УДК 539.375

В. А. Кривень, М. І. Яворська

ПЛАСТИЧНІ ЗОНИ ПРИ ЗСУВІ БІЛЯ ПРЯМОКУТНОГО І ЗАОКРУГЛЕНОГО ВИРІЗІВ СТАЛОЇ ШИРИНИ

Досліджено напружено–деформований стан ідеально пружно–пластичного тіла з півбезмежним прямокутним та заокругленим вирізами сталої ширини в умовах антиплоскої деформації. Знайдено аналітичні розв'язки задач, досліджено розвиток пластичних зон. Показано, що коли максимальний розмір пластичної зони в декілька разів перевищує ширину вирізу, форму зони можна наближено визначити за розв'язком пружно–пластичної задачі для півбезмежної тріщини.

Дослідження напружено–деформованого стану в околі дефектів і вирізів технологічного походження є важливою задачею з огляду вивчення і прогнозування міцнісних та деформаційних характеристик матеріалів та елементів конструкцій. Найбільша кількість досліджень цього напрямку стосується тріщиноподібних дефектів [5, 6], які становлять практичний інтерес для механіки руйнування. Як правило, ці дослідження виконані в рамках моделювання тріщини математичними розрізами: геометрично тріщина вважається лінією (поверхнею) і приймається нульовою віддаль між берегами тріщини. Вершина тріщини при цьому вважається точкою звороту (вістрям). Очевидно, що такі припущення, передусім за умови вільності берегів тріщини від зовнішніх напружень, не узгоджуються з уявленнями міжатомної взаємодії фізики твердого тіла.

У цій роботі спробуємо дослідити напружено–деформований стан і розвиток пластичних деформацій для тріщиноподібного дефекту з малою але скінченною відстанню між її берегами, не вважаючи вершину тріщини точкою звороту. З цією метою розглянемо необмежене пружно ідеально–пластичне тіло з прямокутним вирізом $-\infty < x \le 0$, $-h \le y \le h$, $-\infty < z < \infty$ (рис. 1) та заокругленим (радіус заокруглення — h) вирізом сталої ширини $2h$ (рис. 2) у стані антиплоскої деформації, спричиненої прикладеними на нескінченності зсувними зусиллями, діючими паралельно до граней вирізу. Будемо вивчати розвиток континуальних пластичних зон біля двох типів вершин тріщини та з'ясуємо вплив форми вершини та ширини вирізу на розвиток пластичної зони. З огляду на розподіл пластичних деформацій поставлені задачі цікаві вже

Рис. 1: Поперечний переріз тіла з прямокутним вирізом. Заповнені крапками області — пластичні зони.

Рис. 2: Поперечний переріз тіла з заокругленим вирізом. Заповнена крапками область — пластична зона.

тому, що півбезмежний прямокутний виріз із безмежно малою шириною проти його довжини аналогічний тріщині, для якої у випадку антиплоскої деформації відомий точний аналітичний розв'язок пружно–пластичної задачі.

Пластична зона займає кругову область з радіусом r, центр якої віддалений на r від вершини тріщини та знаходиться на її продовженні ($r = K_3^2/(2\pi k^2)$, K_3 — коефіцієнт інтенсивності напружень, k — зсувна границя текучості тіла) [6]. Крім того відомо, що у ідеально пружно–пластичному тілі пластична зона не може охоплювати плоских ділянок границі тіла: лінії ковзання у пластичній зоні є відрізками прямих, що виходять із кутових точок вирізу [1, 3].

Тому ясно апріорі, що біля прямокутного вирізу, незалежно від рівня навантаження континуальна пластична зона, що розвивається від точки ($0, h$), (концентратора напружень) не виходитиме за межі кута, утвореного променями ($0 \le x < +\infty$, $y = h$) і ($x = 0$, $h \le y < +\infty$). Те ж саме стосується і зони в околі точки $(0, -h)$. Таким чином, смуга на продовженні вирізу з шириною, рівною ширині вирізу, залишається у пружному стані за будь–яких навантажень (див. рис. 1).

У випадку заокругленого вирізу пластична зона, навпаки, почне розвиватися від точки (h,0) і матиме найбільшу протяжність вздовж лінії симетрії вирізу, при навантаженні певного рівня охопить всю циліндричну поверхню вирізу, а при ще вищих навантаженнях розвиватиметься, не охоплюючи нових ділянок поверхні вирізу (див. рис. 2).

Тому виникає питання: як узгоджуватимуться описані картини розвитку зон пластичних деформацій для обох форм торця вирізу між собою, та чи, принаймні для високих навантажень, узгоджуватимуться вони із розвитком пластичної зони для тріщини?

