УДК 517.946

І. Д. Пукальський

ЗАДАЧА З КОСОЮ ПОХІДНОЮ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

У просторах класичних функцій з степеневою вагою доведено існування і єдиність розв'язку задачі з косою похідною для сингулярних нерівномірно еліптичних рівнянь без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів. Знайдено оцінку розв'язку задачі у відповідних просторах.

Постановка задачі і основний результат. Нехай D — обмежена, опукла область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D. Розглянемо в області D задачу з косою похідною для еліптичного рівняння

$$(Lu)(x) \equiv \left[\sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(x) D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 + \sum_{i=1}^{n} A_i(x) D_{x_i}^1 + A_0(x)\right] u(x) = f(x), \qquad (1)$$

$$(\mathcal{B}u)(x) \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} b_k(x) D_{x_k}^1 + b_0(x)\right] u(x)|_{\partial D} = g(x). \qquad (2)$$

Порядок особливості коефіцієнтів операторів L і $\mathcal{B}$ буде характеризувати функція $a(k,x)$: $a(k,x) = |x-y|^k$, якщо $|x-y| \le 1$; $a(k,x) \equiv 1$, якщо $|x-y| \ge 1$, $|x-y| = \min\limits_{y\in\partial D}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$.

Нехай $P_1(x^{(1)})$, $B_k(x^{(2)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_{k-1}^{(1)}, x_k^{(2)}, x_{k+1}^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ довільні точки із $\bar{D}$. Означимо простори, в яких вивчається задача (1), (2). Позначимо через $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;l;D)$ — множину функцій $u(x)$, які визначені в $\bar{D}$, мають неперервні частинні похідні в D до порядку 2 і є скінченною норма

$$|u;\gamma,\beta;l;D|_{2+\alpha} \equiv |u;\gamma,\beta;l;D|_2 + [u;\gamma,\beta;l;D]_{2+\alpha} \equiv$$

$$\sup_{P\in\bar{D}} a(l,x)\left[|u(x)| + \sum_{i=1}^{n} a(\gamma-\beta_i,x)|D_{x_i}^1 u(x)| + \sum_{ij=1}^{n} a(2\gamma-\beta_i-\beta_j,x)|D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 u(x)|\right] +$$

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \sup_{P_1,B_k\in\bar{D}} \{a(l+2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha(\gamma-\beta_k),P)|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}|^{-\alpha}\times$$

$$|D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 u(P_1) - D_{x_i}^1 D_{x_j}^1 u(B_k)|\}; \qquad |u;\gamma,\beta;0;D|_0 \equiv \sup_{P\in\bar{D}} |u(P)| \equiv |u|_D.$$

$a(m,P) = \min(a(m;x^{(1)}), a(m;x^{(2)}))$, $\gamma \ge 0$, $\beta_i \in (-\infty,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$, $l \ge 0$. $C^{1+\alpha}(r;D)$ — множина функцій $u(x)$ визначених в $\bar{D}$ зі скінченною нормою

$$\|u;r;D\|_\alpha = \sup_{P\in\bar{D}} a(r,x)\left[|u(P)| + a(1,x)\sum_{i=1}^{n}|D_{x_i}^1 u(P)|\right] +$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sup_{P_1,B_k\in\bar{D}} \left\{a(r+1+\alpha;P)|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}|^{-\alpha} \sum_{i=1}^{n} |D_{x_i}^1 u(P_1) - D_{x_i}^1 u(B_k)|\right\}.$$

Нехай для задачі (1), (2) виконуються умови:

а) коефіцієнти $A_i(x) \in C^{\alpha}(r_i; D)$, $A_0(x) \in C^{\alpha}(\delta, D)$, $A_0(x) < 0$, $A_{ij}(x) \in C^{\alpha}(\beta_i + \beta_j; D)$, $r_i \geq 0$, $\delta \geq 0$ і виконується умова рівномірної еліптичності ([3], стор. 36) для рівняння

$$\sum_{ij=1}^{n} a(\beta_i + \beta_j, x) A_{ij}(x) D^1_{x_i} D^1_{x_j} u(x) = f_1(x); \tag{3}$$

