови сумісності спектральної задачі:

$$\hat{l}\bar{\Phi} = \lambda\bar{\Phi}, \tag{4}$$

де $\bar{\Phi} = (\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2)^T \in L_\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{C}^2)$, а $\lambda \in \mathbb{C}$ — деякий параметр, та відповідних еволюційних рівнянь:

$$d\bar{\Phi}/dy = \hat{l}_+\bar{\Phi}, \tag{5}$$

$$d\bar{\Phi}/dt = \hat{l}_+^2\bar{\Phi}. \tag{6}$$

З формул (4) та (5) отримуємо:

$$\begin{aligned} &\partial u/\partial y = -2fg^*, \quad \partial\tilde{u}/\partial y = -2f^*g, \\ &\partial f/\partial y = \partial f/\partial x - ug, \quad \partial f^*/\partial y = \partial f^*/\partial x - \tilde{u}g^*, \\ &\partial g/\partial y = -\partial g/\partial x + \tilde{u}f, \quad \partial g^*/\partial y = -\partial g^*/\partial x + uf^*. \end{aligned} \tag{7}$$

З рівнянь (4) і (6) після заміни $t \in \mathbb{R}$ на $it \in i\mathbb{R}$, $i^2 = 1$, виникають співвідношення:

$$du/dt = i(\partial^2 u/\partial x\partial y + 2u(ff^* + gg^*)), \tag{8}$$

$$d\tilde{u}/dt = -i(\partial^2\tilde{u}/\partial x\partial y + 2\tilde{u}(ff^* + gg^*)), \tag{9}$$

$$\partial(ff^*)/\partial y - \partial(ff^*)/\partial x = 1/2\partial(u\tilde{u})/\partial y = -(\partial(gg^*)/\partial x + \partial(gg^*)/\partial y), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &df/dt = i(\partial^2 f/\partial x^2 + (2ff^* - u\tilde{u})f - \partial u/\partial x g), \\ &df^*/dt = -i(\partial^2 f^*/\partial x^2 + (2ff^* - u\tilde{u})f^* - \partial\tilde{u}/\partial x g^*), \\ &dg/dt = i(\partial^2 g/\partial x^2 - (2gg^* + u\tilde{u})g - \partial\tilde{u}/\partial x f), \\ &dg^*/dt = -i(\partial^2 g^*/\partial x^2 - (2gg^* + u\tilde{u})g^* - \partial u/\partial x f^*). \end{aligned}$$

Вони задають (2+1)–вимірну динамічну систему Деві–Стюартсона [6, 7] на 2π–періодичному функціональному многовиді $M \subset C^\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{C}^6)$, $w = (u, \tilde{u}, \bar{f}, \bar{f}^*)^T \in M$, з нелінійними обмеженнями (7). Кожну з рівностей (4), (5) і (6) можна переписати у вигляді лінійного диференціального рівняння першого порядку:

$$d\Phi/dx = \begin{pmatrix} \lambda & u & -f \\ \tilde{u} & -\lambda & g \\ f^* & g^* & 0 \end{pmatrix} \Phi := A[w; \lambda]\Phi, \tag{11}$$

$$d\Phi/dy = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -f \\ 0 & \lambda & -g \\ f^* & -g_2^* & 0 \end{pmatrix} \Phi := B[w; \lambda]\Phi, \tag{12}$$

$$d\Phi/dt = i \begin{pmatrix} \lambda^2 + ff^* & -fg^* & -\lambda f - \partial f/\partial y \\ f^*g & \lambda^2 - gg^* & -\lambda g - \partial g/\partial y \\ \lambda f^* - \partial f^*/\partial y & -\lambda g^* + \partial g^*/\partial y & gg^* - ff^* \end{pmatrix} \Phi := C[w; \lambda], \tag{13}$$

де $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^T \in W = L_\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{C}^3)$.

