УДК 517.927

О. В. Махней

РОЗВИНЕННЯ ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ СИНГУЛЯРНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Асимптотичні формули для великих значень параметра розв'язків сингулярного диференціального рівняння дозволяють оцінити функцію Ґріна крайової задачі. За допомогою цієї оцінки побудовано розвинення за власними функціями сингулярного диференціального оператора у випадку простих власних значень.

Вступ. Лінійні диференціальні оператори, породжені диференціальними виразами з гладкими коефіцієнтами, вивчено в літературі досить добре (див., наприклад, [5]). Останнім часом появилось чимало результатів, які тією чи іншою мірою узагальнюють дослідження спектральних властивостей цих операторів. Зокрема, можна згадати представників львівської [7] і київської [2] математичних шкіл, які досягли значних успіхів на цьому ґрунті. Обширну бібліографію щодо диференціальних операторів із сингулярностями можна знайти в [1].

Слід зазначити, що спряжені диференціальні вирази містять доданки вигляду $(p(x)y)^{(n)}$, які при недостатній гладкості коефіцієнта $p(x)$ не можна звести n-кратним диференціюванням до звичайних диференціальних. Їх прийнято називати квазідиференціальними. Одним з найдавніших способів їх дослідження є метод введення квазіпохідних [10]. (Квазіпохідні – це компоненти вектора, за допомогою якого здійснюється зведення квазідиференціального рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку.)

Розглянемо диференціальний вираз

$$l_n(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y,$$

де $p_1(x) \equiv 0$, $p_i = q_i'$, $q_i \in \mathrm{BV}^+[a,b]$, $i = \overline{2,n}$ (під $\mathrm{BV}^+[a,b]$ тут розуміємо простір неперервних справа функцій обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації). Штрих означає узагальнене диференціювання, а, отже, $p_i(x)$ – міри [9]. Функції $p_i(x)$, $q_i(x)$ вважатимемо комплекснозначними.

Квазіпохідні в сенсі спряженого до $l_n(y)$ квазідиференціального виразу

$$l_n^*(y) \equiv (-1)^n y^{(n)} + \sum_{j=2}^{n} (-1)^{n-j} (\bar{p}_j y)^{(n-j)}$$

(тут риска зверху означає комплексне спряження) визначаються формулами [8] $y^{\{0\}} \overset{df}{=} y$, $y^{\{i\}} = \bar{p}_i y - (y^{\{i-1\}})'$, $i = \overline{1,n}$.

Сформулюємо таку крайову задачу:

$$l_n(y) = \lambda y, \tag{1}$$

$$U_\nu(y) = \alpha_\nu y^{(k_\nu)}(a) + \beta_\nu y^{(k_\nu)}(b) + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \left[\alpha_{\nu j} y^{(j)}(a) + \beta_{\nu j} y^{(j)}(b) \right] = 0, \quad \nu = \overline{1,n}, \tag{2}$$

де λ – комплексний параметр, $n-1 \ge k_1 \ge k_2 \ge \ldots \ge k_n \ge 0$, $k_{s+2} < k_s$, $|\alpha_\nu| + |\beta_\nu| > 0$.

Рівняння (1) шляхом введення вектора $Y = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^T$ зводиться до системи диференціальних рівнянь першого порядку $Y' = C'(x)Y$, яка є коректною [8] внаслідок тотожності $[\Delta C(x)]^2 \equiv [C(x) - C(x-0)]^2 \equiv 0$, що виконується за рахунок $p_1(x) \equiv 0$ (взагалі кажучи, достатньо вимоги $\Delta q_1(x) \equiv 0$).

