УДК 621.64.029

Я. Д. П'янило, В. С. Попович, А. Я. П'янило

ІТЕРАЦІЙНА СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТИПУ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

В роботі пропонується ітераційна схема розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь в часткових похідних типу теплопровідності. Доводиться збіжність побудованої ітераційної схеми.

Постановка проблеми. Багато фізичних процесів описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, які переважно є нелінійними. За виключенням окремих випадків, отримання аналітичного їх розв'язку при заданих початково–граничних умовах пов'язане із значними труднощами або взагалі неможливе. Тому основними способами їх розв'язування є або лінеаризація вихідної задачі, або використання числових методів, або побудова ітераційних схем. Кожен з цих способів має свої переваги та недоліки. Лінеаризація вихідної задачі дозволяє отримати аналітичний розв'язок, однак може привести до порушення певних фізичних зв'язків та отримання фізично неправильних результатів [5, 6, 8]. При використанні суто числових способів мають місце значні обчислювальні труднощі. Найбільш перспективною є побудова ітераційних алгоритмів. При цьому застосування існуючих загальних схем не завжди доцільне, оскільки кожна математична модель має свої особливості, і не завжди вдається перевірити умови збіжності. Тому є сенс на базі загальних схем будувати ітераційний алгоритм розв'язування поставленої задачі, адаптований до наявної вхідної та апріорної інформації.

Огляд літератури. На даний час існує значна кількість способів лінеаризації задач математичної фізики стосовно моделювання різних фізичних процесів [4, 7, 8, 10]. Суть лінеаризації полягає в апроксимації нелінійної залежності параметра, що входить в математичну модель, лінійною функцією за даним параметром з невідомими коефіцієнтами, які визначаються на основі певних критеріїв [3, 8]. Ефективність ітераційних схем залежить від швидкості їх збіжності, що головним чином визначається початковим наближенням [3]. Числові способи розв'язування використовують дискретизовані математичні моделі і суттєво залежать від кроку дискретизації [3, 8]. Тому їх використовують, як правило, для дослідження процесів в невеликих околах за координатами та для невеликого проміжку часу. В даній роботі будується ітераційна схема розв'язування нелінійних крайових задач типу нестаціонарної теплопровідності та досліджується її збіжність. Початково–граничними задачами такого типу описуються процеси руху рідини та газу в лінійних трубопроводах, дифузії газу в пористих середовищах, поширення температури в неоднорідних та термочутливих тілах і т. п.

Постановка задачі. Нехай функція $f(x,y,\tau)$, що описує деякий фізичний процес в області D з границею S, визначається з нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(f)\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(f)\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\alpha(f)\frac{\partial f}{\partial \tau}+W \tag{1}$$

з заданими початково–граничними умовами

$$f(x,y,\tau)\,|_{S_1}=\varphi(\tau),\ \ \lambda(f)\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{S_2}=\psi(\tau),\ \ f(x,y,0)=\gamma(x,y), \tag{2}$$

де x, y — декартові координати, τ — час, $\lambda(f)$ та $\alpha(f)$ задані, залежні від невідомої функції, параметри, $S = S_1 \cup S_2$, n — зовнішня нормаль до S, $W = W(x, y, \tau)$, $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\gamma(x, y)$ — задані функції. Побудуємо ітераційну схему для знаходження розв'язку задачі (1)–(2). Будемо вважати, що функція $f(x, y, \tau)$ обмежена, тобто $f_n \leq f(x, y, \tau) \leq f_k$. Якщо ввести позначення

$$F = \int_{f_n}^{f} \lambda(z)dz, \quad \Phi = \int_{f_n}^{f} \alpha(z)dz,$$

то

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \alpha \frac{\partial f}{\partial \tau}$$

і рівняння (1) набуває вигляду

$$\Delta\, F = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + W, \tag{3}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Нехай f^* — деякий наближений розв'язок вихідного рівняння, а F^* та Φ^* наближені значення функцій F та Φ, відповідно. Тоді рівняння (3) можна переписати у вигляді

$$\Delta F^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \tau} + W - \Delta(F - F^*) + \frac{\partial(\Phi - \Phi^*)}{\partial \tau}. \tag{4}$$