Таким чином, (2+1)–вимірна система Деві–Стюартсона (8)–(10) на просторі M 2π–періодичних функцій з нелінійними обмеженнями (7) володіє трилінійним матричним зображенням Лакса (11)–(13), яке забезпечує інваріантність у відношенні до них спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. Ця властивість дозволяє редукувати систему на нелокальний скінченновимірний підпростір $M_N \subset M$ її розв'язків:

$$M_N := \{w \in M : \; grad\, \mathcal{L}_N[w] = 0\}\,, \tag{14}$$

де функціонал $\mathcal{L}_N$ має вигляд:

$$\mathcal{L}_N = -\gamma_1 + \sum_{j=1}^{N} c_j \lambda_j, \quad \gamma_1 = \int_0^{2\pi} (ff^* + gg^*) dx.$$

Тут власні значення $\lambda_j \in D(M)$, $j = \overline{1, N}$, періодичної спектральної задачі (11) розглядаються як гладкі за Фреше функціонали на многовиді M. Надалі будемо вважати λ_j, $j = \overline{1, N}$, дійсними з відповідними власними вектор–функціями $\Phi_j \in L_\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}^3)$, які є власними векторами матриці монодромії задачі (11) для власних значень ± 1 [8] і $c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, N}$. Доведення інваріантності підпросторів такого виду проведено у роботі [5].

3. Симплектична структура нелокального інваріантного підпростору. Згідно загального підходу [4, 5] до дослідження інтегровності векторних полів на нелокальних скінченновимірних інваріантних підпросторах інтегровних за Лаксом (1+1)–вимірних нелінійних динамічних систем, необхідно вивчити диференціально–геометричну структуру підпростору $M_N \subset M$.

Щоб явно описати підпростір (14), обчислимо величини $grad\, \lambda_j \in T^*(M)$, $j = \overline{1, N}$ за допомогою спектральної задачі (11) та спряженої до неї:

$$d\Psi/dx = -A^T[w; \lambda]\Psi, \tag{15}$$

де $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)^T \in W = L_\infty(\mathbb{S}^1; \mathbb{R}^3)$ задовольняють також рівняння:

$$d\Psi/dy = -B^T[w; \lambda]\Psi, \tag{16}$$

$$d\Psi/dt = -C^T[w; \lambda]\Psi. \tag{17}$$

Градієнти власних значень $\lambda_j \in T^*(M)$, $j = \overline{1, N}$, виражаються через відповідні власні вектор–функції $\Phi_j \in W$ та $\Psi_j \in W$:

$$grad\, \lambda_j = (\Phi_{2j}\Psi_{1j}, \Phi_{1j}\Psi_{2j}, -\Phi_{3j}\Psi_{1j}, \Phi_{2j}\Psi_{1j}, \Phi_{3j}\Psi_{2j}, \Phi_{1j}\Psi_{3j}, \Phi_{2j}\Psi_{3j})^T / \mu_j,$$

де $\Phi_j = (\Phi_{1j}, \Phi_{2j}, \Phi_{3j})^T$, $\Psi_j = (\Psi_{1j}, \Psi_{2j}, \Psi_{3j})^T$, а $\mu_j = \int_0^{2\pi} (\Phi_{2j}\Psi_{2j} - \Phi_{1j}\Psi_{1j}) dx \in D(M \times W^2 N)$, $j = \overline{1, N}$, — нормуючі множники, інваріантні у відношенні до системи (10)–(13), що неважко довести за допомогою безпосередніх обчислень. У випадку $\mu_j = c_j$ умова (14), яка задає підпростір M_N, набуває вигляду обмежень типу Неймана:

$$\begin{gathered} < \Phi_1, \Psi_2 >= 0, \quad < \Phi_2, \Psi_1 >= 0, \\ < \Phi_1, \Psi_3 >= f, \; < \Phi_2, \Psi_3 >= g, \quad < \Phi_3, \Psi_2 >= g^*, \; < \Phi_3, \Psi_1 >= -f^*, \end{gathered} \tag{18}$$

