

**ТЕРМОПРУЖНІСТЬ СТРУКТУР З ТЕПЛОПРОВІДНИМИ ТРІЩИНАМИ**

*Стаття присвячена огляду результатів, отриманих в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, в області дослідження термопружної поведінки тіл із тріщинами, які проводять тепло. Розглянуто моделі теплопередачі між поверхнями розкритої або закритої тріщини. Наведено математичні методи розв'язування контактних задач теплопровідності й термопружності для внутрішніх тріщин в однорідних середовищах і міжфазних тріщин – у кусково-однорідних. Проаналізовано контактні явища, зумовлені провідністю тріщин і наляганням їхніх поверхонь.*

**1. Моделювання теплопередачі між поверхнями тріщини.** У реальних умовах тріщини та порожнини матеріалів часто заповнюються певною речовиною (газом, рідиною). Цьому сприяють капілярні явища, дифузія, фільтрація, десорбція тощо. Оскільки заповнювач проводить тепло, то при розрахунку температурних полів і напружень у таких матеріалах недопустимо використовувати припущення про теплоізоляцію поверхонь дефектів. Побудова ж аналітичних або числових розв'язків відповідних задач теплопровідності для тіл із тріщинами пов'язана зі значними труднощами, зумовленими тим, що один геометричний розмір дефекту (висота тріщини) є значно меншим, ніж інші.

Академік Я. С. Підстригач запропонував ефективний підхід до розв'язання проблеми теплопередачі між тілами через тонкий проміжковий шар (прошарок). Використовуючи операторний метод або метод усереднення та гіпотезу про лінійний розподіл температури за товщиною шару, він отримав [22, 23] умови, що зв'язують у диференціальній формі температуру і теплові потоки на поверхнях прошарку. У криволінійній системі координат  $s, 0 \leq n$ , зв'язаній із серединною лінією прошарку, в разі стаціонарного температурного поля вони мають вигляд

$$\begin{aligned} \lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T^- + T^+) + 2(q_n^- - q_n^+) &= 0, \\ \lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} (T^- - T^+) + 6(q_n^- + q_n^+) - 12\lambda_n (T^- - T^+) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $T^-$ ,  $T^+$  і  $q_n^-$ ,  $q_n^+$  – граничні значення температури та нормального теплового потоку на поверхнях шару;  $\lambda_s = \lambda_0 h$  – поздовжня теплопровідність шару;  $\lambda_n = \lambda_0 / h$  – поперечна теплопровідність (теплопроникність) шару;  $\lambda_0$ ,  $h$  – коефіцієнт теплопровідності та товщина шару.

У теоретичних дослідженнях використання умов (1) дозволяє оминати побудову розв'язку задачі теплопровідності для шару, моделюючи його фізичною поверхнею, що наділена зведеними характеристиками шару – поздовжньою теплопровідністю  $\lambda_s$  і поперечною теплопроникністю  $\lambda_n$  (або термоопором  $r$ , який є оберненою величиною до теплопроникності:  $r = 1/\lambda_n$ ). З умов (1) як часткові випадки випливають інші відомі умови теплового контакту, зокрема ідеального теплового контакту, термоізоляції та умови контакту з термоопором.

У праці [24] умови (1) вперше застосовано до моделювання теплового контакту між поверхнями тріщини, яка містить теплопровідний заповнювач.

Проведено класифікацію тріщин відповідно до температурних граничних умов на їх поверхнях [2, 10]. Тріщини названо теплопровідними, якщо  $\lambda_s \neq 0$  і  $\lambda_n \neq 0$ ; теплопроникними, якщо  $\lambda_s = 0$ , а  $\lambda_n \neq 0$ ; теплоізольованими, якщо  $\lambda_s = 0$  і  $\lambda_n = 0$ .

Якщо під дією теплових і механічних навантажень тріщина закривається, то на теплопередачу між поверхнями дефекту істотно впливає їхня структура. Згідно з теорією контакту реальних поверхонь [26] визначальними чинниками теплообміну між ними виступають шорсткість поверхонь, тонкі поверхневі шари (окисли, адсорбовані плівки тощо) та середовище в міжконтактних мікропустотах, які виникають між ділянками фактичного контакту по вершинах мікроставів. Тому тепловий контакт шорстких поверхонь закритої тріщини на макрорівні описується умовами

$$q_n^- = q_n^+, \quad (T^- - T^+) - \left( r_n + \frac{1}{\lambda_c + KP} \right) q_n^+ = 0, \quad (2)$$

де  $r_n$  – термоопір поверхневої плівки;  $P$  – контактний тиск поверхонь тріщини;  $K$  – параметр, залежний від геометричних характеристик шорсткої поверхні та фізичних характеристик матеріалу;  $\lambda_c = \lambda_0 h_0$ ,  $\lambda_0$  – коефіцієнт теплопровідності середовища в тріщині;  $h_0$  – ефективна висота мікроставів шорсткої поверхні.

