УДК 517.5

М. В. Заболоцький, З. М. Шеремета

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ ІНДЕКСУ ЦІЛОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Для $l(x) \equiv const > 1$ досліджено обмеженість l-індексу цілого розв'язку диференціального рівняння $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$.

Вступ. Нехай $\mathbb{D}_R = \{z : |z| < R\}$ і $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1$. С.Шах [1] вказав умови на дійсні коефіцієнти $\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, g_2$, за яких диференціальне рівняння

$$z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0 \tag{1}$$

має цілий розв'язок $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ такий, що коефіцієнти a_n визначаються одночленною рекурентною формулою, функція f разом з усіма своїми похідними є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і $\ln M_f(r) = (1 + o(1))|\beta_0|r$, $r \to \infty$, де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Значно складніший випадок, коли a_n визначаються двочленною рекурентною формулою, вивчено в [2—3]. Зокрема, в [3] доведено наступний результат.

Теорема А. *Нехай* $\beta_1 = -1$, $\gamma_2 = 0$, $-\dfrac{2}{3} \le \beta_0 \le \gamma_0 < 0$ *і* $\gamma_1 = \dfrac{1}{2}\left(|\beta_0| + \sqrt{|\beta_0|^2 + 4|\gamma_0|}\right) \le \dfrac{3}{2}|\beta_0|$. *Тоді існує цілий розв'язок*

$$f(z) = \frac{1}{\gamma_1} + z + \frac{z^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

диференціального рівняння (1), *який разом з усіма своїми похідними є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями і правильна асимптотична рівність*

$$\ln M_f(r) = \frac{(1 + o(1))}{2}(|\beta_0| + \sqrt{|\beta_0|^2 + 4|\gamma_0|})r, \quad r \to +\infty. \tag{3}$$

Для додатної неперервної на $[0, +\infty)$ функції l ціла функція f називається функцією обмеженого l-індексу [4, с. 5], якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : 0 \le k \le N\right\}. \tag{4}$$

Найменше з таких чисел N називається l-індексом і позначається через $N(f, l)$. У випадку, коли $l(x) \equiv 1$, звідси отримуємо означення індексу $N(f)$ цілої функції f, введене Б. Лепсоном [5].

Якщо $G \subset \mathbb{C}$ та існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що нерівність (4) правильна для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$, то f називатимемо функцією обмеженого l-індексу на (або в) G, а l-індекс позначатимемо через $N(f, l; G)$. Добре відомо [4, с. 93], що якщо $g_0, g_1, \ldots, g_n$ і h — поліноми такі, що $\deg g_j \le \deg g_0$, $1 \le j \le n$, а ціла функція f є розв'язком рівняння $g_0(z)w^{(n)} + g_1(z)w^{(n-1)} + \cdots + g_n(z)w = h(z)$, то f є функцією обмеженого індексу. Звідси випливає, що кожний цілий розв'язок диференціального рівняння (1) є функцією обмеженого індексу.

У даній роботі ми досліджуватимемо обмеженість l-індексу цілої функції (2).

1. Обмеженість l-індексу в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Наступна теорема доповнює теорему А.

Теорема 1. *Якщо коефіцієнти диференціального рівняння* (1) *задовольняють умови теореми A, то функція* (2) *є обмеженого* l *-індексу в* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ *з* $l(x)\equiv 3$, *причому* $N(f,3;\mathbb{C}\setminus\mathbb{D})\leq 1$.

Д о в е д е н н я. Оскільки f є розв'язком рівняння (1), то для $|z|\geq 1$

$$\begin{gathered}\frac{|f''(z)|}{2!3^2}\leq\frac{1}{6}\left|\beta_0+\frac{\beta_1}{z}\right|\frac{|f'(z)|}{1!3}+\frac{1}{18}\left|\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}\right||f(z)|\leq\\ \frac{|\beta_0|+1}{6}\frac{|f'(z)|}{1!3}+\frac{|\beta_0|+1}{18}|f(z)|\leq\max\left\{\frac{|f'(z)|}{1!3},|f(z)|\right\}.\end{gathered}\tag{5}$$

Підставляючи f в (1) і диференціюючи один раз, отримуємо

$$\begin{gathered}z^2f'''(z)+\{\beta_0z^2+(\beta_1+2)z\}f''(z)+\\ \{\gamma_0z^2+(\gamma_1+2\beta_0)z+\gamma_2+\beta_1\}f'(z)+\{2\gamma_0z+\gamma_1\}f(z)\equiv 0,\end{gathered}$$