де $< \Phi_p, \Psi_q >= \sum_{j=1}^{N} \Phi_{pj}\Psi_{qj}$, $p, q = \overline{1, 3}$. Із спектральних задач (11)–(13) і (15)–(17) отримуємо вирази для решти компонентів вектора w та їх похідних за змінною y на підпросторі $M_N \subset M$:

$$\begin{aligned}
&u = 2(<\Lambda\Phi_1, \Psi_2> - fg^*)/(<\Phi_1, \Psi_1> - <\Phi_2, \Psi_2>),\\
&\tilde{u} = 2(<\Lambda\Phi_2, \Psi_1> + f^*g)/(<\Phi_1, \Psi_1> - <\Phi_2, \Psi_2>),\\
&\partial f/\partial y = <\Lambda\Phi_1, \Psi_3> + f(\Phi_1, \Psi_1 - \Phi_3, \Psi_3),\\
&\partial g/\partial y = <\Lambda\Phi_2, \Psi_3> + g(\Phi_2, \Psi_2 - \Phi_3, \Psi_3),\\
&\partial f^*/\partial y = <\Lambda\Phi_3, \Psi_1> - f^*(\Phi_1, \Psi_1 - \Phi_3, \Psi_3),\\
&\partial g^*/\partial y = -<\Lambda\Phi_3, \Psi_2> - g^*(\Phi_1, \Psi_1 - \Phi_3, \Psi_3),
\end{aligned}$$

де $\Lambda = diag\,(\lambda_1, ..., \lambda_N)$, а також додаткові диференціальні обмеження:

$$d/dx <\Phi_p, \Psi_p> = d/dy <\Phi_p, \Psi_p> = d/dt <\Phi_p, \Psi_p> = 0, \quad p = \overline{1,3}.$$

Тоді підпростір M_N можна означити еквівалентним чином:

$$\begin{aligned}
M_N \ = \ \{&w \in M : u = 2(<\Lambda\Phi_1, \Psi_2> - fg^*)/(<\Phi_1, \Psi_1> - <\Phi_2, \Psi_2>),\\
&\tilde{u} = 2(<\Lambda\Phi_2, \Psi_1> + f^*g)/(<\Phi_1, \Psi_1> - <\Phi_2, \Psi_2>),\ f = <\Phi_1,\, \Psi_3>,\\
&g = <\Phi_2,\, \Psi_3>,\ f^* = -<\Phi_3,\, \Psi_1>,\ g^* = <\Phi_3,\, \Psi_2>\}. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Тобто розв'язки системи (8)–(10) з нелінійними обмеженнями (7) на підпросторі (19) виражаються через компоненти власних вектор–функцій Φ_j, Ψ_j, $j = \overline{1, N}$, які можна використати для введення координат на скінченновимірному підпросторі $M_N \subset M$. У зв'язку з цим виникає задача опису диференціально–геометричної структури заданого умовами (18) гладкого многовиду $\bar{M}_N \subset \mathbb{R}^{6N}$, дифеоморфного M_N.

Теорема 1. *Функціональний підпростір $M_N \subset M$ (19) для кожного $x \in \mathbb{S}^1$ дифеоморфний скінченновимірному многовиду $\bar{M}_N \subset \mathbb{R}^{6N}$ з симплектичною структурою $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{6N})$:*

$$\omega^{(2)} = \sum_{p=1}^{3}\sum_{j=1}^{N} d\Phi_{pj} \wedge d\Psi_{pj}, \qquad (20)$$