Можна довести [8], що розв'язок рівняння (1) з початковими умовами $y^{(\nu)}(a) = c_\nu$, $\nu = \overline{0, n-1}$, існує і є єдиним у класі абсолютно неперервних на $[a,b]$ функцій, $y^{(k)} \in \mathrm{AC}[a,b]$, $k = \overline{1, n-2}$, $y^{(n-1)} \in \mathrm{BV}^+[a,b]$ (тут $\mathrm{AC}[a,b]$ позначає простір абсолютно неперервних на проміжку $[a,b]$ функцій). Аналогічно, існує єдиний абсолютно неперервний розв'язок рівняння $l_n^*(y) = \bar{\lambda} y$ з початковими умовами $y^{\{\nu\}}(a) = \tilde{c}_\nu$, $\nu = \overline{0, n-1}$, а $y^{\{k\}} \in \mathrm{BV}^+[a,b]$, $k = \overline{1, n-1}$.

Диференціальний вираз $l_n(y)$ і крайові умови (2) породжують диференціальний оператор L з областю визначення

$$D(L) = \Big\{ y(x) : y^{(k)} \in \mathrm{AC}[a,b],\ k = \overline{0, n-2},\ y^{(n-1)} \in \mathrm{BV}^+[a,b],\ U_\nu(y) = 0,\ \nu = \overline{1,n} \Big\},$$

який діє з простору $\mathrm{BV}^+[a,b]$ у простір мір.

У цій статті побудову розвинення за власними функціями здійснимо за схемою, аналогічною до випадку диференціального рівняння з гладкими коефіцієнтами, однак при цьому суттєво використаємо асимптотичні формули лінійно незалежної системи розв'язків рівняння [3] і властивості функції Ґріна [4], при встановленні яких (як і при доведенні теореми 3) довелось подолати деякі специфічні труднощі, пов'язані з наявністю δ-функцій у коефіцієнтах.

1. Регулярні крайові умови. Нехай ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n – усі різні корені n-го степеня з -1.

Означення. Для n непарного ($n = 2\mu - 1$) крайові умови (2) назвемо *регулярними* для задачі (1), (2), якщо числа θ_0 і θ_1, що визначаються співвідношенням

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{k_1} & \cdots & \alpha_1 \omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \beta_1 \omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \beta_1 \omega_n^{k_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & \beta_2 \omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \beta_2 \omega_n^{k_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n \omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n \omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & \beta_n \omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \beta_n \omega_n^{k_n} \end{vmatrix}, \quad (3)$$

є відмінними від нуля. Для n парного ($n = 2\mu$) нормовані крайові умови (2) назвемо *регулярними* для цієї задачі, якщо будуть відмінними від нуля числа θ_{-1} і θ_1, що визначаються рівністю $\theta_{-1}/s + \theta_0 + \theta_1 s = D$, де визначник D відрізняється від попереднього тим, що $(\mu+1)$-й стовпець у ньому складається з елементів $(\alpha_j + \beta_j/s)\omega_{\mu+1}^{k_j}$, $j = \overline{1,n}$.

2. Оцінка функції Ґріна. Будемо вважати, не втрачаючи загальності, що $Ly = 0$ лише при $y = 0$. Дійсно, в протилежному випадку досить замінити $l_n(y)$ виразом $l_n(y) - cy$, де c – довільне число, відмінне від усіх власних значень крайової задачі (1), (2). Таке число існує, оскільки асимптотичні формули [3] свідчать, що крайова задача (1), (2) має лише зліченну множину власних значень. Нехай всі власні значення крайової задачі (1), (2) є простими, оператор L має функцію Ґріна $G(x,s) = G(x,s,0)$.

Покладемо тепер $\lambda = -\rho^n$ і розіб'ємо всю комплексну ρ-площину на $2n$ секторів S_q, $q = \overline{0, 2n-1}$, де $S_q = \{\rho_k : q\pi/n \le \arg\rho \le (q+1)\pi/n\}$. Через T_q позначимо сектор з вершиною в точці $\rho = -c$, що утворюється з S_q шляхом зсуву $\rho \to \rho + c$.