б) вектори $\vec{b}^{(a)} \equiv \{b_1^{(a)}, \ldots, b_n^{(a)}\}$, $b_k^{(a)} = a(\beta_k, x) b_k(x)$ і $\vec{l} = \{l_1, \ldots, l_n\}$, $l_k = b_k \cdot |\vec{b}|^{-1}$, $|\vec{b}| = \left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]^{1/2}$ утворюють з напрямком зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до ∂D в тій же точці $P \in \partial D$ кут менший $\frac{\pi}{2}$, $b_0(x) \in C^{1+\alpha}(\nu; D)$, $b_0(x) > 0$, $\nu \geq 0$, $b_k(x) \in C^{1+\alpha}(\beta_k, D)$, $f(x) \in C^{\alpha}(\gamma, \beta; \delta; D)$, $g(x) \in C^{1+\alpha}(\gamma, \beta; \nu; D)$, межа області ∂D належить $C^{2+\alpha}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1), (2) *виконуються умови* а), б),

$$\gamma = \max\Big(\max_i(1 + \beta_i), \max_i(r_i - \beta_i), \frac{\delta}{2}, \nu\Big), \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) *в просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; D)$ *і для нього правильна оцінка*

$$|u; \gamma, \beta; 0; D|_{2+\alpha} \leq C\Big(|f; \gamma, \beta; \delta; D|_{\alpha} + |g; \gamma, \beta; \nu; D|_{1+\alpha}\Big). \tag{4}$$

Стала C *залежить від* n, α, $\operatorname{diam} D$, *норми коефіцієнтів операторів* $L, \mathcal{B}$.

Оцінки розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $D_m = \Big\{x, x \in D, a(1, x) \geq m^{-1}, m > 1\Big\}$ зростаюча послідовність областей з гладкою межею ∂D_m, $\partial D_m \in C^{2+\alpha}$. Розглянемо в області D задачу знаходження розв'язку рівняння

$$(Lu_m)(x) \equiv \left[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x) D^1_{x_i} D^1_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) D^1_{x_i} + a_0(x)\right] u_m(x) = f_m(x), \tag{5}$$

який на межі ∂D задовольняє умову

$$\left[\sum_{k=1}^{n} e_k(x) D^1_{x_k} + e_0(x)\right] u_m(x)\bigg|_{\partial D} = g_m(x)|_{\partial D}. \tag{6}$$

Тут $a_{ij}(x) = A_{ij}(x)$, $a_i(x) = A_i(x)$, $a_0(x) = A_0(x)$, $e_k(x) = b_k(x)$, $e_0(x) = b_0(x)$, $f_m(x) = f(x)$, $g_m(x) = g(x)$, якщо $x \in D_m$. Для $x \in D \setminus D_m$ коефіцієнти $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a_0(x)$, $e_k(x)$, $e_0(x)$, функції $f_m(x)$, $g_m(x)$ зображаються формулою $\psi_1(x) \equiv S(a, x)$,

$$S(a, x) = \int_0^a d\tau \int_{\partial D_m} E(a, x, \tau, \xi) \psi(\xi) d_{\xi} S,$$

де $a = \text{const} > 0$, $\psi(\xi)$ відповідно рівна $A_{ij}(x)|_{\partial D_m}$, $A_i(x)|_{\partial D_m}$, $A_0(x)|_{\partial D_m}$, $b_k(x)|_{\partial D_m}$, $b_0(x)|_{\partial D_m}$, $f(x)|_{\partial D_m}$, $g(x)|_{\partial D_m}$, $E(t, x, \tau, \xi)$ — функція Гріна задачі Діріхле [2]

$$D_t u - \Delta u = 0, \quad u(0, x) = 0, \quad u|_{\partial D_m} = \psi(\xi), \quad \xi \in \partial D_m, \quad x \in D \setminus D_m.$$

Теорема 2. *Якщо* $u_m(x)$ *класичний розв'язок задачі* (5), (6) *в області* D *і виконуються умови* а), б), *то для* $u_m(x)$ *правильна оцінка*

$$|u_m| \leq |f_m \cdot a_0^{-1}|_D + |g_m \cdot e_0^{-1}|_D. \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. Розглянемо точку найменшого значення функції $u_m(x)$. Можливі три випадки: $\min\limits_{\bar{D}} u_m(x) > 0$, або $\min\limits_{\bar{D}} u_m(x) = \min\limits_{\partial D} u_m(x) < 0$, або $\min\limits_{\bar{D}} u_m(x) = u_m(P_1) < 0$, $P_1 \in D$. Причому в точці P_1

$$D^1_{x_i} u_m = 0, \quad \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1) D^1_{x_i} D^1_{x_j} u_m \geq 0 \tag{8}$$

і задовольняється рівняння (5). Нерівність (8) має місце тому, що в точці мінімума другі похідні $D^1_{y_k} D^1_{y_k} u_m(y)$ по будь–якому напрямку