звідки, як вище, для $|z|\geq 1$ одержуємо

$$\begin{gathered}\frac{|f'''(z)|}{3!3^3}\leq\frac{|\beta_0|+1}{9}\frac{|f''(z)|}{2!3^2}+\frac{|\gamma_0|+2|\beta_0|+2}{54}\frac{|f'(z)|}{1!3}+\frac{2|\gamma_0|+1}{162}|f(z)|\leq\\ \left(\frac{1}{3}+\frac{5}{24}+\frac{1}{16}\right)\max\left\{\frac{|f''(z)|}{2!3^2},\frac{|f'(z)|}{1!3},|f(z)|\right\}<\\ \max\left\{\frac{|f''(z)|}{2!3^2},\frac{|f'(z)|}{1!3},|f(z)|\right\}.\end{gathered}\tag{6}$$

Якщо ж продиференціюємо $m\geq 2$ раз, то

$$\begin{gathered}z^2f^{(m+2)}(z)+\{\beta_0z^2+(\beta_1+2m)z\}f^{(m+1)}(z)+\\ \{\gamma_0z^2+(2m+\gamma_1)z+m(m-1)+m\beta_1+\gamma_2\}f^{(m)}(z)+\\ \{2m\gamma_0z+m(m-1)\beta_0+m\gamma_1\}f^{(m-1)}(z)+m(m-1)\gamma_0f^{(m-2)}(z)\equiv 0,\end{gathered}$$

звідки для $|z|\geq 1$ отримуємо

$$\begin{gathered}\frac{|f^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!3^{m+2}}\leq\frac{|\beta_0|+2m-1}{3(m+2)}\frac{|f^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!3^{m+1}}+\\ \frac{|\beta_0|+2m|\beta_0|+1+m(m-1)-m}{3^2(m+2)(m+1)}\frac{|f^{(m)}(z)|}{(m)!3^m}+\\ \frac{2|\beta_0|+(m-1)|\beta_0|+1}{3^3(m+2)(m+1)}\frac{|f^{(m-1)}(z)|}{(m-1)!3^{m-1}}+\frac{|\beta_0|}{3^4(m+2)(m+1)}\frac{|f^{(m-2)}(z)|}{(m-2)!3^{m-2}}\leq\\ Q_m\max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!3^j}:\,m-2\leq j\leq m+1\right\},\end{gathered}$$

де

$$\begin{gathered}Q_m=\frac{2m}{3(m+2)}+\frac{m^2+2}{9(m+2)(m+1)}+\frac{m+2}{27(m+2)(m+1)}+\frac{1}{81(m+2)(m+1)}=\\ \frac{63m^2+57m+25}{81m^2+243m+162}<1,\end{gathered}$$

тобто для всіх $m\geq 2$ та $|z|\geq 1$ маємо нерівність

$$\frac{|f^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!3^{m+2}}\leq\max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!3^j}:\,m-2\leq j\leq m+1\right\}.\tag{7}$$

З (7) випливає, що для $n \geq 4$ і $|z| \geq 1$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!3^n} \leq \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!3^j} : 0 \leq j \leq n-1\right\},$$

звідки, зокрема,

$$\frac{|f^{(4)}(z)|}{4!3^4} \leq \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!3^j} : 0 \leq j \leq 3\right\},$$

а якщо $n > 4$, то

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!3^n} \leq \max\left\{\frac{|f^{(n-1)}(z)|}{(n-1)!3^{n-1}}, \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!3^j} : 0 \leq j \leq n-2\right\}\right\} =$$
$$\max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!3^j} : 0 \leq j \leq n-2\right\} = \cdots = \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!3^j} : 0 \leq j \leq 3\right\}.$$

Використовуючи (6) і (5), цей процес можна продовжити і отримати нерівності

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!3^n} \leq \max\left\{\frac{|f''(z)|}{2!3^2}, \frac{|f'(z)|}{3}, |f(z)|\right\} \leq \max\left\{\frac{|f'(z)|}{3}, |f(z)|\right\},$$

для всіх $|z| \geq 1$ і $n \geq 0$, тобто $N(f, 3; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}) \leq 1$. Теорему 1 доведено.

2. Обмеженість l-індексу в $\overline{\mathbb{D}}$. Використовуючи методику У.Хеймана [6], спочатку отримаємо оцінку $M_f(r)$ зверху, дещо гіршу, ніж (3), але для всіх $r \geq 0$.