**2. Цілком розкриті теплопровідні тріщини.** Плоскі стаціонарні задачі теорії теплопровідності для площини з розкритими криволінійними теплопровідними тріщинами з використанням методу комплексних потенціалів і властивостей логарифмічних потенціалів простого та подвійного шару було зведено [2, 24] до розв'язання системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь (СІДР) відносно густин потенціалів  $\gamma(x)$  і  $\mu(x)$ , означених на лініях тріщин. У разі однієї прямолінійної тріщини завдовжки  $2a$  ця система трансформується до двох незв'язаних СІДР:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_s(x)}{12} \gamma''(x) - \lambda_n \gamma(x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \gamma'(s) \frac{ds}{s-x} &= F_1(x), \\ \frac{1}{\lambda_s(x)} \mu(x) - \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-a}^a \mu'(s) \frac{ds}{s-x} &= F_2(x), \quad x \in [-a, a], \end{aligned} \quad (3)$$

де  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  – функції, що залежать від розподілу температури в суцільному (без тріщини) тілі.

Коли теплопровідність і теплопроникність тріщини задані функціями  $\lambda_n(x) = \lambda_{n0} / \sqrt{l^2 - x^2}$ ,  $\lambda_s(x) = \lambda_{s0} \sqrt{l^2 - x^2}$ , побудовано аналітичний розв'язок рівнянь (3) і визначено вплив заповнювача тріщини на розподіл напружень біля її вершин [1, 2]. Досліджено [2, 3, 8, 9] термонапружений стан площини з криволінійною, коловою і прямолінійною теплопроникними ( $\lambda_n \neq 0$ ,  $\lambda_s = 0$ ) тріщинами. Встановлено, що теплопровідний заповнювач тріщини зменшує стрибок температури між її поверхнями та напруження біля її вершин. Отже, заповнювач дефектів при тепловому навантаженні відіграє роль зміцнювального чинника.

У праці [17] отримано СІДР плоскої задачі термопружності для тіла з криволінійними тріщинами з урахуванням залежності провідності тріщин від їхнього розкриття.

Осесиметричні й просторові задачі теплопровідності для тіла з плоскими теплопровідними тріщинами з використанням методу гармонічних потенціалів простого та подвійного шарів зведено [7, 10, 12] до граничних інтегральних рівнянь типу ньютонівського потенціалу

$$\frac{1}{12} \lambda_s(x) \Delta_x \gamma(x) - \lambda_n(x) \gamma(x) + \frac{\lambda}{4\pi} \Delta_x \iint_S \frac{\gamma(\xi) d_\xi S}{|x - \xi|} = F_1(x),$$

$$\frac{1}{\lambda_s(x)} \mu(x) - \frac{1}{4\pi\lambda} \Delta_x \iint_S \frac{\mu(\xi) d_\xi S}{|x - \xi|} = F_2(x), \quad x \in S. \quad (4)$$

Тут  $S$  – область, зайнята тріщиною;  $x, \xi$  – змінні з координатами  $(x_1, x_2, 0), (\xi_1, \xi_2, 0)$  у декартовій системі координат, вибраній так, що область  $S$  лежить в площині  $x_3 = 0$ ;  $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ .

Аналітичні, числові та числово-аналітичні методи розв'язування рівнянь (4) розвинуті у працях [6, 10, 11, 12, 25]. Для теплопроникних тріщин ( $\lambda_n \neq 0, \lambda_s = 0$ ), контури яких апроксимуються деякими кривими другого порядку, побудовано [11, 12, 25] аналітичні розв'язки для часткових випадків коефіцієнта теплопроникності  $\lambda_n(x)$ , коли тріщини піддані дії теплового потоку  $q$ . Так, для кругової тріщини  $\gamma(x) = \frac{4q}{\pi\lambda + 4A_0} (a^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}$ , якщо коефіцієнт теплопроникності  $\lambda_n = A_0 (a^2 - x_1^2 - x_2^2)^{-1/2}$  (тут  $a$  – радіус тріщини). Для еліптичної тріщини  $\gamma(x) = \frac{2q}{2B_0 + \lambda E(k) b^{-1}} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}\right)^{1/2}$ , якщо  $\lambda_n(x) = B_0 \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2}\right)^{-1/2}$  (тут  $a, b$  – півосі тріщини).