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} a(\beta_i, x^{(1)})(x_i - x_i^{(1)}), \quad (\det \|\alpha_{ki}\| \neq 0)$$

невід'ємні і справедлива рівність $\sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1) D^1_{x_i} D^1_{x_j} u_m =$

$$\sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{ij=1}^{n} a(\beta_i + \beta_j, x^{(1)}) a_{ij}(P_1) \alpha_{ki} \alpha_{lj} \right) D^1_{y_k} D^1_{y_l} u_m = \sum_{k=1}^{n} \mu_k D^1_{y_k} D^1_{y_k} u_m,$$

причому $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — характеристичні числа квадратичної форми за умовою а) від'ємні (рівняння (3) рівномірно еліптичне). Враховуючи (8) і рівняння (5) в точці P_1 має місце нерівність $u_m(P_1) \geq f_m(P_1) \cdot a_0^{-1}(P_1)$. Нехай $\min\limits_{\bar{D}} u_m(x) = \min\limits_{\partial D} u_m(x) = u_m(P_2)$. В точці $P_2 \in \partial D$ маємо $du_m/d\vec{l} \leq 0$ (вектор $\vec{l}$ задовольняє умову б)) і тому з крайової умови (6) одержимо $u_m(P_2) \geq g_m(P_2) \cdot e_0^{-1}(P_2)$. Отже,

$$u_m(x) \geq \min \left\{ 0, \min_{\bar{D}}(f_m a_0^{-1}), \min_{\bar{D}}(g_m e_0^{-1}) \right\}. \tag{9}$$

Розглянемо точку найбільшого значення функції $u_m(x)$. Якщо P_3 точка максимуму для $u_m(x)$ попадає на ∂D, то в ній $\dfrac{du_m}{d\vec{l}} \geq 0$, і тому з крайової умови (6) знаходимо $u_m(P_3) \leq g_m(P_3) e_0^{-1}(P_3)$. Якщо P_4 точка максимуму для $u_m(x)$ знаходиться в D, то в точці P_4 виконуються співвідношення $D^1_{x_i} u_m = 0$, $\sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_4) D^1_{x_i} D^1_{x_j} u_m \leq 0$ і рівняння (5). З рівняння (5) одержимо $u_m(P_4) \leq f_m(P_4) a_0^{-1}(P_4)$. Таким чином, для розв'язку задачі (5), (6) справедлива нерівність

$$u_m(x) \leq \max \left\{ 0, \max_{\bar{D}}(f_m a_1^{-1}), \max_{\bar{D}}(g_m e_0^{-1}) \right\}. \tag{10}$$

Тепер, враховуючи (9) і (10), одержимо оцінку (7). Теорема доведена.

Введемо в $C^{2+\alpha}(D)$ норму $|u_m; \gamma, \beta; l; D|_{2+\alpha}$ еквівалентну при кожному фіксованому m гельдеровій нормі, яка визначається так, як $|u; \gamma, \beta; l; D|_{2+\alpha}$, тільки замість $a(k, x)$ беремо $d(k, x)$: $d(k, x) = a(k, x)$, якщо $|x - y| \geq m^{-1}$; $d(k, x) = m^{-k}$, якщо $|x - y| \leq m^{-1}$. При будь-якому фіксованому m, задача (5), (6) має єдиний розв'язок (теорема 3.2. [3, с. 179]). Знайдемо оцінку похідних розв'язку $u_m(x)$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді для розв'язку задачі* (5), (6) *справедлива оцінка*

$$|u_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}\le C(|f_m;\gamma,\beta;2\gamma;D|_\alpha+|g_m;\gamma,\beta;\gamma;D|_{1+\alpha}+|u_m|_D). \qquad (11)$$

Стала C *не залежить від* m.