Лема 1. *За умов теореми A для функції* (2) *і* $r \geq 0$

$$M_f(r) \leq G(1)e^{6(r-1)^+}, \quad G(1) = \max\{f(1), f'(1)/3\}. \tag{8}$$

Справді [3], функція (2) має додатні тейлорові коефіцієнти і, отже, $M_f(r)$= $f(r)$, а за теоремою 1

$$\frac{f^{(n)}(r)}{n!3^n} \leq G(r) := \max\left\{\frac{f'(r)}{3}, f(r)\right\}, \quad r \geq 1. \tag{9}$$

Функція G неперервна і кусково неперервно диференційована, а з огляду на (9) не перетворюється в 0 на $[1, +\infty)$. Отже, для всіх $r \geq 1$, за винятком множини міри нуль,

$$G'(r) \leq \max\left\{\frac{f''(r)}{3}, f'(r)\right\} \leq \max\left\{6\frac{f''(r)}{2!3^2}, 3\frac{f'(r)}{3}\right\} \leq 6G(r).$$

Звідси випливає, що $G(r) \leq G(1)e^{6(r-1)}$ для $r \geq 1$ і, отже,

$$M_f(r) = f(r) \leq G(r) \leq G(1)e^{6(r-1)}, \quad r \geq 1,$$

тобто для $r \geq 1$ нерівність (8) доведено. Якщо ж $0 \leq r \leq 1$, то $M_f(r) = f(r) \leq f(1) \leq G(1)e^0$, тобто знову маємо (8). Лему 1 доведено.

Ми будемо використовувати також наступну лему з [7].

Лема 2. *Якщо f — ціла функція і $f(0) \neq 0$, то для будь-яких $z \in \mathbb{D}_R$ і $N \in \mathbb{Z}_+$*

$$|f(0)| \leq M_f(R)(|z|/R)^{N+1} + 2e^{2R} \max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \leq k \leq N\}.$$

Теорема 2. *Якщо коефіцієнти диференціального рівняння* (1) *задовольняють умови теореми* A, *то функція* (2) *є обмеженого* l*-індексу в* $\overline{\mathbb{D}}$ *з* $l(x) \equiv 3$, *причому* $N(f, 3; \overline{\mathbb{D}}) \le \max\{N, P\}$, *де*

$$N = [\{6 + \ln(G(1)|\gamma_1|)\}/\ln 2] + 1, \tag{10}$$

$$P = [\{18 + N \ln 3 + \ln N! + \ln(G(1)|\gamma_1|)\}/\ln 6] + 1. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я. Якщо приймемо $R = 2$, то з леми 2 і з (8) для $|z| \le 1$ отримаємо $|f(0)| \le G(1)e^6(1/2)^{N+1} + 2e^4 \max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \le k \le N\}$ і якщо N таке, що $G(1)e^6(1/2)^{N+1} \le |f(0)|/2$, то $\max\{|f^{(k)}(z)| : 0 \le k \le N\} \ge |f(0)|/(4e^4)$. Отже, зауваживши, що для функції (2) $f(0) = 1/\gamma_1$, для визначеного в (10) значення N маємо

$$\max_{0\le k\le N} \frac{|f^{(k)}(z)|}{k!3^k} \ge \frac{1}{N!3^N} \max_{0\le k\le N} |f^{(k)}(z)| \ge \frac{1}{|\gamma_1|4N!3^N e^4}. \tag{12}$$

З іншого боку, за нерівністю Коші для кожного $|z| \le 1$

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!3^p} \le \frac{M_f(3)}{2^p 3^p} \le \frac{G(1)e^{12}}{6^p}. \tag{13}$$

З (11) випливає, що $G(1)e^{12}/6^p \le 1/(|\gamma_1|4N!3^N e^4)$, а з (12) і (13) отримуємо

$$\frac{|f^{(p)}(z)|}{p!3^p} \le \max_{0\le k\le N} \frac{|f^{(k)}(z)|}{k!3^k}$$

для всіх $z \in \overline{\mathbb{D}}$ і $p \ge P$. Звідси випливає, що $N(f, 3; \overline{\mathbb{D}}) \le \max\{N, P\}$. Теорему 2 доведено.

Об'єднуючи теореми 1 і 2, отримуємо наступну теорему.

Теорема 3. *Якщо коефіцієнти диференціального рівняння* (1) *задовольняють умови теореми* A, *то функція* (2) *є обмеженого* l*-індексу з* $l(x) \equiv 3$ *і* $N(f, 3) \le \max\{N, P\}$, *де* N *і* P *визначаються рівностями* (10)–(11).

3. Зауваження і доповнення. В [2] доведена наступна теорема.