1. Аналіз пластичної зони для прямокутного вирізу. Внаслідок симетрії задачі ($\omega(x,y) = -\omega(x,-y)$) переміщення $\omega(x,0) = 0$, $x \ge 0$. Тому і

$$\tau_{xz}(x,0) = 0 \qquad (x \ge 0). \tag{1}$$

Це дає змогу ставити крайову задачу тільки для верхньої половини тіла.

Нехай L — границя зони пластичних деформацій, що розвиваються в околі точки (0, h) вирізу. Нехай D — частина верхньої півплощини $y \ge 0$, обмежена променями $-\infty < x \le 0$; $y = h$ і $0 \le x < \infty$; $y = 0$, відрізком $x = 0$; $0 \le y \le h$ і лінією L. В області D тіло перебуває у пружному стані. Відсутність зовнішніх напружень на гранях вирізу, умова пластичності і умова неперервності напружень [3] на границі пластичної зони означають, що

$$\begin{aligned}
&\tau_{yz}(x,h) = 0 \qquad (-\infty < x \le 0),\\
&\tau_{xz}(0,y) = 0 \qquad (0 \le y \le h),\\
&\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 \qquad ((x,y) \in L),\\
&x\tau_{xz} + (y-h)\tau_{yz} = 0 \qquad ((x,y) \in L).
\end{aligned} \tag{2}$$

Умови (1), (2) виражають крайову задачу у напруженнях. Внаслідок умов рівноваги і закону Гука функція $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x,y) + i\tau_{xz}(x,y)$ ($\zeta = x + iy$) є аналітичною у області D. Перефразувавши умови (1), (2), отримуємо крайову задачу для $\tau(\zeta)$:

$$\begin{aligned}
&Re(\tau(\zeta)) = 0 \qquad (\zeta = x + ih, -\infty < x \le 0),\\
&|\tau(\zeta)| = k \quad (\zeta \in L), \qquad Im(\zeta - ih)\tau(\zeta) = 0 \quad (\zeta \in L),\\
&Im(\tau(\zeta)) = 0 \quad (\zeta = 0 + iy, 0 \le y \le h) \quad \text{або} \quad (\zeta = x + i0, 0 \le x < \infty).
\end{aligned} \tag{3}$$

Крайова задача (3) є задачею з невідомою границею, оскільки контур L апріорі невідомий. Однак легко переконатися, що функція $\tau(\zeta)$ здійснює конформне відображення області D на цілком конкретну область G площини $\tau: \ G = |\tau| \leq k, -\pi/2 \leq \arg\tau \leq 0$. Цей факт дає змогу, аналогічно як у роботі [4], звести знаходження функції $\tau(\zeta)$ до задачі Келдиша–Сєдова. З цією метою подаємо розв'язок задачі (3) у вигляді

$$\tau = \tau_1(t), \quad \zeta = \zeta(t), \quad (t \in H = Im(t \geq 0)). \tag{4}$$

Для однозначності відображення $\tau_1(t)$ слід на границі областей H і G зафіксувати три відповідні пари точок. Функція $\tau(\zeta)$, визначена рівностями (4), не залежить від того, як конкретизовано відображення $\tau_1(t)$. Прийнявши, що $\tau_1(\infty) = 0$, $\tau_1(0) = -ik$, $\tau_1(1) = k$, отримуємо

$$\tau_1(t) = k(\sqrt{t} - \sqrt{t - t_D}/t_D), \tag{5}$$

де через $\sqrt{t-a}$ (a — дійсне число) позначено аналітичну в H функцію, додатню на дійсній осі при $t > a$; $t_D = 4k^2\tau_C^2/(k^2+\tau_C^2)^2$ ($\tau_C = \tau_{yz}(0,0)$ — параметр, що відіграє роль навантаження і через який визначається асимптотика напружень у безмежно віддаленій точці тіла). Границі L пластичної зони у площині t відповідає відрізок дійсної осі $[0, t_D]$.

При $\zeta \to \infty$ $\tau(\zeta) = A/\sqrt{\zeta} + o(1\sqrt{\zeta})$ (A — дійсна стала) і розв'язок крайової задачі (3) єдиний з точністю до константи A, що має зміст навантаження у безмежно віддаленій точці тіла.