**3. Закриті тріщини в однорідному середовищі.** Досліджено [20, 34] температурне поле і термонапружений стан простору з плоскою тунельною тріщиною з шорсткими поверхнями, яка закривається в полі стискальних зусиль і перебуває під дією однорідного теплового потоку. Враховується провідність середовища в дефекті. У цьому разі теплопередача між поверхнями тріщини описується умовами (2), у яких  $r_n = 0$ . Виявлено, що стрибок температури  $\gamma(x)$  між поверхнями тріщини нелінійно залежить від прикладених зусиль і монотонно спадає з їхнім ростом. Зростання провідності середовища в мікропустотах закритої тріщини зумовлює зменшення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН)  $k_2$  біля вершин тріщини. Аналогічною є поведінка  $k_2$  і при збільшенні зовнішніх стискальних зусиль. КІН  $k_1 = 0$ , оскільки тріщина замкнута. При малому зовнішньому тиску стрибок температури між берегами тріщини має яскраво виражений максимум на її середині. При великому тиску стрибок температури стає близьким до постійного по всій довжині дефекту, за винятком малих околів біля його країв. Зростання провідності середовища в мікропустотах закритої тріщини зумовлює зменшення КІН  $k_2$  біля вершин тріщини.

Вплив локалізованого силового навантаження на температурні поля і напруження в однорідній площині з тріщиною завдовжки  $2a$ , береги якої контактують, вивчався [16] на прикладі двох зосереджених сил величини  $P_0$ , прикладених симетрично відносно тріщини на відстані  $d$  по обидві сторони від неї і напрямлених в її бік. Виявлено, що, незалежно від відстані до тріщини, зі збільшенням величини сили зменшується і стрибок температури між берегами тріщини, і КІН  $k_2$ . Проте якісний характер розподілу стрибка температури істотно залежить від розміщення сил, що яскраво

ілюструє рис. 1. Тут і надалі на рисунках рисками позначено безрозмірні параметри (наприклад,  $\bar{d} = d/a$ ),  $\xi = x/a$ .

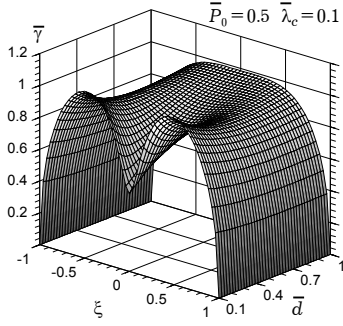


Рис. 1

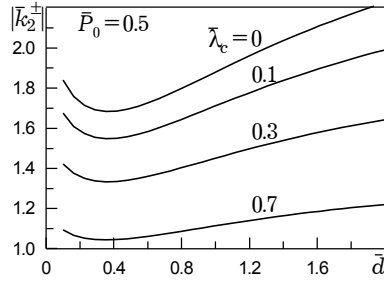


Рис. 2

При великих відстанях  $d$  стрибок температури має максимум посередині тріщини. При  $d \approx a$  з'являється локальний мінімум стрибка посередині тріщини і два максимуми в околі точок  $x = \pm 0.5a$  (рис. 1). Величина максимального значення  $\gamma_{\max}$  є немонотонною: при зменшенні  $d$  до 0.5 вона спадає, а при подальшому зменшенні – починає зростати.

При віддаленні сил від тріщини КІН  $k_2$  спочатку зменшується, досягаючи мінімуму при відстані  $d \approx 0.38a$ , а потім зростає, асимптотично прямуючи до значення  $k_2$  у ненавантаженому тілі (рис. 2). Отже, в разі закритих тріщин з недосконалим тепловим контактом берегів, зумовленим їхньою шорсткістю, механічне навантаження можна використовувати для керування рівнем термічних напружень поблизу таких дефектів.

У випадку закритих тріщин в однорідному матеріалі стрибок температури та термічні напруження лінійно залежать від величини теплового потоку  $q$ , нормального до тріщини.

**4. Закриті міжфазні тріщини.** Досліджувався термонапружений стан біматеріалу (кусково-однорідної площини) із закритим міжфазним дефектом при дії однорідного тиску  $p$  і теплового потоку  $q$ , нормальних до лінії розмежування (рис. 3). Вважається, що між берегами дефекту відбувається неідеальний тепловий контакт, зумовлений їхньою шорсткістю, а середовище в міжконтактних мікропустотах відсутнє. У цьому разі теплообмін між поверхнями тріщини описується умовами (2), у яких слід покласти  $r_n = 0$ ,  $\lambda_c = 0$ . Температурне поле та напруження у такому біматеріалі з використанням методу комплексних потенціалів подано через стрибок температури  $\gamma(x)$  між берегами дефекту, для визначення якого отримано нелінійне СІДР

