УДК 539.3

З. Н. Даноян

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЛОСКИХ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН ДЛЯ ИДЕАЛЬНОПРОВОДЯЩИХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

В работе на основе метода комплексных решений Смирнова–Соболева изучаются функционально-инвариантные решения двухмерных уравнений магнитоупругости идеальнопроводящих анизотропных сред, представляющих собой плоские магнитоупругие волны. Детально исследуются поведения корней соответствующего характеристического уравнения в зависимости от значений упругих постоянных и величины внешнего магнитного поля. Показано, что корни характеристического уравнения в зависимости от вышеуказанных параметров могут быть двух типов: либо каждому корню соответствует свой единственный интервал вещественности, либо один из них вещественнен в двух непересекающихся интервалах, а другой вещественнен в одном интервале.

Для изотропных сред функционально-инвариантные решения применялись в работах [8, 9], *для анизотропных сред — в* [6, 7], *а для изотропных сред и кубических кристаллов в магнитном поле — в* [3–5]. *Настоящая работа уточняет и дополняет результаты работы* [2].

1. Постановка задачи. Основные уравнения. Рассматривается анизотропная идеальнопроводящая среда, уравнения движения которой в случае плоской деформации содержат четыре упругих постоянных [6, 7]. Уравнения движения в перемещениях для таких сред в плоском случае при наличии однородного постоянного магнитного поля с вектором напряженности $\vec{H}_0$ записываются в виде [1, 2]:

$$a_m u_{xx} + c_m v_{xy} + d_m u_{yy} = u_{tt}, \quad e_m v_{xx} + c_m u_{xy} + b_m v_{yy} = v_{tt}, \tag{1.1}$$

где $u = u(x,y,t)$ — компоненты упругого перемещения $\vec{u} = \{u, v, 0\}$ в декартовой системе координат $Oxyz$, оси которой совпадают с главными направлениями упругости среды, a_m, b_m, c_m, d_m, e_m — постоянные коэффициенты, определяемые выражениями (индексы в u и v обозначают производные по x, y и t):

$$a_1 = a_0, b_1 = b_0 + \chi, d_1 = d_0, e_1 = d_0 + \chi, c_1 = c_0,$$

$$a_2 = a_0 + \chi, b_2 = b_0, d_2 = d_0 + \chi, e_2 = d_0, c_2 = c_0,$$

$$a_3 = a_0 + \chi, b_3 = b_0 + \chi, d_3 = d_0, e_3 = d_0, c_3 = c_0 + \chi,$$

$$a_0 = c_{11}/\rho_0, b_0 = c_{22}/\rho_0, d_0 = c_{66}/\rho_0, c_0 = (c_{12} + c_{66})/c_0, \chi = H_0^2/4\pi\rho_0,$$

c_{ik} — упругие постоянные, ρ_0 — плотность среды, χ — скорость Альфвена.

В (1.1) $m = 0, 1, 2, 3$ соответствуют случаям отсутствия и следующим направлениям внешнего магнитного поля: $\vec{H}_0 = 0$, $\vec{H}_0 = H_0\vec{i}$, $\vec{H}_0 = H_0\vec{j}$, $\vec{H}_0 = H_0\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты координатной системы $Oxyz$.

2. Решения системы (1.1). Плоские магнитоупругие волны. Решения системы (1.1), представляющие собой плоские магнитоупругие волны, согласно методу комплексных решений Смирнова–Соболева, имеют вид [6–9]:

$$u = u(\Omega_k), \quad v = v(\Omega_k), \quad \Omega_k = t - \theta x_1 \pm \lambda_k(\theta) x_2 \quad (k = 1, 2), \tag{2.1}$$

где θ и λ_k — постоянные величины, а λ_k являются корнями характеристического уравнения:

$$b_m d_m \lambda^4 - p_m(\theta)\lambda^2 + r_m(\theta) = 0 \tag{2.2}$$

системы (1.1) и определяются формулами:

$$\lambda = \lambda_k(\theta) = \sqrt{\frac{p_m(\theta) + (-1)^k\sqrt{q_m(\theta)}}{2b_m d_m}} \quad (k = 1, 2). \tag{2.3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &p_m = b_m + d_m - l_m\theta^2, \quad r_m = \left(a_m\theta^2 - 1\right)\left(e_m\theta^2 - 1\right), \\ &q_m = p_m^2 - 4b_m d_m r_m = D_m\theta^4 - 2M_m\theta^2 + B_m^2, \\ &M_m = (b_m + d_m)N_m - (a_m d_m - b_m e_m)B_m, \\ &N_m = A_m B_m - c_m^2, \quad A_m = a_m - e_m, \quad B_m = b_m - d_m, \\ &l_m = a_m b_m + d_m e_m - c_m^2, \quad D_m = l_m^2 - 4a_m b_m d_m e_m. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Производные функции $u(\Omega_k)$, $v(\Omega_k)$, согласно (1.1), удовлетворяют условию:

$$\left(a_m\theta^2 + d_m\lambda_k^2 - c_m\theta\lambda_k - 1\right)u_k'(\Omega_k) + \left(e_m\theta^2 + b_m\lambda_k^2 - c_m\theta\lambda_k - 1\right)v_k'(\Omega_k) = 0. \tag{2.5}$$

Согласно (2.5), решения (2.1) можно представить в виде:

$$\begin{cases} u_k = \left(e_m\theta^2 + b_m\lambda_k^2 - c_m\theta\lambda_k - 1\right)W_k(\Omega_k), \\ v_k = -\left(a_m\theta^2 + d_m\lambda_k^2 - c_m\theta\lambda_k - 1\right)W_k(\Omega_k), \end{cases} \quad (k = 1, 2). \tag{2.6}$$

Здесь W_k — ветви произвольной непрерывной дважды дифференцируемой функции W, если коэффициенты при переменных x, y, t в Ω_k вещественны. Если некоторые из этих коэффициентов в какой–либо области переменных x, y, t комплексные величины, то W — аналитическая функция комплексной переменной Ω.

В дальнейшем мы будем рассматривать однородные волны, которые соответствуют вещественным значениям θ и λ_k в Ω_k.

Уравнения фронтов плоских волн (2.6) имеют вид:

$$\Omega_k = t - \theta x \pm \lambda_k y = const = C,$$

а их фазовые скорости определяются следующим образом [6, 7]:

$$\vec{V}_k = -\frac{\partial\varphi_k/\partial t}{|grad\varphi_k|}\vec{n}_k, \quad \varphi_k = C - t + \theta x \pm \lambda_k y,$$

где $\vec{n}_k$ — волновые векторы.

В двумерном случае будем иметь:

$$\vec{n}_k = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}}\vec{i} - \frac{\pm\lambda_k}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}}\vec{j}, \qquad \vec{V}_k = \frac{\theta}{\theta^2 + \lambda_k^2}\vec{i} - \frac{\pm\lambda_k}{\theta^2 + \lambda_k^2}\vec{j}, \tag{2.7}$$

$$V_k = \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \lambda_k^2}} \qquad tg\alpha_k = \frac{\theta}{\pm\lambda_k(\theta)} \quad (k = 1, 2), \tag{2.8}$$

где через α_k обозначены углы между отрицательной полуосью Oy и направлением распространения волн $\vec{n}_k$.

Из вышеприведенных формул следует, что каждому значению параметра θ из интервала $-\infty < \theta < +\infty$, для которых величины $\lambda_k(\theta)$ вещественны, соответствуют однородные вещественные плоские магнитоупругие волны, фазовые скорости и направления распространения которых определяются формулами (2.7) и (2.8).

При исследовании характера распространения плоских упругих волн в анизотропных средах [6, 7] важное значение имеет вопрос о разделении волн на квазипродольные и квазипоперечные или на быстрые и медленные в зависимости от параметра θ при любых значениях упругих постоянных a_0, b_0, d_0 и c_0, удовлетворяющих условиям:

$$a_0 > d_0, \quad b_0 > d_0, \quad c_0 > 0, d_0 > 0, \quad E_0 = a_0 b_0 - (c_0 - d_0)^2 > 0 \tag{2.9}$$

или

$$A_0 = a_0 - d_0 > 0, \quad B_0 = b_0 - d_0 > 0, \quad d_0 > 0, \quad 0 < c_0 < C_E^{(0)} \equiv \sqrt{a_0 b_0} - d_0. \tag{2.10}$$

Исследование указанного вопроса в случае распространения магнитоупругих волн как в изотропных, так и в анизотропных средах связано с изучением свойств корней $\lambda_k(\theta)$ характеристического уравнения (2.2) системы (1.1) при любых значениях параметров a_0, b_0, c_0, d_0 и χ, удовлетворяющих условиям (2.9) или (2.10) и $\chi > 0$. В частности, важно определить область вещественности функции $\lambda_k(\theta)$ в зависимости от значений указанных параметров. Следует отметить, что свойства корней характеристического уравнения используются также при решении других задач, связанных с вопросами распространения волн. Например, при построении решения системы (1.1), характеризующей распространение магнитоупругих волн от точечного источника типа мгновенного импульса [4–7].