у відношенні до якої векторні поля d/dx, d/dy та d/dt є гамільтоновими динамічними системами з відповідними функціями Гамільтона $h^{(x)}$, $h^{(y)}$, $h^{(t)} : \mathbb{R}^{6N} \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&h^{(x)} = <\Lambda\Phi_2, \Psi_2> - <\Lambda\Phi_1, \Psi_1> +\\
&\quad <\Phi_1, \Psi_3><\Phi_3, \Psi_1> - <\Phi_2, \Psi_3><\Phi_3, \Psi_2>,\\
&h^{(y)} = -<\Lambda\Phi_2, \Psi_2> - <\Lambda\Phi_1, \Psi_1> +\\
&\quad <\Phi_1, \Psi_3><\Phi_3, \Psi_1> + <\Phi_2, \Psi_3><\Phi_3, \Psi_2>,\\
&h^{(t)} = -i(<\Lambda^2\Phi_1, \Psi_1> + <\Lambda^2\Phi_2, \Psi_2> - <\Lambda\Phi_1, \Psi_3><\Phi_3, \Psi_1> -\\
&\quad <\Lambda\Phi_3, \Psi_1><\Phi_1, \Psi_3> - <\Lambda\Phi_2, \Psi_3><\Phi_3, \Psi_2> -\\
&\quad <\Lambda\Phi_3, \Psi_2><\Phi_2, \Psi_3> - <\Lambda\Phi_1, \Psi_3><\Phi_3, \Psi_1> -\\
&\quad <\Lambda\Phi_3, \Psi_2><\Phi_2, \Psi_3 + <\Phi_1, \Psi_3><\Phi_3, \Psi_1>(<\Phi_3, \Psi_3> -\\
&\quad <\Phi_1, \Psi_1>) + <\Phi_2, \Psi_3><\Phi_3, \Psi_2>(<\Phi_3, \Psi_3> - <\Phi_2, \Psi_2>)). \qquad (21)
\end{aligned}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо на фазовому просторі $\tilde{M} := M \times W^2$ розширеної динамічної системи (8)–(10) та (13), (17) з параметром $\lambda = \lambda_j$,

$j=\overline{1,N},$ функціонал Лагранжа $\tilde{\mathcal{L}}_N=\int\limits_0^{2\pi}\tilde{\mathcal{L}}_N[w,\Phi_j,\Psi_j]dx:$

$$\tilde{\mathcal{L}}_N=-\gamma_1+\sum_{j=1}^N\lambda_j^{'}+\sum_{j=1}^N s_j\mu_j,$$

$$\lambda_j^{'}:=c_j\lambda_j=\int\limits_0^{2\pi}(\Phi_{1j}d\Psi_{1j}dx+\Phi_{2j}d\Psi_{2j}/dx+\Phi_{3j}d\Psi_{3j}/dx+$$

$$u\Phi_{2j}\Psi_{1j}+\tilde{u}\Phi_{1j}\Psi_{2j}-f\Phi_{3j}\Psi_{1j}+f^*\Phi_{1j}\Psi_{3j}+g\Phi_{3j}\Psi_{2j}+g^*\Phi_{2j}\Psi_{3j})dx,$$

де $s_j\in\mathbb{C},\ \ j=\overline{1,N},$ — деякі константи. Умова $grad\,\tilde{\mathcal{L}}_N=0$ описує інваріантний підпростір $\tilde{M}_N\subset\tilde{M}$ цієї системи. Як показано у роботі [4], на ньому існує точна 2–форма $\omega^{(2)}=d\alpha^{(1)},$ де 1–форма $\alpha^{(1)}\in\Lambda^1(\tilde{M})$ для будь–яких $(w,\Phi_j,\Psi_j)^T\in\tilde{M}_N$ задовольняє диференціально–геометричне співвідношення:

$$d\tilde{\mathcal{L}}_N[w,\Phi_j,\Psi_j]=<grad\,\tilde{\mathcal{L}}_N[w,\Phi_j,\Psi_j]\,,(dw,d\Phi_j,d\Psi_j)^T>+d\alpha^{(1)}/dx. \qquad (22)$$

З рівності (22) отримуємо 2–форму $\omega^{(2)}$ у вигляді (20), яка є виродженою на підпросторі $\tilde{M}_N\subset\tilde{M}.$ Оскільки $M_N,$ завдяки рівностям формули (19), можна вкласти у простір $\tilde{M}_N,$ то 2–форма $\omega^{(2)}$ задає на ньому невироджену симплектичну структуру. Це і доводить дифеоморфність підпростору M_N та симплектичного многовиду $\bar{M}_N\subset\mathbb{R}^{6N}.$

