УДК 517.958:536.72

О. Ю. Черпуха

ДИФУЗІЯ ДОМІШКИ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНОМУ ВОЛОКНИСТОМУ ШАРІ

Розглянуто дифузію домішкової речовини в шарі, який складається з двох різних за дифузійними властивостями фаз — матриці та випадково розташованих включень типу волокон. На міжфазних границях виконуються умови неідеального масового контакту. Контактно–крайова задача зведена до нелінійного інтегродиференціального рівняння, яке розв'язується методом послідовних наближень. Доведена збіжність ряду Неймана для цього випадку. Знайдено наближену формулу для усередненої за ансамблем конфігурацій фаз концентрації.

При моделюванні та вивченні процесів масопереносу в неоднорідних тілах необхідно враховувати вплив структури матеріалу на перерозподіл домішкових речовини [6]. Такі задачі виникають, наприклад, при виборі оптимальних структур нових композитних матеріалів у хіміко–технологічних процесах, у будівельній індустрії, сільському господарстві, тощо. При цьому структура середовища, в якому відбувається масоперенос речовини, у багатьох випадках є випадковою.

При дослідженні механічних, теплових і дифузійних процесів в таких тілах застосовується метод „гомогенізації" гетерогенного середовища, що базується на введенні параметрів, усереднених за елементарними макрооб'ємами (репрезентативними областями), розміри яких є істотно більшими за характерні розміри неоднорідностей і значно меншими за розміри тіла. При цьому зміна параметрів середовища на віддалях, що істотно перевищують розміри неоднорідностей, повинна бути несуттєвою [8, 12, 13].

У випадку дослідження процесу масопереносу в неоднорідних випадкових тілах для врахування суттєвої зміни коефіцієнтів дифузії в роботах [8, 10] був запропонований підхід, який базується на формулюванні інтегродиференціального рівняння, еквівалентного вихідній крайовій задачі дифузії, його розв'язанні методом послідовних наближень та усереднення отриманого поля концентрації за ансамблем реалізацій середовища. При цьому явно не використовується умова малості розмірів неоднорідностей у порівнянні з макророзміром. Такий підхід був застосований до розв'язання ряду крайових задач дифузії, що формулюються на основі законів Фіка для тіла в цілому, а коефіцієнти рівняння є випадковими функціями координат для середовища стохастичної структури [8–11].

Метою даної роботи є застосування запропонованого підходу для отримання усередненого за ансамблем конфігурацій фаз поля концентрації в шарі з випадково розташованими включеннями, що мають форму волокон на основі контактно–крайової задачі дифузії за умов неідеального масового контакту на міжфазних границях.

1. Постановка задачі. Нехай домішкова речовина мігрує в шарі товщини z_0, який містить випадково розташовані волокнисті включення, причому дифузійні властивості матеріалу включень (область Ω_1) суттєво відрізняються від характеристик матриці (основної фази, область Ω_0). Також вважаємо, що нам невідома точна геометрична конфігурація фаз в області тіла. Розглянемо випадок рівномірного розподілу фаз у тілі. Приймаємо, що об'ємна частка волокон v_1 є набагато меншою від об'ємної частки основної фази: $v_1 \ll v_0$.

В області Ω_0 поле концентрації підпорядковується рівнянню

$$\frac{\partial c(\vec{r},t)}{\partial t} = D_0 \left[\frac{\partial^2 c(\vec{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(\vec{r},t)}{\partial z^2} \right], \quad \vec{r} \in \Omega_0, \quad t \in [0;\tau] \ (\tau < \infty), \tag{1}$$

а в області Ω_1 — аналогічному рівнянню з іншим коефіцієнтом дифузії

$$\frac{\partial c(\vec{r},t)}{\partial t} = D_1 \left[\frac{\partial^2 c(\vec{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c(\vec{r},t)}{\partial z^2} \right], \quad \vec{r} \in \Omega_1, \quad t \in [0;\tau]. \tag{2}$$

Тут коефіцієнти дифузії домішки відповідно в областях Ω_0 та Ω_1; $\vec{r} = (x, z)$ — радіус–вектор біжучої точки, t — час.