В дальнейшем, в силу симметрии поведения корней, $\lambda_k(\theta)$ рассматривается только в интервале $0 \le \theta < \infty$. При этом будем исследовать только волны, соответствующие знаку плюс перед λ_k в (2.1). Выбор знака плюс или минус перед λ_k в решении (2.1) показывает, что плоские волны распространяются в упругой среде в противоположных направлениях с совпадающими по величине фазовыми скоростями.

3. Исследование корней характеристического уравнения. На основании (2.3) и (2.4) легко заметить, что функция $\lambda_2(\theta)$ принимает вещественные значения при выполнении одного из следующих условий:

$$\begin{aligned} &a) \quad q_m > 0, \quad r_m > 0, \quad p_m > 0; \\ &b) \quad q_m = 0, \quad p_m \ge 0; \\ &c) \quad q_m > 0, \quad r_m < 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

а функция $\lambda_1(\theta)$ — при выполнении условий $a)$ или $b)$ из (3.1).

Следовательно, необходимо исследовать поведение функций $q_m(\theta)$, $r_m(\theta)$ и $p_m(\theta)$ в интервале $0 \le \theta < \infty$.

Из (2.4) следует, что функция $p_m(\theta)$, в зависимости от знака величины l_m, изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} &1) \quad p_m(\theta) > 0 \quad \text{при} \quad l_m \le 0, \quad \theta \in [0, +\infty); \\ &2) \quad p_m(\theta) > 0 \quad \text{при} \quad l_m > 0, \quad \theta \in [0, \theta_p^{(m)}); \\ &3) \quad p_m(\theta) \le 0 \quad \text{при} \quad l_m > 0, \quad \theta \in [\theta_p^{(m)}, +\infty), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$\theta_p^{(m)} = \sqrt{\frac{b_m + d_m}{l_m}}.$$

Перейдем к исследованию функции $r_m(\theta)$. Заметим, что нули функции $r_m(\theta)$, согласно (2.4), определяются из уравнения

$$r_m(\theta) = \left(a_m\theta^2 - 1\right)\left(e_m\theta^2 - 1\right) = 0$$

и выражаются следующим образом:

$$\theta = \pm\theta_{rk}^{(m)}; \quad \theta_{r1}^{(m)} = a_m^{-1/2}, \quad \theta_{r2}^{(m)} = e_m^{-1/2}, \qquad (k = 1, 2). \tag{3.3}$$

Из (3.3) следует, что расположение корней $\theta_{rk}^{(m)}$ $(k = 1, 2)$ на положительной полуоси θ зависит от знака величины A_m и имеет вид:

$$\theta_{r1}^{(m)} < \theta_{r2}^{(m)} \quad \text{при} \quad A_m > 0 \qquad (m = 0, 1, 2, 3);$$

$$\theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)} \quad \text{при} \quad A_1 = 0; \quad \theta_{r1}^{(1)} > \theta_{r2}^{(1)} \quad \text{при} \quad A_1 < 0.$$

При этом

$$A_m > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le \chi < +\infty \qquad (m = 1, 2);$$

$$A_1 > 0 \quad \text{при} \quad 0 \le \chi < \chi_A; \quad A_1 \le 0 \quad \text{при} \quad \chi_A < \chi < +\infty,$$

где

$$\chi_A = A_0 = a_0 - d_0 > 0.$$

На основании вышеизложенного поведение функции $r_m(\theta)$ можно описать следующим образом:

1) при $A_m > 0 \quad (m = 0, 1, 2, 3)$:

$$r_m > 0 \quad \text{при} \quad \theta \in [0; \theta_{r1}^{(m)}) \bigcup (\theta_{r2}^{(m)}; \infty); \quad r_m \le 0 \quad \text{при} \quad \theta \in [\theta_{r1}^{(m)}; \theta_{r2}^{(m)}];$$