Розглянемо в комплексній λ-площині послідовність кіл Γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, зі спільним центром у початку координат, що мають наступні властивості: ***1***) радіус R_k кола Γ_k необмежено зростає при $k \to \infty$; ***2***) існує додатне число δ, таке, що прообрази ρ_k в $S_0 \cup S_1$ власних значень крайової задачі (1), (2) при відображенні $\lambda = -\rho^n$ розміщені для досить великих k на відстані, не меншій ніж δ, від прообразів кожного з кіл Γ_k.

Розглянемо також інтеграл $I_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k} \frac{G(x,s,\lambda)}{\lambda} d\lambda$, застосувавши до якого теорему про лишки, отримаємо

$$I_k = G(x,s) + \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{Q_\nu(x,s)}{\lambda_\nu}, \tag{4}$$

де $Q_\nu(x,s)$ – лишок функції $G(x,s,\lambda)$ відносно її полюса λ_ν (який припускаємо простим), а m_k – число цих полюсів у крузі Γ_k.

Теорема 1. *У випадку регулярних крайових умов на колах* Γ_k *функція* $G(x,s,\lambda)$ *задовольняє нерівність*

$$|G(x,s,\lambda)| \le M|\lambda|^{\frac{1-n}{n}}, \tag{5}$$

де M *– деяка стала.*

Д о в е д е н н я здійснимо за схемою, запропонованою в [5, с. 93–97]. За відповідного вибору $\arg\rho$ при відображенні $\lambda = -\rho^n$ коло Γ_k переходить у дугу γ_k кола з центром у початку координат і центральним кутом $2\pi/n$, що проходить у двох сусідніх областях S_0, S_1 комплексної ρ-площини.

Розглянемо випадок непарного n, $n = 2\mu - 1$. Нехай числа ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n занумеровано так, що для $\rho \in S_0$ виконується ланцюг нерівностей $\mathrm{Re}\,(\rho\omega_1) \le \le \mathrm{Re}(\rho\omega_2) \le \ldots \le \mathrm{Re}(\rho\omega_n)$ (див. [5, с. 53]). Тоді можна показати [5, с. 75], що при $\rho \in S_0$

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_1) \le 0,\ \ldots,\ \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu-1}) \le 0,\ \mathrm{Re}(\rho\omega_{\mu+1}) \ge 0,\ \ldots,\ \mathrm{Re}(\rho\omega_n) \ge 0. \tag{6}$$

Нехай γ_k' – та частина дуги γ_k, яка знаходиться в області S_0 і на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \le 0$, а γ_k'' – та її частина з цієї ж області, на якій $\mathrm{Re}(\rho\omega_\mu) \ge 0$. Оцінимо функцію Ґріна $G(x,s,\lambda)$ на дузі γ_k', скориставшись формулами [4]

$$G(x,s,\lambda) = (-1)^n \frac{Q(x,s,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{7}$$

де

$$Q(x,s,\lambda) = \begin{vmatrix} K(x,a,\lambda) & \cdots & K^{\{n-1\}}(x,a,\lambda) & P(x,s,\lambda) \\ U_1(K(x,a,\lambda)) & \cdots & U_1(K^{\{n-1\}}(x,a,\lambda)) & U_1(P(x,s,\lambda)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U_n(K(x,a,\lambda)) & \cdots & U_n(K^{\{n-1\}}(x,a,\lambda)) & U_n(P(x,s,\lambda)) \end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$\Delta(\lambda) = \det \left\| U_\nu(K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda) \right\|_{\nu,k=1}^{n}, \qquad P(x,s,\lambda) = \begin{cases} K(x,s,\lambda), & x > s, \\ 0, & x < s, \end{cases} \tag{9}$$

$K(x,s,\lambda)$ – функція Коші рівняння (1) (за першою змінною вона задовольняє це рівняння, крім того, $K^{(i)}(s,s) = 0$, $i = \overline{0, n-2}$, $K^{(n-1)}(s,s) = 1$).