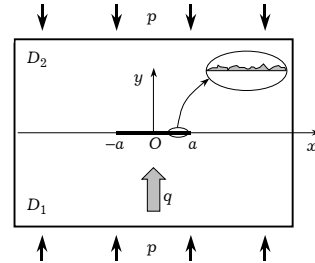


Рис. 3

$$\left[ Kp - \frac{K\lambda G_1 G_2}{G_*^+} \left( 2\eta^- \gamma(x) - \frac{G_*^- \eta_{12}}{G_{*1} G_{*2} \pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \gamma(t) dt \right) \right] \gamma(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t - x} = q, \quad |x| \leq a, \quad \gamma(\pm a) = 0. \quad (5)$$

Тут  $\lambda = \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ;  $G_{*1} = G_1 + \alpha_1 G_2$ ;  $G_{*2} = G_2 + \alpha_1 G_1$ ;  $\eta_{12} = \eta_1 G_{*2} + \eta_2 G_{*1}$ ;

$$\alpha_k = 3 - 4\nu_k; \quad \eta_k = \frac{\alpha_k(1 + \nu_k)}{\lambda_k}; \quad G_*^- = G_{*2} - G_{*1}; \quad \eta^- = \eta_2 - \eta_1; \quad \nu_k, \quad G_k, \quad \alpha_k,$$

$\lambda_k, \eta_k$  – коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву, коефіцієнт лінійного теплового розширення, коефіцієнт теплопровідності та термічна дистортивність матеріалу  $D_k, k = 1, 2$ .

Аналіз розв'язку [14] задачі термопружності для біматеріалу з закритою міжфазною тріщиною, наділеною термоопором, показав, що термомеханічна поведінка біматеріалу істотно залежить від співвідношення параметрів з'єднаних матеріалів і напряму теплового потоку. Тому дослідження рівняння (5) проведено окремо для конкретних діапазонів зміни цих параметрів, у межах кожного з яких якісна поведінка системи є однотипною.

Детально розглянуто випадок, коли матеріали композита відрізняються лише модулями зсуву ( $G_1 \neq G_2, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \nu_1 = \nu_2 = \nu$ ) і відсутнє механічне навантаження ( $p = 0$ ). Тоді береги контактують, якщо тепловий потік скерований у бік матеріалу з меншим модулем зсуву ( $q(G_1 - G_2) < 0$ ). У цьому разі рівняння (5) набуває вигляду

$$\left[ \frac{K\lambda G_1 G_2 G_*^- \eta_{12}}{G_*^+ G_{*1} G_{*2} \pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \gamma(t) dt \right] \gamma(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t - x} = q, \quad |x| \leq a. \quad (6)$$

Побудовано [18, 33, 35] точний аналітичний розв'язок нелінійного СІДР (6):

$$\gamma(x) = 4aq \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \left( \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8a^3 q \pi K S_1} \right)^{-1}, \quad (7)$$

де  $S_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{G_1 G_2 (1 + \nu)}{G_{*1} G_{*2}} \alpha G_*^-$ . На підставі цього розв'язку проведено параметричний аналіз стрибка температури  $\gamma$  на берегах дефекту, контактного тиску  $P$  між ними та КІН  $k_2$  і виявлено їхню нелінійну залежність від теплового потоку та пружних характеристик матеріалів (рис. 4–6). Зміна контактної тиску берегів зі зміною теплового потоку проілюстрована на рис. 4 (де  $\xi = x/a$ ). При зміні параметра відносної жорсткості верхнього матеріалу  $\bar{G}_2 = G_2/G_1$  стрибок температури стає максимальним при значеннях  $\bar{G}_2 = 1$  і  $\bar{G}_2 = 0$  (рис. 5), для яких контактний тиск є мінімальним і дорівнює нулеві (рис. 6). Мінімум стрибка температури досягається при  $\bar{G}_2 \approx 0.36$ , а максимум тиску – при  $\bar{G}_2 \approx 0.38$ . Зі збільшенням параметра  $K$ , що відповідає зменшенню шорсткості поверхні, КІН  $k_2$  спадає. Виявлені ефекти є характерними лише для міжфазних тріщин і зумовлені залежністю провідності тріщини від тиску її поверхонь.