2) при $A_1 = 0$:

$$r_1 > 0 \quad \text{при} \quad \theta \in [0; +\infty), \quad \theta \ne \theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)};$$

$$r_1 = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)} = a_0^{-1/2};$$

3) при $A_1 < 0$:

$$r_1 > 0 \quad \text{при} \quad \theta \in [0; \theta_{r1}^{(1)}) \bigcup (\theta_{r2}^{(1)}; \infty); \quad r_1 \le 0 \quad \text{при} \quad \theta \in [\theta_{r1}^{(1)}; \theta_{r2}^{(1)}]. \tag{3.4}$$

Теперь выясним условия, при которых нули функций $r_m(\theta)$ будут корнями для функций $\lambda_k(\theta)$. Подставляя (3.3) в (2.3), получим

$$\lambda_k\left(\theta_{r1}^{(m)}\right) = \sqrt{\frac{-S_m + (-1)^k |S_m|}{2a_m b_m d_m}}, \quad \lambda_k\left(\theta_{r2}^{(m)}\right) = \sqrt{\frac{-K_m + (-1)^k |K_m|}{2a_m b_m e_m}}; \tag{3.5}$$

$$S_m = A_m d_m + c_m^2, \quad K_m = A_m b_m - c_m^2 \qquad (m = 0, 1, 2, 3). \tag{3.6}$$

В случае отсутствия магнитного поля $(m = 0)$ имеем:

$$A_0 > 0; \quad S_0 > 0; \quad K_0 > 0 \quad \text{при} \quad 0 < c_0 < c_k^{(0)};$$

$$K_0 \le 0 \quad \text{при} \quad c_k^{(0)} \equiv \sqrt{b_0 A_0} \le c_0 < c_E^{(0)}. \tag{3.7}$$

На основании (3.5)–(3.7), (2.9) приходим к заключению, что величины K_m и S_m в зависимости от значений параметров a_0, b_0, d_0, c_0 и χ могут иметь следующие знаки:

1) при $A_m > 0 \quad (m = 0, 1, 2, 3)$:

$$a) \quad S_m > 0, \quad K_m \geq 0, \qquad\qquad b) \quad S_m > 0, \quad K_m < 0;$$

2) при $A_1 = 0$:

$$S_1 > 0, \quad K_1 < 0;$$

3) при $A_1 < 0$:

$$a) \quad S_1 > 0, \quad K_1 < 0, \qquad\qquad b) \quad S_1 \leq 0, \quad K_1 < 0. \tag{3.8}$$

Учитывая (3.8) из (3.5), получим значения функций $\lambda_k(\theta)$ в точках $\theta = \theta_{rk}^{(m)}$, где $r_m(\theta)$ обращается в нуль. Результат вычислений приведем в табл. 1, где приняты следующие обозначения:

$$\lambda_0^{(m)} = \sqrt{\frac{|S_m|}{a_m b_m d_m}}, \quad \lambda_*^{(m)} = \sqrt{\frac{|K_m|}{b_m d_m e_m}}.$$

На основании табл. 1 можно сделать следующее заключение.

1) Если параметры a_0, b_0, d_0, c_0 и χ удовлетворяют неравенствам

$$a) \quad S_m > 0, \quad K_m > 0 \quad \text{или} \quad b) \quad S_m < 0, \quad K_m < 0, \tag{3.9}$$

то один из корней уравнения $r_m(\theta) = 0$ является нулем функции $\lambda_1(\theta)$, а другой корень — нулем функции $\lambda_2(\theta)$, причем в случае a) $\theta_{r1}^{(m)}$ — корень функции $\lambda_1(\theta)$, $\theta_{r2}^{(m)}$ — корень функции $\lambda_2(\theta)$; в случае b) — наоборот.

Таблица 1

m	A_m	S_m	K_m	$\lambda_1(\theta_{r1}^{(m)})$	$\lambda_1(\theta_{r2}^{(m)})$	$\lambda_2(\theta_{r1}^{(m)})$	$\lambda_2(\theta_{r2}^{(m)})$
0,1,2,3;	> 0	> 0	> 0	$= 0$	$i\lambda_0^{(m)}$	$\lambda_0^{(m)}$	$= 0$
		> 0	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\lambda_0^{(m)}$	$= 0$
		> 0	< 0	$= 0$	$= 0$	$\lambda_0^{(m)}$	$\lambda_*^{(m)}$
1	$=0$	> 0	< 0	$= 0$	$= 0$	$\lambda_0^{(1)} = \lambda_*^{(1)}$	$\lambda_0^{(1)} = \lambda_*^{(1)}$
	< 0	> 0	< 0	$= 0$	$= 0$	$\lambda_0^{(1)}$	$\lambda_*^{(1)}$
		$= 0$	< 0	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$\lambda_*^{(1)}$
		< 0	< 0	$i\lambda_0^{(1)}$	$= 0$	$= 0$	$\lambda_*^{(1)}$