Функції $K(x,a,\lambda)$, $K^{\{1\}}(x,a,\lambda)$, $\ldots$, $K^{\{n-1\}}(x,a,\lambda)$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (1). У той же час їх можна подати як лінійну комбінацію деякої іншої лінійно незалежної системи розв'язків (1). Нехай y_1, y_2, $\ldots$, y_n – та лінійно незалежна система розв'язків рівняння (1), для якої справджуються асимптотичні формули (див. [3])

$$y_k^{(n)} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k(x-a)}[\omega_k^\nu],\ \ \nu = \overline{0, n-1},\ \ k = 1,2,\ldots, \tag{10}$$

де $[a] = a + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Тоді $K^{\{k-1\}}(x,a,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}(\lambda) y_j(x,\lambda)$, $k = \overline{1,n}$. Внаслідок лінійності форм $U_\nu(y)$ і властивості визначників, отримаємо, що $\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)C(\lambda)$, $Q(x,s,\lambda) = \tilde{Q}(x,s,\lambda)C(\lambda)$, де $\tilde{\Delta}(\lambda) = \det \|U_\nu(y_k)\|_{\nu,k=1}^{n}$, $C(\lambda) = \det \|c_{kj}\|_{k,j=1}^{n}$, а визначник $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$ відрізняється від (8) лише тим, що замість $K(x,a,\lambda)$, $\ldots$, $K^{\{n-1\}}(x,a,\lambda)$ у ньому фігурують $y_1(x,\lambda)$, $\ldots$, $y_n(x,\lambda)$ ($P(x,s,\lambda)$ тут є тим самим, що й у (9)). Тоді формулу (7) перепишемо у вигляді

$$G(x,s,\lambda) = (-1)^n \frac{\tilde{Q}(x,s,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}. \tag{11}$$

Оцінимо спочатку $K^{(j)}(x,s,\lambda)$, $j = \overline{0,n-1}$, скориставшись асимптотичними формулами (10) і формулою про зображення функції Коші

$$K^{(j)}(x,s) = \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} y_1(s) & \cdots & y_n(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & \cdots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1^{(j)}(x) & \cdots & y_n^{(j)}(x) \end{vmatrix}, \quad W(s) = \det \left\| y_i^{(j-1)}(s) \right\|_{i,j=1}^{n},$$

де $y_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, – фундаментальна система розв'язків рівняння (1) [6]. Підставивши формули (10) замість $y_k^{(\nu)}(s)$ у вираз для $K^{(j)}(x,s,\lambda)$, розписавши чисельник за елементами останнього рядка, скоротивши в кожному з доданків чисельник і знаменник на ρ, ρ^2, $\ldots$, ρ^{n-2} і на $e^{\rho\omega_1(s-a)}$, $e^{\rho\omega_2(s-a)}$, $\ldots$, $e^{\rho\omega_n(s-a)}$, а також повторивши міркування з [5, с. 94] щодо відношення визначників, будемо мати

$$K^{(j)}(x,s,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} y_k^{(j)}(x,\lambda) z_k(s,\lambda),$$

де

$$z_k(s,\lambda) = -\frac{1}{n\rho^{n-1}} e^{-\rho\omega_k(s-a)}[\omega_k], \quad k = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Підставивши вирази (10) у нормовані форми $U_\nu(y)$, отримаємо на підставі нерівностей (6)

$$U_\nu(y_j) = \begin{cases} (\rho\omega_j)^{k_\nu}[\alpha_\nu], & j = \overline{1,\mu-1}, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu}\{[\alpha_\nu] + e^{\rho\omega_j(b-a)}[\beta_\nu]\}, & j = \mu, \\ (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j(b-a)}[\beta_\nu], & j = \overline{\mu+1,n}. \end{cases} \tag{13}$$

Тоді визначник $\tilde{\Delta}(\lambda)$ набуде вигляду

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{n} \rho^{k_\nu} \prod_{j=\mu+1}^{n} e^{\rho\omega_j(b-a)}([\theta_0] + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\theta_1]). \tag{14}$$