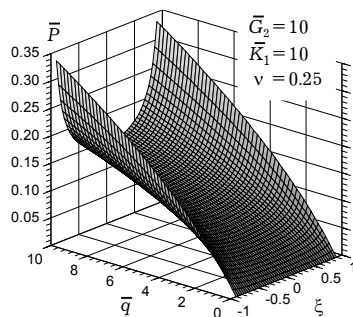


Рис. 4

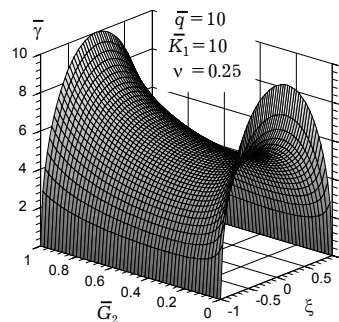


Рис. 5

У працях [5, 31] досліджено термонапружений стан біматеріалу, компоненти якого мають різні термічні та однакові механічні характеристики, в разі закриття тріщини зовнішніми стискувальними зусиллями інтенсивності  $p$  і дії однорідного теплового потоку  $q$ . Для такого поєднання матеріалів  $G_*^- = 0$ , і в рівнянні (5) зникає третій член у квадратних дужках. Тоді це рівняння розв'язане з використанням лінеаризації на основі методу малого параметра. Проаналізовано зміну напруженого стану композита при зміні напрямку теплового потоку. Виявлено, що в разі потоку, скерованого до матеріалу з більшою термічною дистортивністю, контактний тиск берегів тріщини більший, а КІН  $k_2$  – навпаки, менший, ніж у випадку протилежного напрямку потоку. Якщо потік скерований до матеріалу з більшою дистортивністю, то контактний тиск берегів тріщини зменшується порівняно з випадком чисто силового навантаження і збільшується у разі протилежного напрямку потоку. КІН  $k_2$  є більшим, якщо потік скерований до матеріалу з більшою дистортивністю. Що більшою є величина потоку і різниця дистортивностей матеріалів композита, то кількісно більшою є зміна стрибка температури на поверхнях міжфазного дефекту, контактного тиску поверхонь та КІН  $k_2$  при зміні напрямку потоку.

Біматеріал, компоненти якого відрізняються модулями зсуву та коефіцієнтами лінійного теплового розширення, розглянуто [32] для випадку теплового потоку, напрямленого до матеріалу з більшим модулем зсуву. У цьому разі для розв'язання нелінійного рівняння (5) застосовано метод послідовних наближень.

Недосконалий тепловий контакт закритої тріщини зумовлює значну концентрацію дотичних напружень на лінії розмежування матеріалів. Якщо міжфазна границя схильна до пластичного течіння, то вздовж неї можуть виникати пластичні ділянки. Таке явище вивчається [28, 30] за умови, що вздовж пластичних смуг дотичні напруження дорівнюють межі текучості міжфазної поверхні. Встановлено, що збільшення термоопору закритої тріщини та величини теплового потоку зумовлює збільшення міжфазних смуг текучості. Для тріщин з фіксованим термоопором при зростанні теплового потоку абсолютна величина стрибка міжфазних дотичних зміщень зростає як на ділянці тріщини, так і на пластичній зоні. Стрибок зміщень досягає свого максимуму в області тріщини на деякій відстані від її краю (на інтервалі  $0.7a < x < 0.8a$ ).

**5. Частково розкриті тріщини.** Причиною неідеального теплового контакту поверхонь можуть бути тонкі шари, що утворюються на них внаслідок різних фізико-хімічних процесів (окисні шари, плівки адсорбованої речовини тощо). У цьому разі термоопір закритого дефекту визначається товщиною і теплопровідністю поверхневого шару та не залежить від тиску його берегів. Контактна задача термопружності для міжфазної тріщини в такій постановці розв'язана [13, 14] для випадку закриття тріщини зовнішнім механічним навантаженням. Аналіз розв'язку показав, що термоопір початково закритої тріщини може зумовити її часткове розкриття при дії теплового потоку, нормального до дефекту.

Явище термічного розкриття міжфазного дефекту вивчено [15, 19, 29] для випадку компонентів з різними термічними характеристиками та однаковими механічними. Контакт берегів порушується, якщо тепловий потік скерований у бік матеріалу з більшою термічною дистортивністю. При цьо-

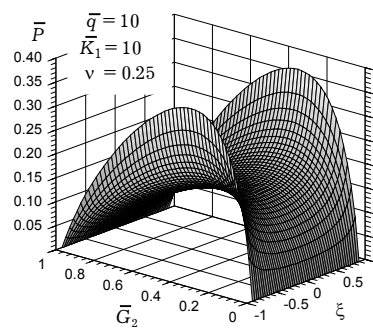


Рис. 6

му утворюється одна ділянка розкриття на середині тріщини. Проаналізовано динаміку росту цієї ділянки при збільшенні потоку. Визначено порогове значення потоку, при якому тріщина цілком розкривається. Після цього нормальні міжфазні напруження біля кінців тріщини стають необмеженими і характеризуються коефіцієнтом інтенсивності  $k_1 = \sqrt{a} [-p + 4a\eta^- / (\pi K)]$ .