2) Если указанные параметры удовлетворяют неравенствам

$$S_m > 0, \quad K_m < 0, \tag{3.10}$$

то оба корня уравнения $r_m(\theta) = 0$ являются нулями функции $\lambda_1(\theta)$, функция же $\lambda_2(\theta)$ нигде не обращается в нуль.

3) Случаи

$$S_m > 0, \quad K_m = 0 \quad \text{или} \quad S_m = 0, \quad K_m < 0$$

являются переходными между случаями 1) и 2), причем если $S_m > 0, K_m = 0$, то в точке $\theta_{r2}^{(m)}$ обращаются в нуль обе функции $\lambda_k(\theta)$, а в точке $\theta_{r1}^{(m)}$ — только функция $\lambda_1(\theta)$; если же $S_m = 0, K_m < 0 \quad (m = 1)$, то обе функции обращаются в нуль в точке $\theta_{r1}^{(m)}$, а в точке $\theta_{r2}^{(m)}$ в нуль обращается только функция $\lambda_1(\theta)$.

Сравнивая величины $\theta_{r1}^{(m)}$, $\theta_{r2}^{(m)}$ и $\theta_p^{(m)}$, найдем их расположение в зависимости от значений параметров a_0, b_0, d_0, c_0 и χ (при вещественности $\theta_p^{(m)}$):

1) при $A_m > 0 \quad (m = 0, 1, 2, 3):$

$$a) \text{ если } \quad K_m \geq 0, \quad S_m > 0, \text{то} \quad \theta_{r1}^{(m)} < \theta_p^{(m)} < \theta_{r2}^{(m)},$$

$$b) \text{ если } \quad K_m < 0, \quad S_m > 0, \text{то} \quad \theta_{r1}^{(m)} < \theta_{r2}^{(m)} < \theta_p^{(m)},$$

2) при $A_1 = 0:$

$$\theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)} < \theta_p^{(1)}, \tag{3.11}$$

3) при $A_1 < 0:$

$$a) \text{ если } \quad K_1 < 0, \quad S_1 > 0, \text{то} \quad \theta_{r2}^{(1)} < \theta_{r1}^{(1)} < \theta_p^{(1)},$$

$$b) \text{ если } \quad K_1 < 0, \quad S_1 < 0, \text{то} \quad \theta_{r2}^{(1)} < \theta_p^{(1)} < \theta_{r1}^{(1)}.$$

Перейдем к исследованию функции $q_m(\theta)$, находящейся под внутренним радикалом в (2.3). Нули функции $q_m(\theta)$ согласно (2.4) определяются выражениями:

$$\theta = \pm\theta_{qk}^{(m)}, \quad \theta_{qk}^{(m)} = \sqrt{D_m^{-1}\left(M_m + (-1)^k\sqrt{\Delta_m}\right)} \qquad (k = 1, 2), \tag{3.12}$$

$$\Delta_m = M_m^2 - B_m^2 D_m = -4 b_m d_m c_m^2 N_m. \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, что при выполнении условия 1) из (3.11) $N_m > 0$ и все четыре корня (3.12) попарно комплексно–сопряженные; при условиях 2) $N_m \leq 0$, $D_m > 0$, $M_m < 0$ и все корни (3.12) мнимые; при условиях 3): а) $N_m \leq 0$, $D_m > 0$, $M_m > 0$ или б) $N_m = D_m = M_m = 0$ и все корни (3.12) вещественны; наконец при выполнении условий 4) $N_m < 0$, $D_m < 0$ и корни $\pm\theta_{q1}^{(m)}$ вещественные, а корни же $\pm\theta_{q2}^{(m)}$ мнимые.