Введемо в області H нову невідому функцію [4]

$$\lambda(t) = (\zeta(t) - ih)\tau_1(t) \tag{6}$$

і отримаємо для неї таку задачу Келдиша–Сєдова:

$$\begin{aligned} &Re(\lambda) = 0 \quad (t \in (-\infty; 0)), \quad Im(\lambda) = 0 \quad (t \in [0, t_D]), \\ &Re(\lambda) = 0 \quad (t \in [t_D, 1]), \quad Im(\lambda) = -h\tau_1(t) \quad (t \in (1, +\infty)). \end{aligned} \tag{7}$$

Для побудови розв'язку задачі (7) з'ясуємо спочатку поведінку функції $\lambda(t)$ у точках зміни типу крайових умов та у точці $t = \infty$.

Оскільки функція $\tau_1(t)$ є обмеженою і тому, що $\zeta(t) = O(t)$, $\tau(t) = k\sqrt{t_D}/(2\sqrt{t}) + o(1/\sqrt{t})$ при $t \to \infty$, то $\lambda = O(\sqrt{(t)})$ при $t \to \infty$. Розв'язок задачі (7) виглядає так [2]:

$$\lambda(t) = \frac{R(t)}{\pi} \int\limits_1^{\infty} \frac{\tau_1(\eta)d\eta}{R(\eta)(\eta - t)}, \tag{8}$$

де $R(t) = \sqrt{t(t-t_D)(t-1)}$ — аналітична в області H функція, додатна при дійсних $t > 1$.

Із (5) і (8) отримуємо

$$\lambda(t) = \frac{hkR(t)}{\pi\sqrt{t_D}} \left(\int\limits_1^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-1)(\eta-t)}} - \int\limits_1^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-t_D)(\eta-1)(\eta-t)}} \right).$$

Звідки після відповідних обчислень отримуємо для $t \in (1, +\infty)$

$$\lambda(t) = \frac{kh}{\pi\sqrt{t_D}} \left(\sqrt{t-t_D} \ln\frac{\sqrt{t}-\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}+\sqrt{t-1}} - \sqrt{t}\ln\frac{\sqrt{t-t_D}-\sqrt{t-1}}{\sqrt{t-t_D}+\sqrt{t-1}} \right) \tag{9}$$

і для $t \in (0, t_D)$

$$\lambda(t) = \frac{kh}{\pi\sqrt{t_D}}\Big(2\sqrt{t-t_D}\arctan\sqrt{\frac{t}{t-1}} + \sqrt{t}\ln\frac{\sqrt{1-t}-\sqrt{t_D-t}}{\sqrt{1-t}+\sqrt{t_D-t}}\Big). \qquad (10)$$

Отже, як і у випадку півбезмежної тріщини, для півбезмежного прямокутного вирізу сталої ширини розв'язок пружно–пластичної задачі також виражається у замкнутій аналітичній формі і подається формулами (5), (6), (9), (10).

З'ясуємо асимптотику функції на нескінченності. Із формули (9) випливає, що $\lambda(t) = -\dfrac{k\ln(1-t_D)}{\pi\sqrt{t}}\sqrt{t_D} + o(\sqrt{t})$ при $t \to \infty$. Тому та на основі формул (5), (6) отримуємо

$$\tau = k\sqrt{\frac{-\sqrt{t_D}\ln(1-t_D)}{2\pi}}\sqrt{\frac{h}{\zeta}} + o\Big(\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\Big).$$

Як бачимо, асимптотика поля напружень у безмежно віддаленій точці тіла для прямокутного вирізу скінченної ширини аналогічна асимптотиці цього поля для тріщини і збігатиметься з нею, коли коефіцієнт інтенсивності напружень для тріщини $K_3 = k\sqrt{-\sqrt{t_D}\ln(1-t_D)}$. Остання формула дає змогу пов'язати коефіцієнт інтенсивності напружень відповідного поля напружень для тріщини із параметром t_D та мінімальним напруженням τ_{yz} на ділянці $x = 0$, $-h \le y \le h$ вирізу $\tau_C = \min\limits_{y \in [-h,h]} \tau_{yz}(0,y) = \tau_{yz}(0,0)$.

$K_3/(k\sqrt{h})$	r/h	$\tau_{yz}(0,0)/k$	r_0/h
4.292	2.932	0.9999	2.499
4.015	2.565	0.9997	2.100
3.717	2.199	0.9990	1.753
3.393	1.832	0.9968	1.410
3.035	1.466	0.9901	1.071
2.628	1.099	0.9689	0.740
2.141	0.729	0.9045	0.425
1.709	0.465	0.7966	0.227
1.478	0.348	0.7208	0.0824
0.700	0.078	0.4142	0.0165

Визначивши за формулами (5), (6), (9) функцію $\zeta(t)$ та, врахувавши що границі L зони пластичних деформацій у площині t відповідає відрізок $[0, t_D]$, отримуємо рівняння цієї границі

$$x = \sqrt{t}\lambda(t)/(k\sqrt{t_D}), \quad y = \sqrt{t-t_D}\lambda(t)/(k\sqrt{t_D}) \quad (t \in (0, t_D)). \qquad (11)$$

Визначені за формулами (11) межі зон пластичних деформацій для декількох рівнів навантаження K_3 наведено на рис. 3.