Д о в е д е н н я. Використовуючи означення норми $|u_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}$ і інтерполяційні нерівності, маємо

$$|u_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}\le(1+\varepsilon^\alpha)[u_m;\gamma,\beta;0;D]_{2+\alpha}+C(\varepsilon)|u_m|_D.$$

Тому досить оцінити півнорму $[u_m;\gamma,\beta;0;D]_{2+\alpha}$. Із означення півнорми випливає існування в $\bar D$ точок $P_1(x^{(1)})$ і $B_k(x^{(2)})$, для яких правильна нерівність

$$\frac12[u_m;\gamma,\beta;0;D]_{2+\alpha}\le E\equiv\sum_{i,j,k=1}^n d(2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha(\gamma-\beta_k);P)|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}|^{-\alpha}\times$$
$$|D^1_{x_i}D^1_{x_j}u_m(P_1)-D^1_{x_i}D^1_{x_j}u_m(B_k)|. \qquad (12)$$

Нехай $|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}|\ge 4^{-1}\nu d(\gamma-\beta_k,P)\equiv T,\ \nu\in(0,1)$, тоді, використовуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$E\le 2\varepsilon^\alpha[u_m;\gamma,\beta;0;D]_{2+\alpha}+C(\varepsilon)|u_m|_D. \qquad (13)$$

Розглянемо випадок, коли $|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}|\le T$. Нехай $d(\gamma;P)\equiv d(\gamma,x^{(1)})$, $|x_k^{(1)}-y_k|\le 2Tn^{-1},\ \ y\in\partial D$. Позначимо через $K(r,P)$ кулю радіуса r, $r\ge 8T$, з центром в деякій точці $P\in\partial D$, яка містить точки $P_1,\ B_k$. Використовуючи обмеження на гладкість поверхні ∂D, можна розпрямити $\partial D\cap K(r,P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\psi(y)$ ([4, с. 126]), в результаті якого область $\Pi=D\cap K(r,P)$ переходить в Π_1, для точок якої $y_n\ge 0$. Якщо покласти $u_m(x)=v_m(y)$, $P_1=R_1$, $B_k=T_k$, $d(\gamma;P_1)\equiv h(\gamma,R_1)$, $E\equiv E_1$ і коефіцієнти операторів L і $\mathcal B$ при цьому перетворенні позначити $k_{ij}(y)$, $k_i(y)$, $k_0(y)$, $l_i(y)$, $l_0(y)$, то $v_m(y)$ в Π_1 буде розв'язком задачі

$$\Big(\sum_{ij=1}^n k_{ij}(R_1)D^1_{y_i}D^1_{y_j}+\lambda\Big)v_m(y)=\sum_{ij=1}^n[k_{ij}(R_1)-k_{ij}(y)]D^1_{y_i}D^1_{y_j}v_m-$$
$$\sum_{i=1}^n k_i(y)D^1_{y_i}v_m-(k_0(y)-\lambda)v_m+f_m(\psi(y))\equiv F_1(y), \qquad (14)$$
$$\sum_{i=1}^n l_i(R_1')D^1_{y_i}v_m|_{y_n=0}=\Big\{\sum_{i=1}^n[l_i(R_1')-l_i(y)]D^1_{y_i}v_m-l_0(y)v_m+$$
$$g_m(\psi(y))\Big\}\Big|_{y_n=0}\equiv G_1(y)|_{y_n=0}, \qquad (15)$$

де λ — довільне число, $\lambda\le\sup\limits_{x\in\bar D}a_0(x)$, $R_1'\equiv R_1(y_1^{(1)},\dots,y_{n-1}^{(1)},0)$.

В задачі (14), (15) зробимо заміну $v_m(y)=\omega_m(z)$, $z_i=h(\beta_i,R_1)y_i$, $i=\overline{1,n}$. Тоді $\omega_m(z)$ буде розв'язком задачі

$$(L_1\omega_m)(z)\equiv\Big[\sum_{ij=1}^n h(\beta_i+\beta_j,R_1)k_{ij}(R_1)D^1_{z_i}D^1_{z_j}+\lambda\Big]\omega_m(z)=F_1(Z),$$

$$(\mathcal{B}_0\omega_m)(z) \equiv \sum_{i=1}^{n} l_i(R_1')h(\beta_i,R_1)D^1_{z_i}\omega_m\Big|_{z_n=0} = G_1(Z)|_{z_n=0},$$

де $Z = (h^{-1}(\beta_1,R_1)z_1,\dots,h^{-1}(\beta_n,R_1)z_n)$.