Приймаємо, що на границі шару $z = 0$ підтримується постійне значення концентрації домішкової речовини, на границі $z = z_0$, як і у початковий момент часу, концентрація дорівнює нулю, тобто:

$$c(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = 0,$$

$$c(\vec{r},t)\Big|_{z=0} = c_*, \quad c(\vec{r},t)\Big|_{z=z_0} = 0; \quad c(\vec{r},t)\Big|_{x\to\pm\infty} \le K < \infty. \tag{3}$$

На границі розділу областей Ω_0 і Ω_1 задано рівності хімічних потенціалів $\mu(\vec{r},t)$ та масових потоків частинок домішки

$$\mu(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\Gamma-0} = \mu(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\Gamma+0},$$

$$\rho_0 d_0 \vec{\nabla}\mu(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\Gamma-0} = \rho_1 d_1 \vec{\nabla}\mu(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\Gamma+0}, \tag{4}$$

де ρ_j — густина області Ω_j ($j = 0;1$), d_j — кінетичні коефіцієнти, Γ — границя розділу областей Ω_0 і Ω_1, причому $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{n_1} \Gamma_{i1}$, n_1 — кількість однозв'язних областей сорту 1, Γ_{ij} — границя однозв'язної області Ω_{ij}.

Якщо прийняти лінійну залежність хімічного потенціалу від концентрації, то отримаємо умови неідеального контакту для концентрації у вигляді

$$k_0 c(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\Gamma-0} = k_1 c(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\Gamma+0},$$

$$\rho_0 D_0 \vec{\nabla} c(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\Gamma-0} = \rho_1 D_1 \vec{\nabla} c(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\Gamma+0}, \tag{5}$$

де k_j — коефіцієнт концентраційної залежності хімічного потенціалу у j–й фазі.

2. Побудова розв'язку задачі. Зведемо контактну задачу дифузії (1), (2), (5) до рівняння дифузії для тіла в цілому. Для цього знайдемо $\vec{\nabla} c(\vec{r},t)$, враховуючи, що функція $c(\vec{r},t)$ має розриви 1–го роду. Згідно з [2] маємо

$$\vec{\nabla} c(\vec{r},t) = \left\{ \vec{\nabla} c(\vec{r},t) \right\} + [c(\vec{r},t)]_\Gamma \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_\Gamma), \tag{6}$$

тут $\{f(x)\}$ — кусково–неперервна функція, $[f]_{x_i}$ — стрибок функції $f(x)$ в точці x_i, $\delta(x)$ — дельта–функція Дірака, $\vec{r}_\Gamma$ — радіус–вектор точок границі Γ.

Величину $\Delta c(\vec{r},t)$ знаходимо аналогічно, враховуючи, що $\vec{\nabla} c(\vec{r},t)$ також має розриви 1–го роду:

$$\Delta c(\vec{r},t) = \{\Delta c(\vec{r},t)\} + \left[\vec{\nabla} c(\vec{r},t) \right]_\Gamma \delta(\vec{r} - \vec{r}_\Gamma) + [c(\vec{r},t)]_\Gamma \, \vec{\nabla} \delta(\vec{r} - \vec{r}_\Gamma). \tag{7}$$

Розглянемо випадкову функцію координат $\eta_{ij}(\vec{r})$

$$\eta_{ij}(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in \Omega_{ij}, \\ 0, & \vec{r} \notin \Omega_{ij}; \end{cases} \qquad \sum_j \sum_{i=1}^{n_j} \eta_{ij}(\vec{r}) = 1. \tag{8}$$