Якщо тепловий потік напрямлений до матеріалу з меншою термічною дистортивністю, то спостерігається інше явище [4] – часткове закриття міжфазної тріщини, яка початково була цілком розкрита під дією розтягувальних зусиль. У цьому разі можливе утворення ділянки контакту берегів посередині тріщини. Визначено порогове значення потоку, при якому починається контакт поверхонь, коли вони термоізовані. Розвинуто метод розв'язання контактної задачі для такої тріщини шляхом зведення її до сингулярного інтегрального рівняння на контактний тиск поверхонь дефекту. Побудовано замкнений наближений розв'язок і досліджено залежність ділянки налягання і контактного тиску на ній від силового та теплового навантажень. Проведений аналіз показав, що неврахування явища контакту берегів міжфазної тріщини зумовлює заниження коефіцієнта інтенсивності нормальних міжфазних напружень  $k_1$ .

Досліджено [13, 20, 35] термомеханічну поведінку однорідного тіла з щільною, заповненою фіксованою кількістю ідеального газу, який проводить тепло, з урахуванням часткового контакту берегів тріщини. У зв'язку із залежністю ділянок контакту, висоти тріщини, тиску газу і його термічної провідності від зовнішнього навантаження відповідні задачі теплопровідності і термопружності є нелінійними та взаємозв'язаними. Для щільни, висота якої описується функцією  $h_0(x) = B[1 - (x/a)^2]^{3/2}$ ,  $B \ll a$ , запропоновано процедуру побудови наближеного замкненого розв'язку задачі, коли при визначенні температурного поля провіт між берегами тріщини апроксимується деяким геометрично еквівалентним провітом, для якого відповідне сингулярне інтегральне рівняння відносно стрибка температури має аналітичний розв'язок. Вивчено трансформацію щільни при збільшенні зовнішнього навантаження, встановлено його порогове значення, за якого починається контакт її берегів. Проаналізовано залежності ділянок контакту, розкриття тріщини, тиску газу в ній і коефіцієнтів інтенсивності напружень від навантаження.

**6. Термічний опір міжфазної тріщинуватої поверхні.** Якщо закриті міжфазні дефекти розміщені на всій поверхні розмежування матеріалів, то їх інтегральний вплив на температуру на далекій, порівняно з характерною довжиною дефектів, відстані доцільно описувати за допомогою ефективних термічних контактних параметрів – провідності й термоопору, як це робиться в теорії контактної теплопередачі шорстких тіл [26]. З цією метою розглянуто систему міжфазних закритих дефектів однакової довжини  $2a$ , розміщених на лінії розмежування півплощин з періодом  $d_T$ . Оскільки вже встановлено, що навіть за відсутності силового навантаження біматеріалу з закритими міжфазними дефектами температурні поля нелінійно залежать від теплового потоку  $q$ , то вводиться означення ефективного термоопору  $R_k(q)$  за формулою  $R_k(q) = \partial(\Delta t(q)) / \partial q$ , де  $\Delta t$  – усереднений стрибок температури між поверхнями тіл.

Досліджено [18, 27] ефективний термоопір біматеріалу, складові якого відрізняються лише модулями зсуву, в разі теплового потоку, скерованого до матеріалу з меншим модулем зсуву. Вважається, що коефіцієнт тріщинуватості  $k_T = 2a / d_T$  міжфазної границі є малою величиною ( $k_T \leq 0.1$ ), а провідність тріщини лінійно залежить від тиску її берегів. Виявлено, що збільшення потоку зумовлює зменшення ефективного термоопору (рис. 7). При зростанні тріщинуватості термоопір зростає. Встановлений ефект за-

лежності термоопору композитного матеріалу з міжфазними недосконалотями від теплового потоку є важливим для теорії контактної теплопередачі та може бути використаний при конструюванні теплоізолювальних чи теплопередавальних структур із заданим характером поведінки при зміні теплової навантаженості.

Для системи міжфазних тріщин у композиті, матеріали якого мають однакові механічні характеристики та термічні дистортивності, ефективні контактні характеристики вивчалися [18] для випадку великої тріщинуватості ( $0.1 \leq k_T < 0.9$ ). У цьому разі тепловий потік не впливає на ефективну контактну провідність. Встановлено, що вона нелінійно залежить від тріщинуватості і зменшується при зменшенні  $k_T$ . Залежність ефективної провідності від зовнішнього тиску виявилася близькою до лінійної для всього розглянутого діапазону зміни коефіцієнта тріщинуватості.