Крім того, для функцій $\tilde{h}^{(x)},\ \tilde{h}^{(y)},\ \tilde{h}^{(t)}\in D(\tilde{M}_N),$ знайдених за формулами:

$$<grad\,\tilde{\mathcal{L}}_N[w,\Phi_j,\Psi_j]\,,(dw/dx,d\Phi_j/dx,d\Psi_j/dx)^T>=-d\tilde{h}^{(x)}/dx,$$
$$<grad\,\tilde{\mathcal{L}}_N[w,\Phi_j,\Psi_j]\,,(dw/dy,d\Phi_j/dy,d\Psi_j/dy)^T>=-d\tilde{h}^{(y)}/dx,$$
$$<grad\,\tilde{\mathcal{L}}_N[w,\Phi_j,\Psi_j]\,,(dw/dt,d\Phi_j/dt,d\Psi_j/dt)^T>=-d\tilde{h}^{(t)}/dx,$$

де $<,>$ — звичайний скалярний добуток в $\mathbb{R}^{6N+6},$ на підпросторі $\tilde{M}_N\subset\tilde{M}$ мають місце рівності:

$$i_{d/dx}\omega^{(2)}=-d\tilde{h}^{(x)},\quad i_{d/dy}\omega^{(2)}=-d\tilde{h}^{(y)},\quad i_{d/dt}\omega^{(2)}=-d\tilde{h}^{(t)},$$

де i_K — внутрішнє диференціювання на алгебрі Грассмана диференціальних форм за векторним полем $K:\tilde{M}_N\to T(\tilde{M}_N),$ які зберігаються на підпросторі $M_N\subset\tilde{M}_N$ Тобто функції $h^{(x)}:=\tilde{h}^{(x)}|_{M_N},\ h^{(y)}:=\tilde{h}^{(y)}|_{M_N}$ та $h^{(t)}:=\tilde{h}^{(t)}|_{M_N}\in D(M_N)$ є гамільтоніанами векторних полів $d/dx,\ d/dy$ і d/dt на $M_N.$

Симплектична структура $\omega^{(2)}$ генерує на просторі гладких функцій $D(\mathbb{R}^{6N})$ канонічну дужку Пуассона [8]:

$$\{F,G\}=<grad\,F,-\omega^{(2)}grad\,G> \qquad (23)$$

для будь–яких $F,G\in D(\mathbb{R}^{6N}),$ у відношенні до якої лінійно незалежні функції (21) перебувають в інволюції:

$$\{h^{(x)},h^{(y)}\}=\{h^{(x)},h^{(t)}\}=\{h^{(y)},h^{(t)}\}.$$

Таким чином, у випадку $N=1$ гамільтонові векторні поля $d/dx,\ d/dy$ та d/dt на $\mathbb{R}^{6N}$ задовольняють умови теореми Ліувілля [8], а отже, є цілком інтегровними динамічними системами на $\bar{M}_N.$

4. Інтегровність редукованих комутуючих векторних полів. Щоб довести інтегровність гамільтонових векторних полів d/dx, d/dy та d/dt на $\bar{M}_N$ для довільного $N \in \mathbb{N}$, використаємо метод Мозера [9], за допомогою якого знайдемо для них еквівалентне матричне зображення, залежне від деякого параметра $\lambda \in \mathbb{C}$.

Теорема 2. *Гамільтонові векторні поля d/dx, d/dy та d/dt на скінченновимірному симплектичному многовиді $\bar{M}_N \subset \mathbb{R}^{6N}$ допускають еквівалентне матричне зображення типу Лакса:*

$$dS_N/dx = [A_N, S_N], \quad dS_N/dy = [B_N, S_N], \quad dS_N/dt = [C_N, S_N], \tag{24}$$