Теорема Б. *Нехай коефіцієнти диференціального рівняння* (1) *задовольняють одну з умов:*

1) $\beta_0 = -1, \quad \beta_1 \ge \sqrt{2} - 1, \quad -\dfrac{1}{1+\beta_1} < \gamma_0 < 0, \quad -\beta_1 \le \gamma_1 < 0, \quad \gamma_2 = 0$;

2) $\beta_0 = -1, \quad 0 < \beta_1 < \sqrt{2} - 1, \quad -\alpha_1 \le \gamma_0 < 0, \quad -\beta_1 \le \gamma_1 < 0, \quad \gamma_2 = 0$;

3) $-1 < \beta_0 < 0, \quad \beta_1 \ge \sqrt{2} - 1, \quad \dfrac{\beta_0}{1+\beta_1} < \gamma_0 < 0, \quad -(1+\beta_0+\beta_1) \le \gamma_1 < 0,$ $\gamma_2 = 0$;

4) $-1 < \beta_0 < 0, \quad 0 < \beta_1 < \sqrt{2}-1, \quad \alpha_1\beta_0 \le \gamma_0 < 0, \quad -(1+\beta_0+\beta_1) \le \gamma_1 < 0,$ $\gamma_2 = 0$, *де* $\alpha_1 = \dfrac{\beta_1^2 - (2\sqrt{2}-1)\beta_1 + 2(\sqrt{2}-1)}{\beta_1^2 - (3\sqrt{2}-2)\beta_1 + 1}$.

Тоді існує цілий розв'язок

$$f(z) = -\frac{\beta_1}{\gamma_1} + z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{14}$$

рівняння (1), *який разом з усіма своїми похідними є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями і правильна асимптотична рівність* (3).

Подібно до доведення теореми 1 можна показати, що якщо виконується одна з умов 1) – 4) теореми Б, то для функції (14) правильні нерівності

$N(f, 3+\beta_1; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}) \le 1$ за умов 1) та 3) і $N(f, 3; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}) \le 1$ за умов 2) і 4). Тому, якщо коефіцієнти диференціального рівняння (1) задовольняють одну з умов 2), 4) теореми Б, то функція (14) є обмеженого l-індексу з $l(x) \equiv 3$ і $N(f, 3) \le \max\{N, P\}$, де N і P визначаються рівностями (10) і (11), але з $|\gamma_1/\beta_1|$ замість $|\gamma_1|$.

Якщо $N(f, 3+\beta_1; \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}) \le 1$, то як у доведенні леми 1, отримуємо оцінку $M_f(r) \le G(1)\exp\{2(3+\beta_1)(r-1)^+\}$, де $G(1) = \max\{f(1), f'(1)/(3+\beta_1)\}$, а звідси, використовуючи лему 2, неважко отримати нерівність $N(f, 3+\beta_1) \le \max\{N, P\}$, де $N = [\{2(3+\beta_1) + \ln(G(1)|\gamma_1|/|\beta_1|)\}/\ln 2] + 1$, $P = [\{4(4+\beta_1) + \ln 4 + N\ln(3+\beta_1) + \ln N! + \ln(G(1)|\gamma_1|/|\beta_1|)\}/\ln(2(3+\beta_1))] + 1$.

1. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II // J. Math. anal. and appl. – 1989. – V. 142. – P. 422–430.
2. *Шеремета З.М.* О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 8. – С. 1045–1050.
3. *Шеремета З.М.* Близькість до опуклості цілого розв'язку одного диференціального рівняння // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, № 3. – С. 31–35.
4. *Sheremeta M.M.* Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publishers. – 1999. – 141 p.
5. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index // Proc. Sympos. Pure Math., V.2. Amer. Math. Soc., Providence, Phode Island. – 1968. – P. 298–307.
6. *Hayman W.K.* Differential inequalities and local valency // Pacif. J. Math. – 1973. – V.4. – P. 117–137.
7. *Shah S.M.* Entire solutions of linear differential equations and bounds for growth and index numbers // Proc. of the Royal Soc of Edinburg. – 1983. – V. A94. – P. 49–60.

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ИНДЕКСА ЦЕЛОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Для $l(x) \equiv const > 1$ исследована ограниченность l-индекса целого решения дифференциального уравнения $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$.

ON THE INDEX BOUNDEDNESS OF AN ENTIRE SOLUTION OF A DIFFERENTIAL EQUATION

For $l(x) \equiv const > 1$ the l-index boundedness of an entire solution of the differential equation $z^2w'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)w' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)w = 0$ is investigated.

Львівський національний
університет ім. І. Франка,
Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано
18.06.03