Розглянемо $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$ для $x > s$ (у випадку $x < s$ міркування будуть аналогічними). Тоді останнім елементом першого рядка у визначнику буде $K(x,s,\lambda)$. Помножимо $(\mu{+}1)$-й, $(\mu{+}2)$-й, $\ldots$, n-й стовпці визначника $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$ на $-z_{\mu+1}(s)$, $-z_{\mu+2}(s)$, $\ldots$, $-z_n(s)$ відповідно та додамо до останнього стовпця. Визначник внаслідок цього не зміниться. Тоді елементами останнього стовпчика в $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$ будуть, враховуючи (10), (12) і (13),

$$\frac{1}{n\rho^{n-1}} P_0 = -\frac{1}{n\rho^{n-1}} \sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho\omega_j(x-s)}[\omega_j],$$

$$\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}}P_\nu = -\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}}\left\{\sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho\omega_j(b-s)}[\beta_\nu\omega_j^{k_\nu+1}] - \sum_{j=\mu+1}^{n} e^{-\rho\omega_j(s-a)}[\alpha_\nu\omega_j^{k_\nu+1}]\right\},\ \nu=\overline{1,n}.$$

Підставимо тепер (10), (12), (13), (14), а також вирази для останнього стовпця $\tilde{Q}(x,s,\lambda)$ в (11) і розподілимо множники знаменника $\tilde{\Delta}(\lambda)$ наступним чином. На ρ^{k_ν} розділимо $(\nu+1)$-й рядок, на $e^{\rho\omega_j(b-a)}$ – j-й стовпець ($j=\overline{\mu+1,n}$) і на $[\theta_0+\theta_1 e^{\rho\omega_\mu(b-a)}]$ – μ-й стовпець. Тоді формула (11) набуде вигляду

$$G(x,s,\lambda) = -\frac{A}{n\rho^{n-1}}, \tag{15}$$

де перший рядок визначника $(n+1)$-го порядку A має вигляд $\big(e^{\rho\omega_1(x-a)}[1], \ldots, e^{\rho\omega_{\mu-1}(x-a)}[1],\ e^{\rho\omega_\mu(x-a)}[1]/[\theta_0+\theta_1 e^{\rho\omega_\mu(b-a)}],\ e^{\rho\omega_{\mu+1}(x-b)}[1], \ldots, e^{\rho\omega_n(x-b)}[1], P_0\big)$, а $(\nu+1)$-й рядок побудовано наступним чином: $\big([\alpha_\nu\omega_1^{k_\nu}], \ldots, [\alpha_\nu\omega_{\mu-1}^{k_\nu}], \omega_\mu^{k_\nu}[\alpha_\nu+\beta_\nu e^{\rho\omega_\mu(b-a)}]/[\theta_0+\theta_1 e^{\rho\omega_\mu(b-a)}], [\beta_\nu\omega_{\mu+1}^{k_\nu}], \ldots, [\beta_\nu\omega_n^{k_\nu}], P_\nu\big)$.

Можна так само, як у [5, с. 78], показати, що з огляду на регулярність крайових умов знаменник $[\theta_0+\theta_1 e^{\rho\omega_\mu(b-a)}]$ обмежується знизу одним і тим самим числом. Тоді внаслідок умов (6) всі елементи визначника (15) на дузі γ_k' обмежені зверху, оскільки експоненти там мають недодатну дійсну частину. Отже, на дугах γ_k' справджується нерівність $|G(x,s,\lambda)| \le M|\rho|^{1-n}$, де M – деяка стала. Аналогічно встановлюється така ж нерівність і на дугах γ_k''. Оскільки ці самі міркування застосовні до будь-якої області S_q, вони дають той самий результат на дузі γ_k і в секторі S_1. Переходячи від ρ до λ, отримуємо твердження теореми для випадку непарного n.