де $A_N := A_N(\Phi_j, \Psi_j; \lambda) = A[w;\lambda]|_{M_N}$, $B_N := B_N(\Phi_j, \Psi_j; \lambda) = B[w;\lambda]|_{M_N}$ та $C_N := C_N(\Phi_j, \Psi_j; \lambda) = C[w;\lambda]|_{M_N}$ – проекції відповідних матриць на многовиді $M \supset M_N$, а матриця $S_N := S_N(\Phi_j, \Psi_j; \lambda)$ задається формулою:

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\lambda - \lambda_j} \begin{pmatrix} \Phi_{1j}\Psi_{1j} & \Phi_{1j}\Psi_{2j} & \Phi_{1j}\Psi_{3j} \\ \Phi_{2j}\Psi_{1j} & \Phi_{2j}\Psi_{2j} & \Phi_{2j}\Psi_{3j} \\ \Phi_{3j}\Psi_{1j} & \Phi_{3j}\Psi_{2j} & \Phi_{3j}\Psi_{3j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{25}$$

Д о в е д е н н я. Матричне зображення Лакса для векторного поля d/dx на M_N можна отримати на основі властивості градієнта функціонала $\Delta(\lambda) = Sp\, S$ для матриці монодромії [8] періодичної спектральної задачі (11):

$$S := S(x;\lambda) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix},$$

яка задовольняє рівняння Новікова–Лакса [8,10]:

$$S = [A, S], \tag{26}$$

а також можна породжувати за допомогою рекурентних співвідношень [11]:

$$\theta\varphi_n = \eta\varphi_{n+1}, \quad \varphi_n = grad\,\gamma_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

де θ, $\eta : T^*(M) \to T(M)$ — деякі імплектичні оператори [8], а градієнти законів збереження (2):

$$\varphi(\lambda) = grad\,\Delta(\lambda) \simeq \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n \lambda^{-n+1}, \quad |\lambda| \to \infty.$$

Оскільки для градієнтів власних значень λ_j, $j = \overline{1,N}$ має місце рівність:

$$\theta\, grad\,\lambda_j = \lambda_j \eta\, grad\,\lambda_j, \quad n \in \mathbb{N},$$

що також відзначається у роботі [11], а градієнт сліду матриці монодромії S можна виразити через її елементи:

$$\varphi(\lambda) = (S_{21}, S_{12}, -S_{31}, S_{32}, S_{13}, S_{23})^T,$$

то відразу отримуємо вигляд цих елементів на підпросторі M_N. Інші елементи матриці S можуть бути знайдені з рівняння (26).

Редукована у такий спосіб матриця монодромії S на M_N співпадає з матрицею S_N (25) і задає відображення Мозера $S \mapsto S_N = S|_{M_N}$ [9].

Зображення типу Лакса (24) для векторних полів d/dy та d/dt на M_N виникають з умови сумісності диференціальних рівнянь (11)–(13) на $M \supset M_N$.

Наслідок. *Функції* $Sp\, S_N^k = \nu_1^k \nu_2^k \nu_3^k$, $k \in \mathbb{N}$, *залежні від параметра* $\lambda \in \mathbb{C}$, *а також коефіцієнти характеристичного полінома матриці* S_N :

$$det\,(S_N - \nu \mathbf{1}) = \nu^3 - P_2\nu^2 + P_1\nu - P_0,$$

де $\mathbf{1} = diag\,(1,1,1)$, $P_2 = Sp\, S_N$, $P_1 = \nu_1\nu_2 + \nu_2\nu_3 + \nu_3\nu_1$, $P_0 = det\, S_N$, *а* ν_1, ν_2, ν_3 *— власні значення матриці* S_N, *породжують інваріанти векторних полів* d/dx, d/dy *та* d/dt *на* $\bar{M}_N$.