Тоді коефіцієнт дифузії для тіла в цілому можна подати у вигляді

$$D(\vec{r}) = \sum_j \sum_{i=1}^{n_j} D_j \eta_{ij}(\vec{r}). \tag{9}$$

З урахуванням співвідношень (7)–(9) запишемо рівняння дифузії для тіла в цілому

$$L(\vec{r},t)c(\vec{r},t) = \frac{\partial c}{\partial t} - \sum_j \sum_{i=1}^{n_j} D_j \eta_{ij}(\vec{r}) \{\Delta c\} - \sum_j \sum_{i=1}^{n_j} [\nabla c]_{\Gamma_{ij}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ij}}) -$$

$$\sum_j \sum_{i=1}^{n_j} [c]_{\Gamma_{ij}} \nabla \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{ij}}) = 0. \tag{10}$$

Додамо і віднімемо в рівнянні (10) невипадковий оператор $L_0(\vec{r},t)$ з коефіцієнтом дифузії основної фази. Тоді одержимо

$$L_0(\vec{r},t)c(\vec{r},t) = [L_0(\vec{r},t) - L(\vec{r},t)]\, c(\vec{r},t) \equiv L_s(\vec{r})c(\vec{r},t), \tag{11}$$

де

$$L_s c = (D_1 - D_0) \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(\vec{r}) \{\Delta c\} + \sum_{i=1}^{n_1} [\nabla c]_{\Gamma_{i1}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{i1}}) + \sum_{i=1}^{n_1} [c]_{\Gamma_{i1}} \nabla \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\Gamma_{i1}}). \tag{12}$$

Вважаємо праву частину рівняння (11) джерелом, тобто неоднорідність матеріалу розглядаємо як внутрішні джерела. Тоді крайова задача (11), (3) еквівалентна такому інтегродиференціальному рівнянню

$$c(\vec{r},t) = c_0(\vec{r},t) + \int_0^t \int_V G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t') L_s(\vec{r}\,') c(\vec{r}\,',t') d\vec{r}\,' dt', \tag{13}$$

де V — об'єм тіла, c_0 — розв'язок однорідного рівняння (11) з крайовими умовами (3), який з урахуванням симетрії за змінною x прийме вигляд [5]

$$c_0(z,t) = c_* \left[1 - \frac{z}{z_0} - \frac{2}{z_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{y_k} \sin(y_k z)\; e^{-D_0 y_k^2 t}\right]; \tag{14}$$

$G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')$ — функція Гріна задачі (11), (3), а саме

$$G = \frac{1}{z_0} \sqrt{\frac{\pi}{D_0(t-t')}} \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4D_0(t-t')}\right\} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-D_0 y_k^2 (t-t')} \sin(y_k z') \sin(y_k z), \tag{15}$$

де $y_k = k\pi/z_0$.

Розв'язок інтегродиференціального рівняння (13), яке є рівнянням Гаммерштейна за просторовими змінними та рівнянням Вольтерра за часовою змінною [3], будуємо методом послідовних наближень. За нульове наближення

$c^{(0)}(\vec{r},t)$ вибираємо розв'язок однорідної крайової задачі: $c^{(0)}(\vec{r},t) = c_0(z,t)$. Тоді отримаємо рекурентні співвідношення для послідовних наближень:

$$c^{(1)}(\vec{r},t) = c_0(z,t) + \int\limits_0^t \int\limits_V G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')L_s(\vec{r}\,')c^{(0)}(z',t')d\vec{r}\,'dt',$$

$$\ldots$$

$$c^{(n)}(\vec{r},t) = c_0(z,t) + \int\limits_0^t \int\limits_V G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')L_s(\vec{r}\,')c^{(n-1)}(z',t')d\vec{r}\,'dt', \qquad (16)$$

$$\ldots$$

У побудованій послідовності функцій $c^{(0)}$, $c^{(1)}, ..., c^{(n)}, ...$ загальний член має вигляд