Позначимо через $z_i^{(1)} = h(\beta_i,R_1)y_i^{(1)}$, $N_\rho = \{z, |z_i - z_i^{(1)}| \le \nu\rho h(\gamma,R_1)$, $i=\overline{1,n}$, $z_n \ge 0$, $\rho \in (0,1)\}$ і візьмемо тричі диференційовану функцію $\mu(z)$:

$$\mu(z) = \begin{cases} 1, & z \in N_{1/4}, \quad 0 \le \mu(z) \le 1; \\ 0, & z \notin N_{3/4}, \quad |D_z^k\mu(z)| \le C_k h^{-k}(\gamma,R_1). \end{cases}$$

Тоді функція $W_m(z) = \mu(z)\omega_m(z)$ задовольняє крайову задачу

$$(L_1W_m)(z) = \sum_{ij=1}^{n} h(\beta_i+\beta_j,R_1)k_{ij}(R_1)[D^1_{z_i}\omega_m D^1_{z_j}\mu + D^1_{z_i}\mu D^1_{z_j}\omega_m] + \omega_m(z)\times$$

$$\sum_{ij=1}^{n} h(\beta_i+\beta_j,R_1)k_{ij}(R_1)[D^1_{z_i}D^1_{z_j}\mu(z)] + \mu(z)F_1(Z) \equiv F_2(z), \quad (16)$$

$$(\mathcal{B}_0W_m)(z) = \sum_{i=1}^{n} h(\beta_i,R_1)l_i(R_1')\omega_m D_{z_i}\mu + \mu(z)G_1(Z)|_{z_n=0} \equiv G_2(z)|_{z_n=0}. \quad (17)$$

Коефіцієнти рівняння і крайової умови задачі (16), (17), згідно накладених умов, обмежені сталими не залежними від точки R_1. Тому, використовуючи теорему 3.2 ([3, с. 179]), для довільних точок $M_1(\xi^{(1)})$ і $M_2(\xi^{(2)}) \in N_{1/4}$ справедлива нерівність

$$|\xi^{(1)} - \xi^{(2)}|^{-\alpha}|D^1_{\xi_i}D^1_{\xi_j}\omega_m(M_1) - D^1_{\xi_i}D^1_{\xi_j}\omega_m(M_2)| \le$$

$$c(|F_2|_{C^\alpha(N_{3/4})} + |G_2|_{C^{1+\alpha}(N_{3/4}\cap(z_n=0))}). \quad (18)$$

Враховуючи властивості функції $\mu(z)$, нерівність $h(\gamma,M) \ge \frac{1}{4}h(\gamma,R_1)$ для $M \in N_{3/4}$, маємо

$$|F_2|_{C^\alpha N_{3/4})} \le ch(-(2+\alpha)\gamma,R_1)(|F_1;\gamma,0;2\gamma;N_{3/4}|_\alpha + |\omega_m;\gamma,0;0;N_{3/4}|_2 + |\omega_m|_{N_{3/4}}), \quad (19)$$

$$|G_2|_{C^{1+\alpha}(N_{3/4}\cap(z_n=0))} \le ch(-(2+\alpha)\gamma,R_1)(|G_1;\gamma,0;\gamma;N_{3/4}|_{1+\alpha} +$$

$$|\omega_m;\gamma,0;0;N_{3/4}|_{1+\alpha} + |\omega_m|_{N_{3/4}}).$$

Із визначення простору $C^{2+\alpha}(\gamma,0;0;D)$ випливає справедливість нерівностей

$$c_1|\omega_m;\gamma,0;0;N_{3/4}|_l \le |v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_l \le c_2|\omega_m;\gamma,0;0;N_{3/4}|_l,$$

$$V_\rho = \{y, y \in \Pi_1, |y_i - y_i^{(1)}| \le \nu\rho h(\gamma-\beta_i,R_1)\}.$$

Підставляючи (19) в (18) і повертаючись до змінних y, знаходимо

$$E_1 \le C(|F_1,\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha + |v_m,\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_2 + |v_m|_{V_{3/4}} + |G_1,\gamma,\beta;\gamma;V_{3/4}|_{1+\alpha}). \quad (20)$$

Знайдемо оцінку норми $|G_1,\gamma,\beta;\gamma;V_{3/4}|_{1+\alpha}$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданка функції $G_1(y)$. Наприклад,

$$[l_0(y)v_m(y);\gamma,\beta;\gamma;V_{3/4}]_{1+\alpha} \le \sum_{k=1}^{n} \sup_{Q_1,S_R\in V_{3/4}} \{h(\gamma,Q_1)|l_0(Q_1)|\times$$

$$(|\tau_k^{(1)} - \tau_k^{(2)}|^{-\alpha}|D^1_{\tau_k}v_m(Q_1) - D^1_{\tau_k}v_m(S_k)|h((1+\alpha)(\gamma-\beta_k),Q)) +$$

$$|v_m(S_k)|h(\gamma-\beta_k,Q)|\tau_k^{(1)}-\tau_k^{(2)}|^{-\alpha}|D^1_{\tau_k}l_0(Q_1)-D^1_{\tau_k}l_0(S_k)|\times$$
$$h(\gamma(1+\alpha)+\alpha\beta_k,Q)\}\le c(|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_{1+\alpha}+|v_m|_{V_{3/4}}).$$