Функції наближення $F^* = F^*(f)$ та $\Phi^* = \Phi^*(f)$ будемо шукати у вигляді лінійних виразів

$$F(f) \approx F^*(f) = F_0 + F_1 f, \; \Phi(f) \approx \Phi^*(f) = \Phi_0 + \Phi_1 f. \tag{5}$$

Очевидно, що точність апроксимації функцій F та Φ залежить від гладкості функцій $\lambda(f)$ та $\alpha(f)$. Якщо останні є достатньо гладкими, то їх можна апроксимувати на всьому проміжку $f \in [f_n, f_k]$. У загальному випадку доцільно використовувати „ковзаючу" апроксимацію, тобто функції $F(f)$ та $\Phi(f)$ апроксимувати на I підінтервалах $f \in [f_{ni}, f_{ki}]$, $i = \overline{1, I}$, $f_{n1} = f_n$, $f_{kI} = f_k$. Очевидно, що в даному випадку апроксимації (5) будуть більш точними. Відзначимо, що отриманий таким чином лінеаризований розв'язок, як показує практика [3, 9], описує фізичні процеси з достатньою для використання точністю. Прикладами таких процесів є визначення перехідних часів в процесах течіння газу в лінійних трубопроводах, дифузія газу в пористих середовищах і т.п. Надалі будемо будувати розв'язок задачі на деякому i-ому підінтервалі $f \in [f_{ni}, f_{ki}]$ і для простоти індекс i будемо опускати.

Оскільки $f \in [f_n, f_k]$, то коефіцієнти співвідношень (5) обчислюються згідно формул

$$F_0 = F(f_n) - \frac{f_n}{f_k - f_n}[F(f_k) - F(f_n)], \; F_1 = \frac{1}{f_k - f_n}[F(f_k) - F(f_n)],$$

$$\Phi_0 = \Phi(f_n) - \frac{f_n}{f_k - f_n}[\Phi(f_k) - \Phi(f_n)], \; \Phi_1 = \frac{1}{f_k - f_n}[\Phi(f_k) - \Phi(f_n)].$$

Якщо враховувати співвідношення (5), то рівність (4) запишеться у вигляді

$$F_1 \Delta f = \Phi_1 \frac{\partial f}{\partial \tau} + W + \delta(f), \tag{6}$$

де нев'язка $\delta(f)$ визначається співвідношенням

$$\delta(f) = -\Delta(F - F^*) + \frac{\partial(\Phi - \Phi^*)}{\partial \tau}.$$

Ітераційна схема розв'язування задачі (6) полягає в наступному.

1. Розв'язується рівняння

$$F_1 \Delta f = \Phi_1 \frac{\partial f}{\partial \tau} + W \tag{7}$$

при початково–граничних умовах (2), розв'язок якого приймається за початкове (нульове) наближення вихідної задачі. Для побудови розв'язку задачі в нульовому наближенні можна використати відомі, достатньо добре розроблені та обгрунтовані методи [3], такі як: розділення змінних, використання інтегральних перетворень і т.п. Однак в даному випадку доцільно будувати розв'язок на основі функції Гріна. Якщо в рівнянні (7) перейти з області оригіналів в область зображень Лапласа [1, 2] і зображення Лапласа розв'язку задачі по одній із змінних (наприклад, x) представити рядом Фур'є, то, якщо область визначення буде прямокутником $x \in [x_0, x_k]$, $y \in [y_0, y_k]$, для отриманого диференціального рівняння за другою змінною y функція Гріна буде мати вигляд

$$G(y, z, s) = \frac{1}{2\lambda} \begin{cases} -\dfrac{sh\,\lambda(y_k - z)}{sh\,\lambda(y_k - y_0)} \left(e^{\lambda(y-y_0)} - e^{-\lambda(y-y_0)}\right), \quad y_0 \le y \le z, \\ -\dfrac{sh\,\lambda(y_k - z)}{sh\,\lambda(y_k - y_0)} \left(e^{\lambda(y-y_0)} - e^{-\lambda(y-y_0)}\right) + \left(e^{\lambda(y-z)} - e^{-\lambda(y-z)}\right), \\ z \le y \le y_k, \end{cases}$$

де s — параметр перетворення Лапласа, а λ — корінь відповідного характеристичного рівняння. Використання функції Гріна дозволяє при побудові ітераційної схеми для уточнення наступної ітерації виділити нев'язку окремим доданком, що полегшує програмну реалізацію вихідної задачі.

