

**МЕТОД ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЗАДАЧАХ СТАТИКИ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ІЗ РОЗРІЗАМИ Й ОТВОРАМИ**

*Стаття присвячена аналізу різних підходів до побудови системи граничних інтегральних рівнянь для ортотропних оболонок із розрізами та отворами довільної конфігурації.*

Інтенсивне використання тонкостінних оболонкових конструкцій різноманітної конфігурації в різних галузях сучасного машинобудування (авіаційній і космічній техніці, хімічному машинобудуванні, суднобудуванні тощо) ставить перед дослідниками багато складних питань, пов'язаних з визначенням міцності оболонок при наявності концентраторів напружень різного походження.

Аналіз літературних джерел показує, що більшість існуючих підходів до розв'язання задачі про напружено-деформований стан поблизу отворів і розрізів у пластинах і оболонках базуються на окремих припущеннях і обмеженнях на геометричні та пружні властивості оболонок [1, 3, 4, 6–9, 11–14, 38, 40–59, 63–65, 75–99]. Тому необхідність розробки універсального методу розв'язування, що враховував би всі властивості оболонок і був зручним при практичних розрахунках, стає очевидною.

Найбільш перспективним для цієї мети є метод граничних інтегральних рівнянь, за допомогою якого розв'язання двовимірних задач можна звести до розв'язання граничних інтегральних рівнянь (сингулярних чи регулярних).

Першим метод граничних інтегральних рівнянь застосував Д. І. Шерман [74] для дослідження напруженого стану пластини з отворами. У теорії оболонок одними з перших у цьому напрямку були роботи Б. Н. Фрадліна, С. М. Шахновського [59], Н. І. Ремізової [52], М. О. Кільчевського та його учнів [35, 36] (при побудові ядер інтегральних рівнянь за фундаментальні розв'язки вони використовували розв'язки, що відповідають тонкій пластині), а також Д. В. Вайнберга й А. Л. Синявського [3, 4]. Надалі метод інтегральних рівнянь при розв'язуванні аналогічних задач використовували С. П. Гавеля [6–9, 54], Е. Б. Гансен [92, 93], Дж. Л. Сандерс [94, 97], М. П. Саврук [55]. Цей метод не знайшов широкого застосування при дослідженні оболонок з отворами через труднощі при побудові ядер.

Однак основні результати в напрямку дослідження напружено-деформованого стану оболонок із тріщинами були одержані саме методом граничних інтегральних рівнянь. Для того щоб звести вихідну задачу до системи граничних інтегральних рівнянь, звичайно використовують інтегральне перетворення Фур'є (одновимірне – для сферичних і циліндричних оболонок і двовимірне – для оболонок довільної гауссової кривини).

Перші розв'язки для оболонок окремого вигляду: сферичної оболонки з меридіональною [89, 91] і циліндричних оболонок з поздовжньою [90] та поперечною [89] тріщинами, що перебувають під тиском, були отримані Е. С. Фоліасом у 1965–67 роках. Застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є, автор звів задачу до системи сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші.

У 1966–1967 рр. С. Я. Ярема і М. П. Саврук [79] незалежно від Е. С. Фоліаса розглянули симетричну задачу про напружений стан циліндричної оболонки з поздовжньою чи поперечною тріщинами. У своїх дослідженнях вони використовували той самий метод, що й Е. С. Фоліас. Цими ж авторами розглянута циліндрична оболонка з довільно орієнтованою тріщиною [80] і полога ізотропна оболонка довільної двоякої кривини з розрізом «малої» довжини вздовж лінії кривини [76–78, 80]. Отримані ними результати до-

кладно викладені в монографії В. В. Панасюка, М. П. Саврука, О. П. Дацишин [50]. Тут же наведено коефіцієнти інтенсивності в другому наближенні для циліндричної і сферичної оболонок з «малими» тріщинами і коефіцієнти інтенсивності в першому наближенні для оболонок двоякої кривини з довільно орієнтованою тріщиною і наведено огляд виконаних у 1965–75 рр. досліджень стосовно до тріщин в оболонках.

У 1976 році Дж. Г. Сіммондс, М. Р. Бредлі [95] розглянули положу ізотропну оболонку двоякої кривини, що містить «коротку» тріщину, орієнтовану вздовж лінії кривини серединної поверхні оболонки. За допомогою подвійного перетворення Фур'є і формули Остроградського вони звели вихідні рівняння до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь і одержали розв'язок шляхом розвинення ядер рівнянь за малим параметром. Ними отримано формули для коефіцієнтів інтенсивності в першому наближенні. Пізніше Дж. Г. Сіммондс, М. Р. Бредлі, Дж. В. Нікольсон [96] розглянули положу ізотропну оболонку, що має «коротку» прямолінійну тріщину, яка утворює довільний кут з напрямками кривини серединної поверхні.