Аналогічно одержуються оцінки інших доданків функції $G_1(y)$. Отже,

$$|G_1;\gamma,\beta;\gamma;V_{3/4}|_{1+\alpha}\le$$
$$C_2\varepsilon_1[v_m;\gamma,\beta;\gamma;V_{3/4}]_{2+\alpha}+C(|v_m|_{V_{3/4}}+|g_m;\gamma,\beta;\gamma;V_{3/4}|_{1+\alpha}), \qquad (21)$$

де $\varepsilon_1=n^2\nu^\alpha+n\varepsilon^\alpha$. Для знаходження норми $|F_1;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha$ досить оцінити півнорму кожного доданка функції $F_1(y)$. Наприклад,

$$|[k_{ij}(B_1)-k_{ij}(y)]D^1_{y_i}D^1_{y_j}v_m;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha=\sum_{k=1}^n\sup_{Q_1,S_k}\{[|k_{ij}(Q_1)-k_{ij}(S_k)|\times$$

$$|\tau_k^{(1)}-\tau_k^{(2)}|^{-\alpha}h(\beta_i+\beta_j+\alpha(\gamma-\beta_k),Q)][h(2\gamma-\beta_i-\beta_j,Q)|D^1_{\tau_i}D^1_{\tau_j}v_m(Q_1)|]+$$

$$[|k_{ij}(S_k)-k_{ij}(R_1)|h(\beta_i+\beta_j,Q)][|\tau_k^{(1)}-\tau_k^{(2)}|^{-\alpha}h(2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha(\gamma-\beta_k),Q)\times$$
$$|D^1_{\tau_i}D^1_{\tau_j}v_m(Q_1)-D^1_{\tau_i}D^1_{\tau_j}v_m(S_k)\{|]\}\le$$
$$C|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|_2+C_2\nu^\alpha n[v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2+\alpha}.$$

Зазначимо, що оцінки інших доданків функції $F_1(y)$ одержуються аналогічно. Таким чином,

$$|F_1;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha\le C_2\varepsilon_2[v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2+\alpha}+C(|v_m|_{V_{3/4}}+|f_m;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha), \qquad (22)$$

де $\varepsilon_2=n^3\nu^\alpha+\varepsilon^\alpha(n+2)$. Підставляючи (21), (22) в (20), знаходимо

$$E_1\le(C_1\varepsilon_1+C_2\varepsilon_2)[v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2+\alpha}+C(|v_m|_{V_{3/4}}+|f_m;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha+$$
$$|g_m;\gamma,\beta;\gamma;V_{3/4}|_{1+\alpha}). \qquad (23)$$

Розглянемо випадок, коли $|x_k^{(1)}-x_k^{(2)}|\le T$, $|x_k^{(1)}-y_k|\ge 2Tn^{-1}$, $y\in\partial D$. Нехай $d(\gamma;P)\equiv d(\gamma,x^{(1)})$. Запишемо задачу (5), (6) у вигляді

$$(L_2u_m)(x)=\left[\sum_{ij=1}^n a_{ij}(P_1)D^1_{x_i}D^1_{x_j}+\lambda\right]u_m(x)=f_m(x)+\sum_{ij=1}^n(a_{ij}(P_1)-a_{ij}(x))\times$$

$$D^1_{x_i}D^1_{x_j}u_m(x)-\sum_{i=1}^n a_i(x)D_{x_i}u_m(x)-(a_0(x)-\lambda)u_m(x)\equiv F_3(x), \qquad (24)$$

$$(\mathcal{B}_2u_m)(x)=\sum_{k=1}^n e_k(P_1)D_{x_k}u_m(x)\Big|_{\partial D}=\left(\sum_{k=1}^n[e_k(P_1)-e_k(x)]D_{x_k}u_m(x)-\right.$$

$$\left.e_0(x)u_m(x)+g_m(x)\right)\Big|_{\partial D}\equiv G_3(x)|_{\partial D}.$$