2. Наступні наближення (ітерації) знаходяться з рівняння

$$F_1 \Delta f_{i+1} = \Phi_1 \frac{\partial f_{i+1}}{\partial \tau} + W + \delta(f_i). \tag{8}$$

Збіжність ітераційної процедури, побудованої згідно формули (8). Будемо вважати, що функції $\lambda(f)$, $\alpha(f)$ — обмежені. Згідно означення нев'язки

$$\delta(f_i) = -\Delta(F_i - F_i^*) + \frac{\partial(\Phi_i - \Phi_i^*)}{\partial \tau}.$$

Тоді можна записати, що

$$\delta(f_i) - \delta(f_{i-1}) = -\Delta(\eta_i) + \frac{\partial \zeta_i}{\partial \tau}, \tag{9}$$

де позначено:

$$\eta_i = \int_{f_n}^{f_k} \lambda(z)dz - F_1(f_i - f_{i-1}), \quad \zeta_i = \int_{f_n}^{f_k} \alpha(z)dz - \Phi_1(f_i - f_{i-1}).$$

Останні дві формули на основі теореми про середнє значення можна записати наступним чином

$$\eta_i = -F_1 \left[(f_i - f_{i-1}) - \frac{1}{F_1} \int_{f_n}^{f_k} \lambda(z)dz \right] = -F_1(f_i - f_{i-1})\left(1 - \frac{\lambda_s}{F_1}\right), \tag{10}$$

$$\zeta_i = -\Phi_1\left[(f_i - f_{i-1}) - \frac{1}{\Phi_1}\int\limits_{f_n}^{f_k}\alpha(z)dz\right] = -\Phi_1(f_i - f_{i-1})\Big(1 - \frac{\alpha_s}{\Phi_1}\Big). \qquad (11)$$

Тут λ_s та α_s — деякі середні значення функцій $\lambda(f)$ та $\alpha(f)$, відповідно.

Підставляючи формули (10) та (11) в (9), отримаємо:

$$\delta(f_i) - \delta(f_{i-1}) = \Delta\Big(F_1(f_i - f_{i-1})\Big(1 - \frac{\lambda_s}{F_1}\Big)\Big) - \frac{\partial}{\partial\tau}\Phi_1(f_i - f_{i-1})\Big(1 - \frac{\alpha_s}{\Phi_1}\Big) =$$

$$F_1\Big(1 - \frac{\lambda_s}{F_1}\Big)\Delta(f_i - f_{i-1}) - \Big(1 - \frac{\alpha_s}{\Phi_1}\Big)\Phi_1\frac{\partial(f_i - f_{i-1})}{\partial\tau}.$$

Використовуючи означення сталої F_1, легко показати, що

$$F_1 = \frac{1}{(f_k - f_n)}\int\limits_{f_n}^{f_k}\lambda(z)dz \le \lambda_{max}.$$

Тому $\varepsilon = 1 - \dfrac{\lambda_s}{F_1} \le 1 - \dfrac{\lambda_s}{\lambda_{max}} < 1$. Аналогічно показується, що $\varepsilon_1 = 1 - \dfrac{\alpha_s}{\Phi_1} < 1$. Далі, згідно із формулою (8)

$$F_1\Delta f_i = \Phi_1\frac{\partial f_i}{\partial\tau} + W + \delta(f_{i-1}), \quad F_1\Delta f_{i-1} = \Phi_1\frac{\partial f_{i-1}}{\partial\tau} + W + \delta(f_{i-2}).$$

З останніх двох формул отримуємо співвідношення

$$F_1\Delta(f_i - f_{i-1}) = \Phi_1\frac{\partial(f_i - f_{i-1})}{\partial\tau} + \delta(f_{i-1}) - \delta(f_{i-2}). \qquad (12)$$