У монографії М. П. Саврука [55] запропоновано методу зведення задач про концентрацію напружень у пологих ізотропних оболонках із криволінійними тріщинами до сингулярних інтегральних рівнянь та отримано в першому наближенні коефіцієнти інтенсивності мембранних зусиль для оболонки з дугоподібною тріщиною і для оболонки з малим круговим отвором.

Симетрична задача для спеціально ортотропної циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною була розглянута Г. Абе [1], Ф. Е. Ердоганом, М. Ратвані, У. Юсеоглю [88], антисиметрична – У. Юсеоглю, Ф. Е. Ердоганом [99]. Використовуючи перетворення Фур'є, автори звели задачу до системи двох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Коші, розв'язок яких подавався у вигляді рядів за поліномами Чебишева.

У роботах Ф. Ділейла, Ф. Е. Ердогана [82, 84] розглянуто ізотропні та спеціально-ортотропні циліндричні та сферичні оболонки з тріщиною вздовж лінії кривини та циліндричні оболонки з довільно орієнтованою тріщиною (О. С. Ягсі, Ф. Е. Ердоган [98]), а також пологі оболонки двоякої кривини [83] на основі теорії Рейснера, що враховує деформацію поперечного зсуву.

Уперше симетрична задача для ізотропної циліндричної оболонки, що містить дві осьові колінеарні тріщини однакової довжини, була розглянута Ф. Е. Ердоганом [86] і Ф. Е. Ердоганом, М. Ратвані [87] у 1974 р.

Суттєві результати при дослідженні взаємовпливу прямолінійних тріщин у сферичних і циліндричних оболонках з розрізами вздовж ліній головних кривин отримано методом *дисторсій*, розробленим у роботах Я. С. Підстригача, В. А. Осадчука, Є. М. Федюка, М. М. Николишина [40, 51]. Цей метод базується на тому, що оболонку з розрізами моделюють суцільною оболонкою, яка перебуває під дією дисторсій, які описують стрибки переміщень і кутів повороту на лініях, що відповідають розрізам. Це дозволяє звести вихідну крайову задачу до системи сингулярних інтегральних рівнянь типу Коші.

За допомогою методу дисторсій була досліджена пружна рівновага циліндричних оболонок з поздовжніми і поперечними розрізами, причому за вихідні використовували рівняння пологих ізотропних оболонок [47, 48, 58] (В. А. Осадчук, Є. М. Федюк), рівняння загальної моментної теорії ізотропних і трансверсально-ізотропних замкнених циліндричних оболонок [41, 44, 45] (В. А. Осадчук, М. М. Николишин), рівняння моментної технічної теорії ізотропних циліндричних оболонок (Я. С. Підстригач, В. А. Осадчук, Є. М. Федюк, М. М. Николишин).

У перерахованих вище роботах Я. С. Підстригача, В. А. Осадчука, Є. М. Федюка і М. М. Николишина використовувалися рівняння рівноваги циліндричної оболонки в переміщеннях. У роботах В. А. Осадчука та

І. С. Костенко (Ярмошук) [38, 43, 49] досліджено пружну рівновагу ізотропних і спеціально-ортотропних (при тих самих обмеженнях на модуль зсуву  $G_{12}$ , що й у роботах Ф. Е. Ердогана) замкнених циліндричних оболонок з використанням комплексного перетворення Новожилова, що дозволяє вдвічі знизити порядок вихідних диференціальних рівнянь і тим самим спростити процедуру побудови аналітичних розв'язків.

Метод дисторсій також використовувався у роботах В. А. Осадчука й Є. М. Федюка для дослідження напруженого стану пологих сферичних оболонок з одним, двома колінеарними й чотирма хрестоподібно розміщеними розрізами.

Докладний опис зазначених результатів наведено в монографії В. А. Осадчука [42], а також в оглядовій статті В. А. Осадчука, Я. С. Підстригача [46], у якій також подано огляд досліджень напружено-деформованого стану і граничної рівноваги оболонок із тріщинами за період до 1985 р.

При використанні методу граничних інтегральних рівнянь найсуттєвіші труднощі виникають при побудові ядер граничних інтегральних рівнянь. Саме цим і була зумовлена відсутність розв'язків для загального випадку ортотропії матеріалу оболонки без обмежень на її кривину.

Отримані в роботах В. П. Шевченка фундаментальні розв'язки рівнянь статки пологих ортотропних оболонок і розроблена ним методика побудови інтегральних зображень внутрішніх силових величин [60–62, 66, 67] надали можливість використати метод граничних інтегральних рівнянь для розширення кола розглянутих задач у напрямки різної геометрії оболонок, її матеріалу, розмірів, конфігурації і кількості розрізів і отворів.