$$c^{(n)}(\vec{r},t) = c_0(z,t) + \int\limits_0^t \int\limits_V G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')L_s(\vec{r}\,')c_0(z',t')d\vec{r}\,'dt' + ...+$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_V G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')L_s(\vec{r}\,') \int\limits_0^{t'} \int\limits_V G(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',t',t'')L_s(\vec{r}\,'')...L_s(\vec{r}^{(n-2)})\times$$

$$\int\limits_0^{t^{(n-2)}} \int\limits_V G(\vec{r}^{(n-2)},\vec{r}^{(n-1)},t^{(n-2)},t^{(n-1)})L_s(\vec{r}^{(n-1)})c_0(z^{(n-1)},t^{(n-1)})\times$$

$$d\vec{r}^{(n-1)}dt^{(n-1)}...d\vec{r}\,'dt' + R_n(\vec{r},t),$$

де $R_n(\vec{r},t)$ — різниця між n–м та $(n-1)$–м членами послідовності, яку можна подати так

$$R_n(\vec{r},t) = \int\limits_0^t \int\limits_V G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')L_s(\vec{r}\,') \int\limits_0^{t'} \int\limits_V G(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',t',t'')L_s(\vec{r}\,'')...L_s(\vec{r}^{(n-1)})\times$$

$$\int\limits_0^{t^{(n-1)}} \int\limits_V G(\vec{r}^{(n-1)},\vec{r}^{(n)},t^{(n-1)},t^{(n)})L_s(\vec{r}^{(n)})c_0(z^{(n)},t^{(n)})d\vec{r}^{(n)}dt^{(n)}...d\vec{r}\,'dt'.$$

Зауважимо, що оскільки $c_0(z,t)$ і функція Гріна є неперервно диференційованими функціями, то дія на них оператора $L_s(\vec{r})$, згідно з формулою (12), зводиться до

$$L_s(\vec{r})c_0(z,t) = (D_1 - D_0)\sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(\vec{r})\Delta c_0,$$

$$L_s(\vec{r})G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t') = (D_1 - D_0)\sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(\vec{r})\Delta_r G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t'). \qquad (17)$$

Побудованій послідовності ставимо у відповідність такий ряд

$$c(\vec{r},t) \equiv c_0(z,t) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\vec{r},t). \qquad (18)$$

Твердження. *Мають місце такі обмеження:*

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} e^{-D_0 y_k^2 t} \sin(y_k z') \sin(y_k z)\right| \le u_1 < \infty; \tag{19}$$

$$|L_s(\vec{r})c_0(z,t)| \le u_2 < \infty, \quad \forall \vec{r} \in V, \ \forall t \in [0;\tau] \ (\tau < \infty). \tag{20}$$

Д о в е д е н н я. Нерівність (19) доведена в роботі [1]. Покажемо виконання умови (20). Враховуючи співвідношення (14), (17) і наступні обмеження

$$|\eta_{i1}(\vec{r})| \le 1, \quad |D_1 - D_0| \le 2D_m \quad (D_m = \max\{D_0, D_1\}), \quad |\cos y_k z| \le 1, \tag{21}$$

маємо

$$|L_s(\vec{r})c_0(z,t)| \le 2D_m n_1 \frac{c_*}{z_0}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left|y_k e^{-D_0 y_k^2 t}\right|\right].$$

Оскільки має місце відома границя $\lim\limits_{|z|\to\infty} z^a e^{-z} = 0$ ($a \equiv const$), то за критерієм Коші ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k e^{-D_0 y_k^2 t}$ є абсолютно збіжним. Тоді, за ознакою Вейєрштрасса рівномірної збіжності ряду [4], ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k e^{-D_0 y_k^2 t} \cos y_k z$ є абсолютно і рівномірно збіжним. Тоді послідовність часткових сум є абсолютно і рівномірно збіжною. Оскільки збіжна послідовність у метричному просторі є обмеженою [4], тоді є обмеженим і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k e^{-D_0 y_k^2 t} \cos y_k z \le U$. Маємо