Якщо ввести оператор $T = F_1\Delta - \Phi_1\dfrac{\partial}{\partial\tau}$, то формулу (12) можна записати наступним чином

$$T(f_i - f_{i-1}) = \delta(f_{i-1}) - \delta(f_{i-2}) =$$

$$F_1\Big(1 - \frac{\lambda_s}{F_1}\Big)\Delta(f_{i-1} - f_{i-2}) - \Big(1 - \frac{\alpha_s}{\Phi_1}\Big)\Phi_1\frac{\partial(f_{i-1} - f_{i-2})}{\partial\tau},$$

або

$$T(f_i - f_{i-1}) = \varepsilon F_1\Delta(f_{i-1} - f_{i-2}) - \varepsilon_1\Phi_1\frac{\partial(f_{i-1} - f_{i-2})}{\partial\tau}.$$

Остання формула зводиться до вигляду

$$T(f_i - f_{i-1}) = \varepsilon T(f_{i-1} - f_{i-2}) - (\varepsilon_1 - \varepsilon)\Phi_1\frac{\partial(f_{i-1} - f_{i-2})}{\partial\tau}. \qquad (13)$$

Якщо T^{-1} — оператор, обернений до T, то з формули (13) отримуємо

$$f_i - f_{i-1} = \varepsilon(f_{i-1} - f_{i-2}) - (\varepsilon_1 - \varepsilon)\Phi_1 T^{-1}\frac{\partial(f_{i-1} - f_{i-2})}{\partial\tau}. \qquad (14)$$

Якщо тепер замість $f_{i-1} - f_{i-2}$ використати знову співвідношення (14) та обмежитись першою степінню малості, то отримаємо, що

$$f_i - f_{i-1} = \varepsilon(f_{i-1} - f_{i-2}),$$

звідки випливає, що при збільшенні кількості ітерацій наближений розв'язок прямує до точного за степеневим законом за основою $\varepsilon < 1$. Тим самим доведено збіжність ітераційного процесу.

Теорема. *Нехай функція $f(x,y,\tau)$ задовольняє рівняння (1) і задані початково–граничні умови (2), причому функції $\lambda(f)$, $\alpha(f)$ є обмеженими та інтегрованими. Тоді розв'язок вихідної початково–граничної задачі будується у вигляді збіжної ітераційної процедури (8).*

1. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1975. – 407 с.
2. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 465 с.
3. *Иванов В.В.* Методы вычислений на ЭВМ: Справочное пособие. – Киев: Наук. Думка, 1986. – 584 с.
4. *Кушнір Р.М., Попович В.С., Гарматій Г.Ю.* Аналітично–чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл з теплообміном // Фізико–хімічна механіка матеріалів. – 2001. – № 6. – С. 39–44.
5. *Попович В.С.* О решении стационарных задач теплопроводности контактирующих теплочувствительных тел // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 1989. – Вип. 29. – С. 51–55.
6. *Попович В.С., Гарматій Г.Ю.* Нестаціонарна задача теплопровідності для термочутливого простору зі сферичною порожниною // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 1994.– Вип. 37. – С. 100–104.
7. *Попович В.С., Махоркін І.М.* Про розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 1997.– Т.40, № 1. – С. 36–44.
8. *Темпель В.Ф.* Моделирование газоснабжающих систем. – Л.: Недра, 1986. – 184 с.
9. *Тетерев И.Г., Шешуков Н.Л., Нанивский Е.М.* Управление процессами добычи газа. – М.: Недра, 1981. – 248 с.
10. *Kushnir R.M., Popovych V.S., Harmatiy H.Yu.* Solution of Quasi-Static Thermoelasticity Problem for Thermoextensitive Dilies Under a Convective Heat Exchange// Proc. of the 5th Intern. Congress on Thermal Stresses and Related Topics (TS'03 8-11.06.2003, Blacksburg, VA, USA). – Virginia Tech. – 2003. – Vol.1. – P. MM–321–VV–324.

ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ТИПА НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В работе предлагается итерационная схема решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных типа теплопроводности. Доказывается сходимость построенной итерационной схемы.

THE ITERATIVE SCHEME OF THE SOLUTION OF NONLINEAR PROBLEMS THE NON–STATIONARY HEAT CONDUCTIVITY TYPE

In work the iterative scheme for the solution of nonlinear partial differential equations the heat conductivity type is offered. Convergence of the constructed iterative scheme is proved.

Ін–т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
07.10.03