У таблиці подані відповідні цим навантаженням, визначені за формулою $r = K_3^2/(2\pi k^2)$ [6], радіуси r зони пластичних деформацій для тріщини, τ_C — мінімальне напруження τ_{yz} на вертикальній ділянці вирізу та максимальна протяжність $2r_0 = \max\limits_{t \in [0,t_D]} x(t)$ зони (11) вздовж осі абсцис.

При малих навантаженнях пластична зона має форму, витягнуту вздовж бісектриси кута, і є приблизно симетричною відносно бісектриси. На її розвиток майже не впливає наявність другого концентратора напружень. Розміри зони суттєво менші за розміри пластичної зони біля вершини тріщини при однаковому розподілі напружень на нескінченності.

Зі збільшенням навантаження область пластичних деформацій поступово змінюється, наближаючись за формою до півкруга. Її протяжність наближається до діаметра пластичної зони біля вістря тріщини, залишаючись трохи меншою за нього. Коли $K_3 > 4k\sqrt{h}$, протяжність зони більш ніж у три рази перевищує ширину вирізу і стає меншою за діаметр зони біля вістря тріщини приблизно на 20%. Тобто для таких випадків пластичну зону біля прямокутного вирізу можливо вже наблизити зоною (половинкою) біля вістря тріщини.

Зі збільшенням навантаження мінімальне напруження τ_C на вертикальній ділянці вирізу дуже швидко наближається до границі текучості. Коли $K_3 > 3k\sqrt{h}$, різниця $k - \tau_C$ стає меншою за $0.01\,k$. Це практично означає, що прошарок між зонами перейде у пластичний стан.

2. Аналіз пластичної зони для заокругленого вирізу. Будемо аналізувати розвиток пластичних зон для заокругленого вирізу сталої ширини, спряженого з циліндричною поверхнею, у стадії розвинутої пластичності, коли вся циліндрична поверхня вирізу охоплена пластичною зоною (див. рис. 2).

Знову скористаємося симетрією задачі і сформулюємо крайову задачу для функції $\tau(\zeta)$ у верхній половині тіла поза вирізом і пластичною зоною (області D_1 площини Oxy).

Постановка задачі у напруженнях відрізнятиметься від (1), (2) тим, що умову (1) слід вимагати при $x \geq x_0$ (x_0 — абсциса кінця пластичної зони на осі абсцис). Також, очевидно, слід випустити другу із умов (2). У зв'язку з тим, що лінії ковзання у пластичній зоні перпендикулярні до колової ділянки вирізу [1, 3] і тому мають спільним центром точку $x = 0, y = 0$, умову неперервності напружень слід переписати тепер так $x\tau_{xz} + y\tau_{yz} = 0 \quad ((x, y) \in L)$.

Знову подамо функцію напружень $\tau(\zeta)$ у параметричній формі $\tau = \tau_2(t)$, $\zeta = \zeta(t)$, $(t \in H = Im(t \geq 0))$, де

$$\tau_2(t) = k(\sqrt{t} - \sqrt{t-1}) \tag{12}$$

— функція, яка конформно відображає область H на область G, причому так, що $\tau_2(\infty) = 0$, $\tau_2(0) = -ik$ і $\tau_2(1) = k$. Границі зони пластичних деформацій тепер у площині t відповідає відрізок $[0, 1]$ дійсної осі.

Аналогічно, як у попередньому випадку, для функції

$$\lambda_1(t) = \zeta(t)\tau_2(t) \tag{13}$$

приходимо у області H до такої задачі Келдиша–Сєдова:

$$Re(\lambda_1) = -h\tau_2(t) \quad (t \in (-\infty; 0)), \quad Im(\lambda_1) = 0 \quad (t \in (0, +\infty)). \tag{14}$$

Можна показати, що функція $\lambda_1(t)$ повинна бути обмеженою у області H, за винятком безмежно віддаленої точки, при $t \to \infty$ $\lambda_1(t) = O(\sqrt{(t)})$. Тому розв'язок задачі (14) є таким:

$$\lambda_1(t) = \frac{kh\sqrt{t}}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d\eta}{(\sqrt{\eta(\eta-1)} - \eta)(\eta - t)} + C\right), \tag{15}$$

де $C = const.$ Функція $\lambda_1(t)$ та визначена через неї функція напружень $\tau(\zeta)$ матиме сенс, якщо у площині ζ всі точки, у яких $|\tau| = k$, знаходяться поза вирізом, що вимагає додаткової перевірки. Тоді сукупність цих точок складає границю пластичної зони.