Коефіцієнти розкладу функціоналів P_1 та P_0:

$$P_1 = -1 + P_2 + \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^1/(\lambda - \lambda_j),\ P_0 = \sum_{j=1}^{N} \big(\sigma_j^2/(\lambda - \lambda_j) + +\sigma_j^3/(\lambda - \lambda_j)^2\big),$$

утворюють множину $3N$ лінійно незалежних законів збереження векторних полів d/dx, d/dy та d/dt на $\bar{M}_N$:

$$\sigma_j^1 = \Phi_{3j}\Psi_{3j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{N} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\big((\Phi_{1j}\Phi_{2i} - \Phi_{2j}\Phi_{1i})(\Psi_{1j}\Psi_{2i} - \Psi_{2j}\Psi_{1i}) -$$
$$(\Phi_{1j}\Phi_{3i} - \Phi_{3j}\Phi_{1i})(\Psi_{1j}\Psi_{3i} - \Psi_{3j}\Psi_{1i}) - (\Phi_{2j}\Phi_{3i} - \Phi_{3j}\Phi_{2k})(\Psi_{2j}\Psi_{3i} - \Psi_{3j}\Psi_{2i})\big),$$
$$\sigma_j^2 = \Phi_{3j}\Psi_{3j} + \sum_{i=1, i\neq j}^{N} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\big((\Phi_{1j}\Phi_{3i} - \Phi_{3j}\Phi_{1i})(\Psi_{1j}\Psi_{3i} - \Psi_{3j}\Psi_{1i}) -$$
$$(\Phi_{2j}\Phi_{3i} - \Phi_{3j}\Phi_{2k})(\Psi_{2j}\Psi_{3i} - \Psi_{3j}\Psi_{2i})\big) +$$
$$\sum_{i,r=1, i\neq j, r\neq i}^{N} \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)(\lambda_i - \lambda_r)}\big((\Phi_{1j}\Phi_{2r} - \Phi_{2j}\Phi_{1r})(\Phi_{3i}\Psi_{1i}(\Psi_{2j}\Psi_{3r} - \Psi_{3j}\Psi_{2r}) -$$
$$\Phi_{3i}\Psi_{2i}(\Psi_{1j}\Psi_{3r} - \Psi_{3j}\Psi_{1r}) + \Phi_{3i}\Psi_{3i}(\Psi_{1j}\Psi_{2r} - \Psi_{2j}\Psi_{1r})) +$$
$$(\Phi_{1i}\Phi_{2r} - \Phi_{2i}\Phi_{1r})(\Phi_{3j}\Psi_{1j}(\Psi_{2i}\Psi_{3r} - \Psi_{3i}\Psi_{2r}) -$$
$$\Phi_{3j}\Psi_{2j}(\Psi_{1i}\Psi_{3r} - \Psi_{3i}\Psi_{1r}) + \Phi_{3j}\Psi_{3j}(\Psi_{1i}\Psi_{2r} - \Psi_{2i}\Psi_{1r}))\big),$$
$$\sigma_j^3 = \sum_{i=1, i\neq j}^{N} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\big((\Phi_{1j}\Phi_{2i} - \Phi_{2j}\Phi_{1i})(\Phi_{3j}\Psi_{1j}(\Psi_{2j}\Psi_{3i} - \Psi_{3j}\Psi_{2i}) -$$
$$\Phi_{3j}\Psi_{2j}(\Psi_{1j}\Psi_{3i} - \Psi_{3j}\Psi_{1i}) + \Phi_{3j}\Psi_{3j}(\Psi_{1j}\Psi_{2i} - \Psi_{2j}\Psi_{1i})\big). \qquad (27)$$

Закони збереження σ_j^1, σ_j^2, $\sigma_j^3 \in D(\mathbb{R}^{6N})$ (27) перебувають в інволюції у відношенні до дужки Пуассона (23), тобто гамільтонові векторні поля d/dx, d/dy та d/dt на многовиді $\bar{M}_N$ є інтегровними за Ліувіллем для будь-якого $N \in \mathbb{N}$. А отже, справедлива теорема:

Теорема 3. *Динамічна система* (8)–(10) *допускає інваріантну редукцію на скінченновимірний підпростір* $M_N \subset \bar{M}_N \subset \mathbb{R}^{6N}$ (18), *на якому векторні поля* d/dx, d/dy *та* d/dt *гамільтонові та інтегровні за Ліувіллем. Співвідношення формули* (19) *описують періодичні розв'язки системи з нелінійними обмеженнями* (7).