Нехай n – парне, $n=2\mu$. Оскільки $U_\nu(y_\mu) = (\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\{[\alpha_\nu] + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\beta_\nu]\}$, $U_\nu(y_{\mu+1}) = (\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\{[\alpha_\nu] + e^{\rho\omega_\mu(b-a)}[\beta_\nu]\}$, цей випадок відрізняється від попереднього лише тим, що $\tilde{\Delta}(\lambda)$ містить вираз $[\theta_0+\theta_1 e^{\rho\omega_\mu(b-a)} + \theta_{-1}e^{\rho\omega_{\mu+1}(b-a)}] = \theta_1[e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi'][e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi'']$. Тут μ-й і $(\mu+1)$-й стовпці потрібно поділити на $[e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi']$ і $[e^{\rho\omega_\mu(b-a)}-\xi'']$ відповідно. Решта міркувань у доведенні теореми будуть аналогічними до випадку дуги γ_k'. Теорему доведено. $\diamondsuit$

З доведення випливає, що нерівність (5) справджується для великих $|\lambda|$ і в області O_δ, отриманій з λ-площини відкиданням образів кіл $|\rho-\rho_k|<\delta$ при відображенні $\lambda=-\rho^n$.

3. Основні результати. Користуючись теоремою 1 і зауваженням, отримаємо оцінки

$$|I_k| \le \frac{M}{R_k^{\frac{n-1}{n}}}, \quad \left|\frac{Q_k(x,s)}{\lambda_k}\right| = \left|\frac{n}{2\pi\lambda_k}\int\limits_{|\rho-\rho_k|=\delta} \rho^{n-1}G(x,s,-\rho^n)d\rho\right| \le \frac{nM\delta}{|\lambda_k|},$$

з яких випливає, що ліва частина рівності (4) і загальний член ряду з (4) прямують до нуля для $k\to\infty$, причому рівномірно відносно x і s з $[a,b]$. Наслідком цього є

Теорема 2. *Функція Ґріна $G(x,s)$ диференціального оператора L, породженого регулярними крайовими умовами, розвивається у рівномірно збіжний ряд*

$$G(x,s) = -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{Q_\nu(x,s)}{\lambda_\nu}. \tag{16}$$

Теорема 3. *Нехай всі власні значення крайової задачі* (1), (2) *з регулярними крайовими умовами* (2) *є простими. Тоді будь-яка функція $f(x)$ з області визначення диференціального оператора L розвивається у рівномірно збіжний ряд за його власними функціями*

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu y_\nu(x), \tag{17}$$

де

$$d_\nu=\int\limits_a^b f(s)\overline{z_\nu(s)}ds$$

за виконання умови нормованості

$$\int\limits_a^b y_\nu(x)\overline{z_\nu(x)}dx=1, \tag{18}$$

а $y_\nu(x)$, $z_\nu(x)$ *– власні функції операторів* L *і спряженого до нього* L^* *, що відповідають власним значенням* λ_ν *і* $\bar\lambda_\nu$.

Доведення. Покладемо $Lf=\varphi'$, $L^*z_\nu=\psi_\nu'$, де φ і ψ_ν є функціями обмеженої на $[a,b]$ варіації, неперервними справа. Тоді

$$f(x)=\int\limits_a^b G(x,s)d\varphi(s),\quad z_\nu(x)=\int\limits_a^b H(x,s)d\psi_\nu(s), \tag{19}$$

де $H(x,s)$ – функція Ґріна оператора L^* . Підставимо в формулу (19) замість функції $G(x,s)$ її розвинення (16) з урахуванням формули для лишків $-Q_\nu(x,s)=y_\nu(x)\overline{z_\nu(s)}$, яка доводиться аналогічно до [5, с. 48, 49] за виконання умови (18) і простоти власних значень. Внаслідок рівномірної збіжності ряду, його можна інтегрувати почленно. Отже, правильною є формула (17), де

$$d_\nu=\frac{1}{\lambda_\nu}\int\limits_a^b\overline{z_\nu(s)}d\varphi(s). \tag{20}$$