У роботах авторів [14, 15, 23, 30, 33, 34, 70, 71, 73] з використанням математичного апарату, що базується на теорії узагальнених функцій, інтегральних перетвореннях Фур'є, теорії фундаментальних розв'язків і спеціальних функцій, було отримано декілька варіантів систем граничних інтегральних рівнянь для ортотропних оболонок довільної кривини з розрізами та отворами довільної конфігурації.

**1. Постановка задачі.** Розглядається тонка пружна ортотропна оболонка сталої товщини  $h$ , виготовлена з ортотропного матеріалу, така, що в кожній її точці лінії головних кривин серединної поверхні збігаються з головними напрямками пружності матеріалу. Система ортогональних координат  $(x, y, z)$  вибрана таким чином, що координати  $x, y$  орієнтовані вздовж ліній головних кривин серединної поверхні оболонки, а координата  $z$  спрямована по нормалі до неї. Оболонка послаблена системою отворів і розрізів довільної конфігурації (рис. 1), розміри яких є великими порівняно з товщиною оболонки, але малими порівняно з її іншими лінійними розмірами. Це дозволяє розглядати задачу про рівновагу тонкої оболонки з розрізами й отворами за допомогою двовимірної теорії оболонок. У рамках цієї теорії тріщини моделюються як математичні розрізи серединної поверхні оболонки.

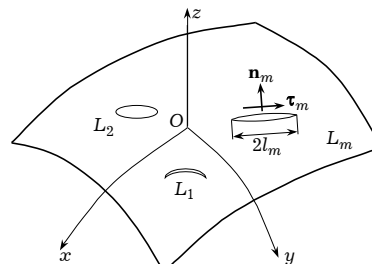


Рис. 1

Позначимо гладкі ділянки контурів розрізів і отворів через  $L_m$ ,  $m = \overline{1, N}$ . Запишемо рівняння для  $L_m$  у вигляді

$$x = \alpha_m(s), \quad y = \beta_m(s), \quad s \in [-\ell_m, \ell_m], \quad (1)$$

де  $\ell_m$  – напівдовжина контуру  $L_m$ .

Серединна поверхня оболонки є багатозв'язною областю, обмеженою зовнішнім контуром  $L_0$  і контурами  $L_m$ ,  $m = \overline{1, N}$ .

З огляду на лінійність задачі напружений стан в оболонці подамо у вигляді суми напруженого стану в оболонці без розрізів і отворів при заданому зовнішньому навантаженні (яке вважаємо відомим і відповідні величини будемо позначати індексом «\*») і шуканого додаткового (збуреного) напруженого стану, викликаного наявністю розрізів і отворів.

Принципово цей підхід дає можливість вивчати вплив границі  $L_0$  на отвір чи розріз, однак надалі будемо вважати, що відстань між отворами, тріщинами й зовнішнім контуром є великою порівняно з їх розмірами й збурений напружений стан практично не досягає зовнішньої границі  $L_0$ .

Замість нульових граничних умов на контурі  $L_0$  поставимо спрощені умови зникнення збуреного напруженого стану при необмеженому віддаленні від  $L_m$ ,  $m = \overline{1, N}$ , а область, яку займає оболонка, будемо вважати нескінченною.

Припустимо, що контури розрізів і отворів вільні від навантаження і в процесі деформування оболонки береги розрізів не контактують між собою. Тоді граничні умови мають вигляд

$$T_{n_m} \Big|_{L_m} = 0, \quad S_{n\tau_m} \Big|_{L_m} = 0, \quad M_{n_m} \Big|_{L_m} = 0, \quad Q_{n_m} \Big|_{L_m} = 0, \quad m = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Якщо контур  $L_m$  є криволінійним розрізом, для забезпечення єдиності розв'язку необхідно, щоб виконувались додаткові умови на кінцях розрізу

$$[\mathbf{u}]_{L_m} \Big|_{s=\pm\ell_m} = 0, \quad [\theta_j]_{L_m} \Big|_{s=\pm\ell_m} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

де  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  – вектор переміщень;  $\theta_1, \theta_2$  – кути повороту;  $[f]_{L_m} = f^+ - f^-$  – стрибок функції  $f$  на контурі  $L_m$  (для отворів будемо вважати  $f^- = 0$ ).