Нехай $V_1\in D$, $V_\rho=\{x,x\in D,|x_k-x_k^{(1)}|\le T,\ k=\overline{1,n}\}$. В задачі (24) зробимо заміну $u_m(x)=v_m(y)$, $y_i=d(\beta_i,x^{(1)})x_i$, $i=\overline{1,n}$. Одержимо

$$(L_2v_m)(y)\equiv\left[\sum_{ij=1}^n d(\beta_i+\beta_j,x^{(1)})a_{ij}(P_1)D^1_{y_i}D^1_{y_j}+\lambda\right]v_m(y)\equiv F_3(Y),$$

$$(\mathcal{B}_2v_m)(y)\equiv\sum_{k=1}^n d(\beta_k,x^{(1)})e_k(P_1)D_{y_k}v_m\Big|_{\partial D}=G_3(Y)|_{\partial D},$$

де $Y=(d^{-1}(\beta_1,x^{(1)})y_1,\dots,d^{-1}(\beta_n,x^{(1)})y_n)$.

Позначимо через $y_i^{(1)}=d(\beta_i,x^{(1)})x_i^{(1)}$, $H_r=\{y,\ |y_k-y_k^{(1)}|\le r\nu d(\gamma,x^{(1)}),\ k=\overline{1,n}\}$ і візьмемо тричі диференційовану функцію $\eta(y)$:

$$\eta(y)=\begin{cases}1, & y\in H_{1/4},\quad 0\le\eta(y)\le 1;\\ 0, & y\notin H_{3/4},\quad |D_y^k\eta(y)|\le c_k d^{-k}(\gamma,x^{(1)}).\end{cases}$$

Тоді функція $W_m(y)=v_m(y)\eta(y)$ задовольняє крайову задачу

$$(L_2W_m)(y)\equiv\sum_{ij=1}^{n}d(\beta_i+\beta_j,x^{(1)})a_{ij}(P_1)[D^1_{y_i}\omega_mD^1_{y_j}\eta+D^1_{y_j}\omega_mD^1_{y_i}\eta]+$$

$$v_m(y)\left[\sum_{ij=1}^{n}d(\beta_i+\beta_j,x^{(1)})a_{ij}(P_1)D^1_{y_i}D^1_{y_j}\mu(y)\right]+\mu F_3\equiv F_4(y),$$

$$(\mathcal{B}_2W_m)(y)=0.$$

Коефіцієнти рівняння і крайової умови обмежені при довільних значеннях P_1. Тому, використовуючи теорему 7.1 [1, с. 71], для довільних точок $M_1(t^{(1)})$ і $M_2(t^{(2)})\in H_{1/4}$ виконується нерівність

$$|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\alpha}|D^1_{t_i}D^1_{t_j}v_m(t^{(1)})-D^1_{t_i}D^1_{t_j}v_m(t^{(2)})|\le c|F_4|_{C^\alpha(H_{3/4})}.$$

Повторюючи міркування, аналогічні доведенню нерівності (23), знаходимо

$$E\le c(|f_m;\gamma,\beta;2\gamma;V_{3/4}|_\alpha+|u_m|_{V_{3/4}})+c_2\varepsilon_1[u_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}]_{2+\alpha}. \qquad (25)$$

Об'єднавши нерівності (12), (13), (23), (25) і вибравши ε і ν досить малими, дістанемо оцінку (11). Теорема доведена.

Д о в е д е н н я теореми 1. Оскільки

$$|f_m;\gamma,\beta;2\gamma,D|_\alpha\le c|f;\gamma,\beta;\delta;D|_\alpha,\quad |g_m;\gamma,\beta;\gamma,D|_{1+\alpha}\le c|g;\gamma,\beta;\nu;D|_{1+\alpha},$$

то, використавши нерівність $|u_m|_D\le c(|fa_0^{-1}|_D+|ge_0^{-1}|_D)$ для розв'язку задачі (5), (6), дістанемо оцінку

$$|u_m;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}\le c(|f;\gamma,\beta;\delta;D|_\alpha+|g;\gamma,\beta;\nu;D|_{1+\alpha}). \qquad (26)$$

Права частина нерівності (26) не залежить від m, а послідовності

$$\{V_m^{(0)}\equiv|u_m(P)|\},\quad \{V_m^{(1)}\equiv d(\gamma-\beta_i,x)|D_{x_i}u(P)|\},$$
$$\{V_m^{(2)}\equiv d(2\gamma-\beta_i-\beta_j,x)|D^1_{x_i}D^1_{x_j}u_m(P)|\},\quad P\in D,$$