$$|L_s(\vec{r})c_0(z,t)| \le 2D_m n_1 \frac{c_*}{z_0}[1 + 2U] = u_2.$$

Теорема 1. *Ряд* (18) *є абсолютно та рівномірно збіжним.*

Д о в е д е н н я. Оскільки справедливі співвідношення (17), (20), маємо

$$|R_n| \le u_2 \left|\int_0^t \int_V G(\vec{r}, \vec{r}\,', t, t') L_s(\vec{r}\,') ... \ L_s(\vec{r}^{(n-1)}) \times\right.$$

$$\left.\int_0^{t^{(n-1)}} \int_V G(\vec{r}^{(n-1)}, \vec{r}^{(n)}, t^{(n-1)}, t^{(n)}) dr^{(n)} dt^{(n)} ... d\vec{r}' dt'\right|.$$

З урахуванням нерівностей (20), (21) одержимо

$$|R_n| \le 2D_m n_1 u_2 \left|\int_0^t \int_V G(\vec{r}, \vec{r}\,', t, t') L_s(\vec{r}\,') ... \int_0^{t^{(n-1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{D_0 t_n}} \times\right.$$

$$\left.\exp\left\{-\frac{(x^{(n-1)} - x^{(n)})^2}{4D_0 t_n}\right\} dx^{(n)} dt^{(n)} ... d\vec{r}' dt'\right|,$$

де $t_n = t^{(n-1)} - t^{(n)}$. Інтегруючи за змінними $x^{(n)}$, $t^{(n)}$, отримаємо

$$|R_n| \le 4D_m n_1 u_2 \pi U \left|\int_0^t \int_V G(\vec{r}, \vec{r}\,', t, t') L_s(\vec{r}\,') ... L_s(\vec{r}^{(n-2)}) \times\right.$$

$$\left.\int\limits_0^{t^{(n-2)}}\int\limits_V G(\vec{r}^{(n-2)},\vec{r}^{(n-1)},t^{(n-2)},t^{(n-1)})t^{(n-1)}d\vec{r}^{(n-1)}dt^{(n-1)}...d\vec{r}'dt'\right|.$$

Повторюючи вище наведену процедуру $n-1$ разів, одержимо

$$|R_n|\le u_2\left[4D_m n_1\pi U\right]^{n-1}\left|\int\limits_0^t\int\limits_V G(\vec{r},\vec{r}',t,t')\frac{(t')^{n-1}}{(n-1)!}d\vec{r}'dt'\right|.$$

Враховуючи нерівність (19), отримаємо наступну оцінку

$$|R_n(\vec{r},t)|\le u_1u_2\frac{(2\pi t)^n}{n!}\left[2D_m n_1 U\right]^{n-1}.$$

Оскільки мажорантний ряд з додатним загальним членом $[2D_m n_1 U]^{n-1}\times u_1u_2(2\pi t)^n/n!$ збігається при $n\to\infty$ для довільних значень u_1, u_2, U, D_m, n_1, t, то послідовність часткових сум ряду (18) $\left\{c^{(n)}(\vec{r},t)\right\}$ за ознакою Вейєрштрасса є абсолютно і рівномірно збіжною при $n\to\infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty}c^{(n)}(\vec{r},t)=c(\vec{r},t).$$

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. *Функція* $c(\vec{r},t)=c_0(z,t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}R_n(\vec{r},t)$ *є розв'язком інтегро-диференціального рівняння* (13).

Доведення теореми базується на безпосередній підстановці функції $c(\vec{r},t)$, яка представляє собою ряд (18), у рівняння (13).