Оскільки $G(x,s)=\overline{H(s,x)}$ [4], буде виконуватись і рівність

$$\int\limits_a^b d\overline{\psi_\nu(x)}\int\limits_a^b G(x,s)d\varphi(s)=\int\limits_a^b d\overline{\psi_\nu(x)}\int\limits_a^b\overline{H(s,x)}d\varphi(s),$$

звідки, враховуючи (19), отримаємо співвідношення

$$\int\limits_a^b d\overline{\psi_\nu(x)}f(x)=\int\limits_a^b\overline{z_\nu(x)}d\varphi(x). \tag{21}$$

З іншого боку, $L^*z_\nu=\bar\lambda_\nu z_\nu$. Тоді $\psi_\nu(x)=\int\limits_a^x\lambda_\nu z_\nu(s)ds$. Підставивши останню рівність у (21), з (20) отримаємо, що

$$d_\nu=\frac{1}{\lambda_\nu}\int\limits_a^b d\overline{\psi_\nu(x)}f(x)=\frac{1}{\lambda_\nu}\int\limits_a^b\overline{\left(\bar\lambda_\nu z_\nu(x)\right)}f(x)dx=\int\limits_a^b\overline{z_\nu(x)}f(x)dx,$$

що й потрібно було довести. $\diamondsuit$

Таким чином, у випадку регулярних крайових умов і простих власних значень за допомогою оцінки функції Ґріна і використання її властивостей отримано розвинення у ряд за власними функціями диференціального оператора довільної функції з області визначення цього оператора (тобто з множини функцій, які разом зі своїми похідними до порядку $n-2$ є абсолютно неперервними на $[a,b]$, а $(n-1)$-ша похідна належить до простору $\mathrm{BV}^+[a,b]$, і які, крім того, задовольняють крайові умови (2)). Отримані результати полегшують дослідження коливань і стійкості будівельних конструкцій. Результати про розвинення у ряд можна отримати і для довільної функції з L_2, а також для рівняння з вагою при параметрі, що буде відображено в наступних публікаціях.

1. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. – М.: Мир, 1991. – 566 с.
2. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 3. – С. 384–396.
3. *Махней О. В.* Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 2. – С. 17–25.
4. *Махней О. В.* Функція Ґріна сингулярного диференціального оператора та її властивості // Мат. студії. – 2002. – **18**, № 2. – С. 147–156.
5. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
6. *Стасюк М. Ф.* Структура елементів фундаментальної матриці, що відповідає скалярному квазідиференціальному рівнянню // Матеріали IX Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 16–19 травня 2002 р.). – Київ: Нац. техн. ун-т України «КПІ», 2002. – С. 369.
7. *Сторож О. Г.* Розклад за власними функціями скінченновимірних самоспряжених збурень сингулярних диференціальних операторів // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 51–54.
8. *Тацій Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис. … д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 1994. – 37 с.
9. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 312 с.
10. *Шин Д. Ю.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Мат. сб. – 1940. – 7 (**49**). – № 3. – С. 479–532.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Асимптотические формулы при больших значениях параметра для решений сингулярного дифференциального уравнения позволяют оценить функцию Грина краевой задачи. С помощью этой оценки построено разложение по собственным функциям сингулярного дифференциального оператора в случае простых собственных значений.

EXPANSION OF SINGULAR DIFFERENTIAL OPERATOR BY EIGEN-FUNCTIONS

The asymptotic formulas for large values of parameter of the solutions to the singular differential equation allow one to value Green's function of the boundary-value problem. With the help of this estimation the expansion of the singular differential operator by eigen-functions in the case of simple eigen-values is constructed.

Прикарпат. ун-т
ім. В. Стефаника, Івано-Франківськ

Одержано
09.09.03