рівномірно обмежені і одностайно неперервні. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{V^{(0)}_{m(k)}\}$, $\{V^{(1)}_{m(l)}\}$, $\{V^{(2)}_{m(r)}\}$ рівномірно збіжні в D. Переходячи до границі при $m(k)\to\infty$, $m(l)\to\infty$, $m(r)\to\infty$ в задачі (5), (6), одержимо, що $u(x)$ єдиний розв'язок задачі (1), (2), $u\in C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ і справедлива оцінка (4). Теорема доведена.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови* а), б), $f(x)\in C^\alpha(\gamma,\beta;0;D)$, $g(x)\in C^{1+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$, *то єдиний розв'язок задачі* (1),(2) *в просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ *визначається інтегралами Стільтьєса з борелівською мірою*

$$u(x)=u_1+u_2\equiv\int_D\Gamma_1(x,d\xi)f(\xi)+\int_{\partial D}\Gamma_2(x;d_\xi S)g(\xi) \qquad (27)$$

і компоненти (Γ_1,Γ_2) *задовольняють нерівність*

$$\left|\int_D\Gamma_1(x,d\xi)\right|\le|A_0^{-1}(x)|_D,\quad \left|\int_{\partial D}\Gamma_2(x,d_\xi S)\right|\le|b_0^{-1}(x)|_D. \qquad (28)$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $C^\alpha(\gamma,\beta;0;Q)\subset C^\alpha(\gamma,\beta;\delta;D)$, $C^{1+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)\subset C^{1+\alpha}(\gamma,\beta;\nu;D)$, то для функцій $f(x)\in C^\alpha(\gamma,\beta;0;D)$, $g(x)\in C^{1+\alpha}(\gamma,\beta;0;D)$ виконуються нерівності $|f;\gamma,\beta;\delta;D|_\alpha \leq c|f;\gamma,\beta;0;D|_\alpha$, $|g;\gamma,\beta;\nu;D|_{1+\alpha}\leq C|g;\gamma,\beta;0;D|_{1+\alpha_i}$, де стала c залежить від $\mathrm{diam}D$. Враховуючи теорему 1, для розв'язку задачі (1), (2) буде правильною оцінка

$$|u;\gamma,\beta;0;D|_{2+\alpha}\leq C(|f;\gamma,\beta;0;D|_\alpha+|g;\gamma,\beta;0;D|_{1+\alpha}). \tag{29}$$

Будемо розглядати $u(x)$ при фіксованих x, як лінійний неперервний функціонал $\Phi(f,g)$ на нормованому просторі $C^\alpha(\gamma,\beta;0;D)$ з нормою, рівною правій частині (29). Оскільки $C^\alpha(\gamma,\beta;0;D)\subset C(D)$, на підставі теореми Рісса, можна вважати, що $u(x)$ породжує борелівську міру $\Gamma(x,Z)$, яка визначена на σ-алгебрі підмножин Z області D, включаючи і D і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (27). З теорем 1, 2 випливає справедливість для розв'язку задачі (1), (2) нерівностей

$$|u_1|\leq|A_0^{-1}(x)f(x)|_D,\quad |u_2|\leq|b_0^{-1}(x)g(x)|_D, \tag{30}$$

де $u_1(x)$ — розв'язок задачі (1), (2) при $g(x)\equiv 0$, а $u_2(x)$ — розв'язок задачі (1), (2) при $f(x)\equiv 0$. Поклавши $f(x)\equiv 1$, $g(x)\equiv 1$ в (30), одержимо (28).

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Иностр. л-ра, 1962. – 208 с.
2. *Ивасишен С. Д.* Матрица Грина общих неоднородных граничных задач для параболических по И.Г.Петровскому систем. – К.: Препринт Ин-та математики АН УССР, 1978. – Т. 2. – 52 с.
3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
4. *Шишмарев И. А.* Введение в теорию эллиптических уравнений. – Издат. Московского ун-та, 1979. – 189 с.

ЗАДАЧА С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В пространствах классических функций с весом доказано существование и единственность решения задачи с косой производной для сингулярных неравномерно эллиптических уравнений без ограничения на степенной порядок вырождения коэффициентов. Найдено оценку решения задачи в соответствующих пространствах.

THE TASK WITH SLANTING DERIVATIVE FOR SINGULAR ELLIPTIC EQUATIONS

The existense and unity of task with slanting derivative for singular elliptic equations without limitation, placed on the power order of coefficient degeneration has been proved in spaces of classic functions with the power weight. The estimation of the solution of the problem in the corresponding spaces has been found.

Чернівецький національний
університет ім. Ю. Федьковича

Отримано
04.05.03