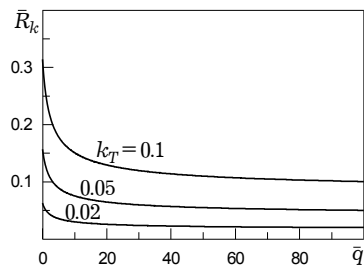


Рис. 7

1. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Интенсивность напряжений в вершинах теплопроводящей трещины // Физ.-хим. механика материалов. – 1982. – **18**, № 1. – С. 57–61.
2. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 278 с.
3. Кит Г. С., Кривцун М. Г. Предельное равновесие плоскости с теплопроницаемым криволинейным разрезом // Физ.-хим. механика материалов. – 1978. – **14**, № 5. – С. 70–74.
4. Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Нагалка С. П., Гончар Х. И. Задача термоупругости для биматериала с межфазной трещиной, берега которой контактируют на центральном участке // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 83–90.
5. Кит Г. С., Нагалка С. П., Мартыняк Р. М. Нелинейная контактная задача термоупругости для трещины на границе раздела материалов с различными термическими свойствами // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 13–21.
6. Кит Г. С., Побережний О. В. О напряженном состоянии нагреваемого материала, имеющего внутренние дефекты типа круговых трещин // Физ.-хим. механика материалов. – 1969. – **5**, № 3. – С. 345–350.
7. Кит Г. С., Побережний О. В. Термоупругое состояние бесконечного тела с теплопроводящей круговой трещиной // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1970. – Вып. 9. – С. 78–88.
8. Кит Г. С., Подстригач Я. С. Определение стационарного температурного поля и напряжений в окрестности щели, обладающей термосопротивлением // Физ.-хим. механика материалов. – 1966. – **2**, № 3. – С. 247–252.
9. Кит Г. С., Френчко Ю. С. Влияние теплопроницаемости дугообразной трещины на термоупругое состояние в ее окрестности // Физ.-хим. механика материалов. – 1973. – **9**, № 1. – С. 75–80.
10. Кит Г. С., Хай М. В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 284 с.
11. Кит Г. С. Метод потенциалів у тривимірних задачах теплопровідності тіл з тонкими включеннями // Крайові задачі термомеханіки. – К., 1996. – Ч. 1. – С. 154–159.
12. Кит Г. С. Термомеханіка тіл з тріщинами при тепловому контакті їх берегів // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2 т. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України, 2000. – Т. 2. – С. 11–15.
13. Кит Г. С., Мартыняк Р. М. Термомеханічна поведінка міжфазних дефектів за наявності заповнювача і контакту берегів // I наук. симп. «Сучасні проблеми інженерної механіки»: Тези доп. – Луцьк, 2000. – С. 4.
14. Кит Г. С., Мартыняк Р. М. Термопружність кусково-однорідного тіла із закритою міжфазною тріщиною при наявності контактного термоопору між її берегами // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 84–88.
15. Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Криштафович А. А. Термомеханіка контактних явищ у тілах з міжфазними дефектами // IV Міжнар. симп. укр. інженерів-механіків у Львові: Тези доп. – Львів, 1999. – С. 9.