Можна перевірити, що $\lambda_1(t) = (khC/\pi)\sqrt{t} + o(\sqrt{t})$ при $t \to \infty$. Звідси та із формул (12) і (13) отримуємо, що $\tau = k\sqrt{C}/(2\pi)\sqrt{h/\zeta} + o(1/\sqrt{\zeta})$ при

$\zeta \to \infty$. Отже, також і для заокругленого вирізу асимптотика поля напружень на безмежності аналогічна полю напружень для тріщини. Ці асимптотики збігатимуться, якщо $C = K_3^2/(hk^2)$.

Рис. 3: Форми пластичних зон для прямокутного вирізу.

Рис. 4: Форми пластичних зон біля заокругленого вирізу і відповідні зони біля вістря тріщини.

Визначивши $\zeta(t)$ із формул (12), (13) і (15) та провівши відповідні обчислення, знайдемо образ відрізка $[0,1]$ дійсної осі t, який за вищевказаної умови виражає рівняння границі зони пластичних деформацій

$$x = tB(t), \quad y = \sqrt{t(1-t)}B(t), \quad (t \in (0,1)), \tag{16}$$

де $B(t) = h\left(K_3^2/(hk^2) + \ln 4t + 2\sqrt{(1-t)/t}\arctan\sqrt{(1-t)/t}\right)/\pi$.

Лінія (16) виражатиме границю зони, якщо $x^2(t) + y^2(t) > h^2$ $(t \in (0,1))$. Як показав чисельний експеримент, ця умова виконується, коли $K_3 > 3.77k\sqrt{h}$.

Із формули (16) випливає, що при великих навантаженнях (великих K_3) пластична зона має приблизно кругову форму, а її протяжність d у напрямку осі абсцис, порахована від точки $(h,0)$ є такою:

$$d = \frac{h}{\pi}\left(\frac{K_3^2}{hk^2} + \ln 4\right) - h.$$

На рис. 4 наведені пластичні зони для заокругленого вирізу (криві, що починаються від точки $(0,h)$) і тріщини (криві, що починаються від точки $(h,0)$), коли поля напружень на нескінченності є однаковими. У стадії розвинутої пластичності заокругленість спричиняє невелике розширення зони. Для цієї стадії наближення форми і розмірів зони, відповідними зонами для тріщини, можна вважити досить добрими.

1. *Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.* Упруго–пластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 238 с.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Физматгиз, 1958. – 544 с.
3. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. – М.: Изд–во Моск. ун–та, 1979. – 208 с.
4. *Кривень В. А.* Непрерывное и разрывное решения упругопластической задачи об антиплоской деформации тела с трещиной // Физ. – хим. мех. материалов. – 1985. – № 6. – С. 10-16.
5. *Панасюк В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов – К.: Наук. думка, 1991. – 411 с.
6. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

ПЛАСТИЧЕСКИЕ ЗОНЫ ПРИ СДВИГАХ ВОЗЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО И ЗАОКРУГЛЕННОГО ВЫРЕЗОВ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

Исследовано напряженно–деформированное состояние идеально упруго– пластического тела с полубесконечным прямоугольным и заокругленным вырезами постоянной ширины в условиях антиплоской деформации. Найдены аналитические решения задач, исследовано развитие пластических зон. Показано, что если максимальный размер пластической зоны в несколько раз превышает ширину выреза, форму зоны можно приближенно определить на основании решения упруго–пластической задачи для полубесконечной трещины.

PLASTIC ZONES AT SHEAR NEAR RECTANGULAR AND ROUNDED CUTS OF CONSTANT WIDTH

Stressed–deformed state of ideal elasto–plastic body with semi–infinite rectangular and rounded cuts of constant width in the conditions of anti–plane deformation is investigated. Analytical solutions of problems are found, plastic zones development is investigated. It is shown that zone shape can be approximated by solution of the elasto–plastic problem for semi–infinite crack when maximum size of plastic zone is in several times excess over cut width.

Тернопільський державний технічний університет ім. І.Пулюя

Отримано 17.01.04