3. Усереднення наближеного розв'язку. Для знаходження середнього за ансамблем конфігурацій фаз поля концентрації обмежимося першими двома членами ряду (18), тобто $c(\vec{r},t)\approx c^{(1)}(\vec{r},t)$. Усереднюємо одержаний вираз для рівномірного розподілу включень в області тіла з густиною функції розподілу $1/V$ (V — об'єм тіла). Оскільки $c_0(z,t)$ є невипадковою функцією, то $\langle c_0(z,t)\rangle_{conf}=c_0(z,t)$. Усереднимо за ансамблем конфігурацій фаз вираз

$$I=\int\limits_0^t\int\limits_V G(\vec{r},\vec{r}',t,t')L_s(\vec{r}')c_0(z',t')d\vec{r}'dt'.$$

Тут випадковими величинами є радіус–вектори центрів включень. Врахуємо, що

$$\eta_{ij}(\vec{r}')=\begin{cases}1, & \vec{r}'\in\Omega_{ij}\\ 0, & \vec{r}'\notin\Omega_{ij}\end{cases}=\begin{cases}1, & |\vec{r}'-\vec{r}_{ij}|\in[0;R_j]\\ 0, & |\vec{r}'-\vec{r}_{ij}|\notin[0;R_j]\end{cases}=\eta_{ij}\left(|\vec{r}'-\vec{r}_{ij}|\right), \qquad (22)$$

де $\vec{r}_{ij}$ — радіус–вектор центра включення Ω_{ij}, R_j — характерний радіус волокон сорту j. Оскільки під інтегралом від $\vec{r}_{ij}$ залежить тільки функція $\eta_{ij}\left(|\vec{r}'-\vec{r}_{ij}|\right)$ і немає інших членів з індексом i, то решта множників та знак суми можна винести за знак середнього:

$$\langle I\rangle_{conf}=(D_1-D_0)\int\limits_0^t\int\limits_V\left(G(\vec{r},\vec{r}',t,t')\frac{\partial^2c_0}{\partial z'^2}\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n_1}\int\limits_V\eta_{i1}(\vec{r}')d\vec{r}_{i1}\right)d\vec{r}'dt'.$$

Враховуючи (22) та властивості функції η_{ij}, одержимо

$$\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{n_1}\int_V \eta_{i1}(\vec{r}\,')d\vec{r}_{i1} = \begin{cases} \dfrac{1}{V}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}\pi R_1^2 = v_1, & z' \in [0; R_1] \\ \dfrac{1}{V}\displaystyle\sum_{i=1}^{n_1}\dfrac{1}{2}\pi R_1^2 = \dfrac{1}{2}v_1, & z' \in]R_1; z_0 - R_1] \end{cases}.$$

Тоді після осереднення одержимо

$$\langle I\rangle_{conf} = v_1(D_1 - D_0)\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{R_1} G\frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2}dz' + \int_{R_1}^{z_0-R_1}\frac{1}{2}G\frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2}dz'\right]dx'dt'. \quad (23)$$

Підставляючи у формулу (23) вирази для концентрації в однорідному тілі (14) та функції Ґріна (15), остаточно отримаємо

$$\frac{1}{c_*}\langle c(z,t)\rangle_{conf} \approx 1 - \frac{z}{z_0} - \frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{y_n}e^{-D_0 y_n^2 t}\sin y_n z +$$

$$2v_1\pi\frac{D_1 - D_0}{D_0 z_0^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{kn}\frac{y_n\sin(y_k z)}{y_k^2 - y_n^2}\left[e^{-D_0 y_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t}\right],$$

де $y_1 = y_n - y_k$, $\quad y_2 = y_n + y_k$,

$$A_{kn} = \frac{1}{y_1}\sin\left(y_1\frac{z_0}{2}\right)\cos\left(y_1\frac{z_0 - 2R_1}{2}\right) - \frac{1}{y_2}\sin\left(y_2\frac{z_0}{2}\right)\cos\left(y_2\frac{z_0 - 2R_1}{2}\right).$$

4. Висновки. Підхід, запропонований у роботах [8–11], застосовано для знаходження усереднених концентрацій в шарі з випадково розподіленими волокнистими включеннями. При цьому за допомогою теорії узагальнених функцій вихідна контактна задача зведена до рівняння дифузії для тіла в цілому, якому поставлене у відповідність інтегродиференціальне рівняння. Доведено абсолютну та рівномірну збіжність розв'язку відповідного інтегродиференціального рівняння методом послідовних наближень. Розв'язок задачі у формі інтегрального ряду спрощує процедуру усереднення концентрації за ансамблем конфігурацій фаз. При необхідності враховування більше ніж двох членів ряду (18), потрібно знати функцію кореляції неоднорідностей, а не коваріацію коефіцієнта дифузії та випадкового поля концентрації при усередненні вихідного рівняння.