Из вышеизложенного следует, что функция $q_m(\theta)$ при условиях (3.11) изменяется следующим образом:

I. При 1) или 2) или b) из 3):

$$q_m(\theta) > 0, \quad \text{если} \quad \theta \in [0, \infty);$$

II. При а) из 3):

$$q_m > 0, \quad \text{если} \quad \theta \in [0, \theta_{q1}^{(m)}) \bigcup (\theta_{q2}^{(m)}, \infty);$$

$$q_m \leq 0, \quad \text{если} \quad \theta \in [\theta_{q1}^{(m)}; \theta_{q2}^{(m)}]; \tag{3.14}$$

III. При 4):

$$q_m > 0, \quad \text{если} \quad \theta \in [0, \theta_{q1}^{(m)});$$

$$q_m \leq 0, \quad \text{если} \quad \theta \in [\theta_{q1}^{(m)}; \infty).$$

Рассмотрим наконец расположение корней функций $r_m(\theta)$, $q_m(\theta)$ и $p_m(\theta)$. Из (3.3) и (3.12) получаем

$$(\theta_{r1}^{(m)})^{-2} - (\theta_{qk}^{(m)})^{-2} = B_m^{-2}\left[\sqrt{d_m |N_m|} - (-1)^k c_m \sqrt{b_m}\right]^2 \geq 0,$$

$$(\theta_{r2}^{(m)})^{-2} - (\theta_{qk}^{(m)})^{-2} = B_m^{-2}\left[\sqrt{b_m |N_m|} - (-1)^k c_m \sqrt{d_m}\right]^2 \geq 0. \tag{3.15}$$

Приравняв к нулю выражения (3.15), соответственно получим $S_m = 0$, $K_m = 0$. С другой стороны, из (3.15) следует, что вещественные значения $\theta_{qk}^{(m)}$ на положительной полуоси θ расположены правее точек $\theta_{rk}^{(m)}$. Далее, когда $K_m > 0$, значение $\theta_p^{(m)}$ согласно (3.11) находится между точками $\theta_{r1}^{(m)}$ и $\theta_{r2}^{(m)}$. Отсюда следует, что при $K_m > 0$ имеет место следующее расположение: $\theta_{r1}^{(m)} < \theta_p^{(m)} < \theta_{r2}^{(m)} < \theta_{q1}^{(m)} < \theta_{q2}^{(m)}$. Если же $K_m < 0$, то $\theta_p^{(m)}$ согласно (3.11) на оси θ находится правее, чем точка $\theta_{rk}^{(m)}$. В этом случае $r_m(\theta_p^{(m)}) > 0$. Следовательно, точка $\theta_p^{(m)}$ находится в области, где $q_m(\theta) < 0$. А это в силу (3.14) означает, что в случае двух вещественных корней $\theta_{q1}^{(m)}$ и $\theta_{q2}^{(m)}$ точка $\theta_p^{(m)}$ находится между ними, а в случае мнимой — имеет место условие $\theta_{q1}^{(m)} < \theta_p^{(m)}$.

На основе вышеизложенного и соотношений (3.14) и (3.11) имеем следующее расположение точек $\theta_{q1}^{(m)}$, $\theta_{qk}^{(m)}$, $\theta_p^{(m)}$:

1) при $A_m > 0 \quad (m = 0, 1, 2, 3)$:

$$a)\theta_{r1}^{(m)} < \theta_p^{(m)} \le \theta_{r2}^{(m)} \le \theta_{q1}^{(m)} < \theta_{q2}^{(m)}, \quad \text{если} \quad K_m \ge 0, \quad S_m > 0,$$

$$b)\theta_{r1}^{(m)} < \theta_{r2}^{(m)} < \theta_{q1}^{(m)} < \theta_p^{(m)} < \theta_{q2}^{(m)}, \quad \text{если} \quad K_m < 0, \quad S_m > 0,$$

2) при $A_m = 0$:

$$a)\theta_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)} < \theta_{q1}^{(1)} < \theta_p^{(1)} < \theta_{q2}^{(1)}, \tag{3.16}$$

3) при $A_1 < 0$:

$$a)\theta_{r2}^{(1)} < \theta_{r1}^{(1)} < \theta_{q1}^{(1)} < \theta_p^{(1)} < \theta_{q2}^{(1)}, \quad \text{если} \quad K_1 < 0, \quad S_1 > 0,$$

$$b)\theta_{r2}^{(1)} < \theta_p^{(1)} \le \theta_{r1}^{(1)} \le \theta_{q1}^{(1)} < \theta_{q2}^{(1)}, \quad \text{если} \quad K_1 < 0, \quad S_1 \le 0.$$