5. Висновки. У статті для (2+1)–вимірної динамічної системи Деві–Стюартсона (8)–(10) з нелінійними обмеженнями (7), яка володіє зображенням Лакса у вигляді умов сумісності трьох матричних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку (11)–(13) за змінними x, y, $t \in \mathbb{R}$, розвинено метод редукування [4, 5] інтегровних за Лаксом (1+1)–вимірних систем на скінченновимірні підпростори їх розв'язків, породжені локальними законами збереження та інваріантними у відношенні до систем власними значеннями асоційованих спектральних задач. Він дозволяє знаходити часткові розв'язки системи Деві–Стюартсона на періодичних функціональних многовидах інтегруванням комутуючих гамільтонових векторних полів, заданих на скінченновимірних симплектичних многовидах.

Метод редукування на нелокальні скінченновимірні підпростори розв'язків можна застосувати до дослідження широкого класу (2+1)–вимірних нелінійних динамічних систем, які виникають з умови сумісності двох гамільтонових полів типу Лакса (3) на орбітах коприєднаної дії алгебри Лі інтегро–диференціальних операторів виду (1) з матричними коефіцієнтами і, як наслідок, володіють трилінійним матричним зображенням Лакса.

1. *Сато М., Дзимбо М., Мива М.* Голономные квантовые поля. – М.: Мир, 1983. – 304 с.
2. *Konopelchenko B., Sidorenko Ju., Strampp W.* (1+1)–dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)–dimensional systems // Phys. Lett. A. – 1991. – **157**. – P. 17–21.
3. *Adler M.* On a trace functional for formal pseudo–differential operators and the symplectic structures of a Korteweg–de Vries equation // Invent. Math. – 1979. – **50**, № 2. – P. 219–248.
4. *Prykarpatsky A., Samuliak R., Blackmore D., Strampp W., Sydorenko Yu.* Some remarks on Lagrangian and Hamiltonian formalisms, related to infinite–dimensional dynamical systems with symmetries // Condensed Matter Physics. – 1995. – № 6. – P. 79–103.
5. *Прикарпатський Я.А., Притула М.М., Гентош О.Є.* Скінченновимірні редукції узагальненої динамічної системи Бюргерса та їх інтегровність // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 1. – С. 95–102.
6. *Blaszak M.* Multi–Hamiltonian theory of dynamical systems. – Verlag–Berlin–Heidelberg: Springer, 1998. – 345 p.
7. *Кулиш П.П., Липовский В.Д.* О гамильтоновой интерпретации метода обратной задачи для уравнения Деви–Стюартсона // Записки науч. сем. ЛОМИ. – Л.: Наука, 1987. – **161**. – С. 54–71.
8. *Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н. (мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально–геометрические аспекты. – К.: Наукова думка, 1987. – 296 с.
9. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 5. – С. 109–151.
10. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский А.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. – М: Наука, 1980. – 320 с.
11. *Ma W.-X., Zhou Z.* Binary symmetry constraints of $\mathcal{N}$–wave interaction equations in (1+1) and (2+1) dimensions // J. Math. Phys. – 2001. – **42**, № 9. – P. 4356–4382.

ГАМИЛЬТОНОВАЯ РЕДУКЦИЯ ТИПА НЕЙМАНА СИСТЕМЫ ДЕВИ–СТЮАРТСОНА

Для (2+1)*–измеримой нелинейной динамической системы Деви–Стюартсона, владеющих трилинейным матричным представлением Лакса, развит метод редуцирования на нелокальное конечноизмеримое подпространство её решений.*

THE HAMILTONIAN NEUMANN TYPE REDUCTION OF THE DAVEY–STEWARTSON SYSTEM

For the Davey–Stewartson (2+1)*–dimensional nonlinear dynamical system, possessing a triple matrix Lax representation, the method of reducing upon its nonlocal finite–dimensional solution subspace is developed.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
01.12.03