Для подальших досліджень представляє інтерес знаходження усереднених полів концентрації домішкової речовини для інших функцій розподілу неоднорідностей, наприклад, ймовірнісному бета–розподілу, який відповідає знаходженню волокон біля однієї з поверхонь шару.

1. *Бурак Я. Й., Чернуха О. Ю., Мороз Г. І.* Про умови коректності одного класу крайових задач масопереносу домішкової речовини двома шляхами// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 26, № 3. – С. 77-84.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 527 с.
3. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 303 с.
4. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа: В 2-х т. – М.: Высш. шк., 1981. – Т.1. – 687 с.; Т.2. – 584 с.
5. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – М.:Высшая школа, 1978. – 463 с.
6. *Любов Б. Я.* Диффузионные процессы в неоднородных телах. – М.: Наука, 1976. – 527 с.

7. *Хорошун Л. П., Солтанов Н. С.* Термоупругость двухкомпонентных смесей. – Киев: Наук. думка, 1984. – 112 с.
8. *Чернуха О.Ю.* Про вертикальну дифузію домішки у багатофазному стохастично–неоднорідному шарі// Мат. методи і фіз.–мех. поля. – 2000. – 43, № 3. – С. 140–145.
9. *Чернуха О. Ю.* Про один підхід до побудови розв'язків крайових задач дифузії у багатофазних випадково-неоднорідних шаруватих тілах// Доповіді НАН України. – 2001. – № 9. – С. 37–42.
10. *Chaplia Y., Chernukha O.* Admixture diffusion in a two–phase random nonhomogeneous stratified layer// J. Theor. and Appl. Mechanics. – 2001. – 39, № 4. – P. 929–946.
11. *Chernukha O.* On diffusion processes in a two–phase random nonhomogeneous stratified semispace// Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2001. – 44. – P. 2535–2539.
12. *Lydzba D.* Homogenisation theories applied to porous media mechanics// J. Theor. and App. Mechanics. – 1998. – 36, № 3. – P. 657–679.
13. *Matysiak S. J., Mieszkowski R.* On homogenisation of diffusion processes in microperiodic stratified bodies// Int. J. Heat Mass Transfer. – 1999. – 26. – P. 539–547.

ДИФФУЗИЯ ПРИМЕСИ В СЛУЧАЙНО НЕОДНОРОДНОМ ВОЛОКНИСТОМ СЛОЕ

Рассмотрена диффузия примесного вещества в слое, состоящем из двух различных по диффузионным свойствам фаз–матрицы и случайно расположенных включений типа волокон. На межфазных границах выполняются условия неидеального массового контакта. Контактно–краевая задача сведена к нелинейному интегродифференциальному уравнению, которое решается методом последовательных приближений. Доказана сходимость ряда Неймана для этого случая. Найдена приближенная формула для усредненной по ансамблю конфигураций фаз концентрации.

ADMIXTURE DIFFUSION IN A RANDOMLY NONHOMOGENEOUS FIBROID LAYER

Admixture diffusion has been considered in a layer formed by two phases being different by diffusive properties: matrix and fibroid inclusions disposed randomly. The conditions of nonideal mass contact are imposed on interphases. The contact initial–boundary value problem is reduced to the non–linear integrodifferential equarion, which has been solved by the method of succesive iterations. Convergence of Neumann series has been proved for this case. The approximated formula is found for concentration averaged over ensemble of phase configurations.

Центр математичного моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
16.04.03