Для определения границы интервалов вещественности функций $\lambda_k(\theta)$ необходимо также установить, какие значения принимают корни $\theta_{qk}^{(m)}$ при условиях $K_m \ge 0$ или $K_m < 0$. На основании условий (2.10) и (3.13) можно показать, что при $K_m \ge 0$ корни $\theta_{qk}^{(m)}$ могут быть как вещественными, так и комплексными. В случае же выполнения условия $K_m < 0$ могуть иметь место только условия

$$a) \quad D_m > 0, \quad M_m > 0; \qquad b) \quad D_m < 0, \tag{3.17}$$

из которых на основании (3.13) следует, что при $K_m < 0$ либо корни $\theta_{q1}^{(m)}$ и $\theta_{q2}^{(m)}$ вещественные (случай a) из (3.17)), либо корень $\theta_{r1}^{(m)}$ вещественный, а корень $\theta_{r2}^{(m)}$ мнимый (случай b) из (3.17)).

Таким образом, при условии $K_m < 0$ корни $\pm\theta_{q1}^{(m)}$ уравнения $q_m(\theta) = 0$ обязательно вещественные и определяют границы областей вещественности корней характеристического уравнения $\lambda_k(\theta)$, когда имеет место условие $S_m > 0$. Используя (3.2), (3.4), (3.14) и (3.16), на основании (3.1) найдем области вещественности корней характеристического уравнения $\lambda_k(\theta)$ в зависимости от значений параметров a_0, b_0, d_0, c_0 и χ. Результаты приведены в табл. 2.

В точках интервала $0 \le \theta < +\infty$, не принадлежащих областям вещественности функций $\lambda_k(\theta)$, эти функции принимают мнимые или комплексные значения, которым соответствуют неоднородные плоские волны.

Таблица 2

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Случаи</td><td colspan="2">Области вещественности</td></tr>
<tr><td>m</td><td>A_m</td><td colspan="2">K_m
S_m</td><td>$\lambda_1(\theta)$</td><td>$\lambda_2(\theta)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">0,1,2,3</td><td rowspan="3">> 0</td><td>> 0</td><td>> 0</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{r1}^{(m)}$</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{r2}^{(m)}$</td></tr>
<tr><td>$= 0$</td><td>> 0</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{r1}^{(m)}$;
$\theta = \theta_{r2}^{(m)}$</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{r2}^{(m)}$;
$\theta_{r2}^{(m)} = \theta_{q1}^{(m)} = \theta_{p}^{(m)}$</td></tr>
<tr><td>< 0</td><td>> 0</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{r1}^{(m)}$;
$\theta_{r2}^{(m)} \le \theta \le \theta_{q1}^{(m)}$</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{q1}^{(m)}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>$= 0$</td><td>< 0</td><td>> 0</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{q1}^{(1)}$</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{q1}^{(1)}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">< 0</td><td>< 0</td><td>> 0</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{r2}^{(1)}$;
$\theta_{r1}^{(1)} \le \theta \le \theta_{q1}^{(1)}$</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{q1}^{(1)}$</td></tr>
<tr><td>< 0</td><td>$= 0$</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{r2}^{(1)}$;
$\theta = \theta_{r1}^{(1)}$</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{r1}^{(1)}$</td></tr>
<tr><td></td><td>< 0</td><td>< 0</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{r2}^{(1)}$</td><td>$0 \le \theta \le \theta_{r1}^{(1)}$</td></tr>
</table>

Таким образом, в зависимости от значений параметров a_0, b_0, d_0, c_0 и χ с точки зрения поведения корней $\lambda_k(\theta)$ характеристического уравнения имеем два основных случая.

1. Указанные параметры удовлетворяют условиям (3.9). В этом случае функции $\lambda_k(\theta)$ вещественны в интервалах $[0, \theta_{ri}^{(m)}]$ положительной полуоси θ ($\theta_{r1}^{(m)}$ — корни уравнения $r(\theta) = 0$) и обращаются в нуль в точках $\theta_{r1}^{(m)}$. Корни $\lambda_k(\theta)$, обладающие такими свойствами, отнесем к первому типу.

2. Указанные параметры удовлетворяют условиям (3.10). В этом случае функция $\lambda_k(\theta)$ принимает вещественные значения в двух интервалах: $[0, \theta_{r1}^{(m)}]$ и $[\theta_{r2}^{(m)}, \theta_{q1}^{(m)}]$, если $A_m > 0$; $[0, \theta_{r2}^{(m)}]$ и $[\theta_{r2}^{(m)}, \theta_{q1}^{(m)}]$, если $A_1 < 0$. Функция $\lambda_2(\theta)$ принимает вещественные значения в интервале $[0, \theta_{q1}^{(m)}]$. Корни $\lambda_k(\theta)$, обладающие такими свойствами, отнесем ко второму типу.