16. *Kit G. S., Martyniak P. M., Nagalka S. P.* Термопружні ефекти в тілі з тріщиною, закритою зосередженими силами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1999. – **42**, № 2. – С. 101–107.
17. *Кривцун М. Г.* Интегральные уравнения взаимосвязанной задачи термоупругости для бесконечной плоскости с криволинейными трещинами // *Докл. АН УССР. Сер. А.* – 1984. – № 9. – С. 36–39.
18. *Мартиняк Р. М.* Механотермодифузійна взаємодія тіл з контактнo-поверхневими неоднорідностями і дефектами: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.02.04 / Інститут прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – Львів, 2000. – 41 с.
19. *Мартиняк Р. М.* Термічне розкриття початково закритої міжфазної тріщини за неідеального теплового контакту її берегів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1999. – **35**, № 5. – С. 14–22.
20. *Матчинські М., Мартиняк Р.* Термопружність тіла з тріщиною, заповненою стисливим газом, з урахуванням контакту її берегів // *Сучасні проблеми механіки і математики: Матеріали міжнар. конф., Львів, 25–28 травня 1998.* – Львів, 1998. – С. 173.
21. *Матчинські М., Нагалка С., Мартиняк Р.* Дослідження термічних напружень в тілі з закритою тріщиною із врахуванням шорсткості її поверхонь // *Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: В 2 т.* – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики НАН України, 2000. – Т. 2. – С. 35–38.
22. *Підстригач Я. С.* Умови теплового контакту твердих тіл // *Доп. АН УРСР.* – 1963. – № 7. – С. 872–874.
23. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // *Инж.-физ. журн.* – 1963. – **6**, № 10. – С. 129–136.
24. *Подстригач Я. С., Кит Г. С.* Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин // *Тепловые напряжения в элементах конструкций.* – 1967. – Вып. 7. – С. 194–201.
25. *Хай М. В.* Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. – К.: *Наук. думка*, 1993. – 256 с.
26. *Шльков Ю. Н., Ганин Е. А., Царевский С. Н.* Контактное термическое сопротивление. – М.: *Энергия*, 1977. – 328 с.
27. *Kit H. S., Martyniak R. M.* Influence of heat flow on deformability of bimetals with interface cracks with contacting thermoresistant faces // *3<sup>rd</sup> EUROMECH Solid Mechanics Conf., Stockholm (Sweden), August 18–22, 1997: Abstracts.* – P. 144.
28. *Kit H. S., Martyniak R. M.* Thermal initialization of plastic strips near closed interface crack // *II Polish–Ukrainian Conf. «Current problems of mechanics of nonhomogeneous media»: Abstracts.* – Warszawa, 1997. – P. 26–28.
29. *Kit H. S., Martyniak R. M.* Thermal opening of an initially closed interface crack with allowance for contact thermal resistance // *19<sup>th</sup> Int. Congr. Theor. and Appl. Mech.: Abstracts.* – Kyoto (Japan), 1996. – P. 624.
30. *Kit H., Martyniak R., Kryshchak A.* Growth of plastic zones due to heat loading near a closed interface crack // *J. Theor. and Appl. Mech.* – 1998. – **36**, No. 2. – P. 249–261.
31. *Kit H., Martyniak R., Nagalka S., Matczyński M.* Termosprężyste zagadnienie zamkniętej szczeliny międzyfazowej w ośrodku sprężystym // *VIII Krajowa konf. mechaniki pękania: Zesz. nauk.* – Kielce-Cedzyna, 2001. – P. 297–304.
32. *Martyniak R., Matczyński M., Nagalka S.* Non-linear contact problem of thermoelasticity for an interface crack // *Therm. Stresses-2003: Proc. 5<sup>th</sup> Int. Congr. on Thermal Stresses, Blacksburg (VA, USA), June 8–11, 2003.*
33. *Matczyński M., Martyniak R.* Termosprężyste zagadnienie zamkniętej szczeliny międzyfazowej z oporem termicznym zależnym od ciśnienia // *Zesz. nauk. Politechniki Świętokrzyskiej.* – No. 68/1999. – *Mechanika.* – S. 41–47.
34. *Matczyński M., Martyniak R., Kryshchak A.* Contact problem of a crack filled with heat-conducting gas // *Therm. Stresses'99: Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Congr. on Thermal Stresses, Cracow (Poland), June 13–17, 1999.* – Cracow: Cracow Univ. of Techn., 1999. – P. 127–130.
35. *Matczyński M., Martyniak R., Kryshchak A.* Thermal stresses in a composite weakened by an interface crack with non-ideal thermal contact of its faces // *4<sup>th</sup> EUROMECH Solid Mechanics Conf., Metz (France), June 26–30, 2000: Abstracts.* – Vol. II. – P. 251.

## ТЕРМОУПРУГОСТЬ СТРУКТУР С ТЕПЛОПРОВОДНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Статья посвящена обзору результатов, полученных в Институте прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины в области исследования термоупругого поведения тел с трещинами, проводящими тепло. Рассмотрены модели теплопередачи между поверхностями раскрытой или закрытой трещины. Приведены математические методы решения контактных задач теплопроводности и термоупругости для внутренних трещин в однородных средах и межфазных трещин в кусочно-однородных. Проанализированы контактные явления, обусловленные проводимостью трещин и налеганием их поверхностей.

## THERMOELASTICITY OF STRUCTURES WITH HEAT CONDUCTIVE CRACKS

The paper presents a survey of results obtained in Pidstryhach Institute of applied problems of mechanics and mathematics of NASU in the field of investigation of thermomechanical behavior of solids with heat conductive cracks. The models of heat transfer between the faces of both opened and closed cracks are considered. The mathematical methods of solving the problems of heat diffusion and problems of thermoelasticity for internal cracks within homogeneous media are presented. The phenomena caused by the presence of heat transfer through the cracks and by contact of their faces are analyzed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
15.04.03