Когда одна из величин K_m или S_m обращается в нуль, то мы имеем дело со случаем, который является переходным между вышеприведенными случаями.

Особым является случай так называемой конической рефракции ($A_1 = 0$) [3, 4]. Тогда функции $\lambda_k(\theta)$ вещественны в интервале $[0, \theta_{q1}^{(m)}]$, причем в двойной точке $t_{r1}^{(1)} = \theta_{r2}^{(1)}$ этого интервала функция $\lambda_1(\theta)$ обращается в нуль, функция же $\lambda_2(\theta)$ нигде не обращается в нуль.

1. *Багдасарян Г. Е., Даноян З. Н.* Уравнения движения в перемещениях идеально-проводящих упругих анизотропных сред при наличии магнитного поля// Механика, межвуз. сб. науч. трудов. – Ереван, 1984. – Вып. 3. – С. 32–42.
2. *Даноян З. Н.* К методу функционально–инвариантных решений для задачи магнитоупругости идеальнопроводящих анизотропных сред// Механика, уч. записки ЕГУ. – 1984. – № 1. – С. 52–61.
3. *Даноян З. Н.* К плоской задаче распространения магнитоупругих волн в идеально-проводящих изотропных средах// Изв. АН Арм. ССР, Механика. – 1974. – Т. 27, 5. – С. 37–46.
4. *Даноян З. Н.* К плоской задаче распространения магнитоупругих колебаний от точечного источника// Изв. АН Арм. ССР, Механика. – 1975. – Т. 28, 1. – С. 20–33.
5. *Даноян З. Н.* О распространении магнитоупругих волн в идеальнопроводящих анизотропных средах с кубической симметрией // В кн.: Исследования по механике твердого деформируемого тела. Ереван: Изд–во АН Арм. ССР. – 1981. – С. 104–109.

6. *Осипов И. О.* К методу функционально–инвариантных решений для задач динамической теории упругости анизотропных сред// Изв. АН СССР, сер. геофиз. – 1963. – 3. – С. 391–396.
7. *Свекло В. А.* К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела// ПММ. 1961. – Т. 25. – Вып. 5. – С. 885–896.
8. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. – Т. 3, Ч. 2. – 672 с.
9. *Соболев С. Л.* Некоторые вопросы теории распространения колебаний// В кн.: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.–Л.: ОНТИ, 1937. – С. 468–617.

ДОСЛІДЖЕННЯ КОРЕНІВ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО РІВНЯННЯ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ ДЛЯ ІДЕАЛЬНОПРОВІДНОГО АНІЗОТРОПНОГО СЕРЕДОВИЩА

В роботі на основі методу комплексних розв'язків Смірнова–Соболева вивчаються функціонально–інваріантні розв'язки двомірних рівнянь магнітопружності ідеальнопровідного анізотропного середовища, що являє собою плоскі магнітопружні хвилі. Детально досліджується поведінка коренів відповідного характеристичного рівняння в залежності від значень пружних сталих та величини зовнішнього магнітного поля. Показано, що корені характеристичного рівняння в залежності від вищевказаних параметрів можуть бути двох типів: або кожному кореню відповідає свій єдиний інтервал дійсності, або один з них дійсний в двох інтервалах, які не перетинаються, інший дійсний в одному інтервалі.

INVESTIGATION OF THE ROOTS OF A CHARACTERISTIC EQUATION OF PLANE MAGNETOELASTIC WAVES FOR PERFECTLY–CONDUCTING ANISOTROPIC MEDIA

In the paper on the basis of the Smirnov–Sobolev's method functional-invariant solutions of magnetoelasticity bidimensional equations of perfectly–conducting anisotropic media, representing plane magnetoelastic waves are studied. The behavior of roots appropriate characteristic equation depending upon values of elastic constants and magnitude of an external magnetic field are in details investigated. It is shown, that the roots of the characteristic equation depending on the above–stated parameters can be two types: or to each root corresponds the unique interval reality, or one of them is real in two not crossed intervals, and another is real in one interval.

Институт Механики
НАН Армении

Отримано
14.01.04