У випадку отвору з замкненим гладким контуром  $L_m$  повинні виконуватись умови

$$\mathbf{u} \Big|_{L_m, s=\ell_m} = \mathbf{u} \Big|_{L_m, s=-\ell_m}, \quad \theta_j \Big|_{L_m, s=\ell_m} = \theta_j \Big|_{L_m, s=-\ell_m}, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

Умови неперервності переміщень і кутів повороту в точках перетину контурів  $L_m$  і  $L_n$  мають вигляд

$$\mathbf{u} \Big|_{L_m, s=\pm\ell_m} = \mathbf{u} \Big|_{L_n, s=\mp\ell_n}, \quad \theta_j \Big|_{L_m, s=\pm\ell_m} = \theta_j \Big|_{L_n, s=\mp\ell_n}, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

Для оболонок із концентраторами напружень (отвори, розрізи, включення тощо) збурений напружений стан має локальний характер. Усередині зони збурення величини, що його характеризують, є швидкозагасаючими функціями координат, тому для їхнього опису використано рівняння напружених станів з великим показником змінюваності, що збігаються з рівняннями пологих оболонок. За вихідні використовувалися рівняння теорії пологих ортотропних оболонок, отримані С. А. Амбарцумяном [2].

При побудові інтегральних зображень використовувалися інтегральні зображення і фундаментальні розв'язки рівнянь статки пологих ортотропних оболонок, отримані в роботах В. П. Шевченка [66, 67].

**2. Система сингулярних інтегральних рівнянь типу Коші з неінтегральними доданками.** Найбільші труднощі при використанні інтегрального перетворення Фур'є виникають, коли доводиться обчислювати оригінали ядер інтегральних рівнянь.

Вибір невідомих функцій у вигляді комбінації стрибків переміщень, їх похідних і інтегралів від них дозволив одержати в явному вигляді ядра інтегральних рівнянь [15, 27, 30, 33, 71].

Задача була зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь типу Коші з неінтегральними доданками

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^N \int_{-\ell_p}^{\ell_p} \sum_{j=1}^4 \mathcal{K}_{ij}((\alpha_m(t) - \alpha_p(s)) / \chi, \beta_m - \beta_p) \psi_{jp}(s) ds = \pi \Phi_{im}^*(t) + \\ + \sum_{p=1}^N \tilde{P}_i((\alpha_m(t) - \alpha_p(\ell_p)) / \chi, \beta_m - \beta_p) \int_{-\ell_p}^{\ell_p} [(\lambda n_{2p}(s) \alpha_p(s) - n_{1p} \beta_p) \psi_{3p}(s) - \\ - (\lambda n_{1p}(s) \alpha_p(s) + n_{2p} \beta_p) \psi_{4p}(s)] ds, \\ t \in (-\ell_m, \ell_m), \quad i = \overline{1, 4}, \quad m = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (6)$$

Методика обчислення оригіналів ядер інтегральних рівнянь аналогічна розробленій В. П. Шевченком для виведення оригіналів фундаментальних розв'язків рівнянь статички пологих ортотропних оболонок. Ядра мають вигляд подвійних рядів, які містять спеціальну функцію

$$\begin{aligned} G_{n,v}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{v-n} K_{v+n}(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(v+k)}{(n-k)!} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k}, \\ n > 0, \quad \operatorname{Re} v > -1, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $K_v(z)$  – модифікована функція Бесселя другого роду порядку  $v$ .

Невідомі функції мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi_{1p}(s) = \frac{Eh(1-\mu)}{4a} \left[ \frac{\partial}{\partial s} [u_{n_p}]_{L_p} - k_p [u_{\tau_p}]_{L_p} + \frac{2(1-\lambda)}{R_2} n_{1p} n_{2p} [w]_{L_p} + \right. \\ \left. + R_2^{-1} \int_{-\ell_p}^s \left( (\lambda n_{2p}^2 + n_{1p}^2) ([\theta_{n_p}]_{L_p} - 2k_p [w]_{L_p}) + k_p (1+\lambda) [w]_{L_p} \right) ds \right], \\ \psi_{2p}(s) = \frac{Eh(1-\mu)}{4a} \left( \frac{\partial}{\partial s} [u_{\tau_p}]_{L_p} + k_p [u_{n_p}]_{L_p} + \frac{\lambda n_{2p}^2 + n_{1p}^2}{R_2} [w]_{L_p} \right), \\ \psi_{3p}(s) = \frac{D(1-\nu)}{4a} c^2 R_2 \left( \frac{\partial}{\partial s} [\theta_{n_p}]_{L_p} + k_p \frac{\partial}{\partial s} [w]_{L_p} \right), \\ \psi_{4p}(s) = \frac{D(1-\nu)}{4a} c^2 R_2 \left( \frac{\partial^2}{\partial s^2} [w]_{L_p} - k_p [\theta_{n_p}]_{L_p} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{де } E = \sqrt{E_1 E_2}, \quad \nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}, \quad E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1, \quad \mu = 1 - 2(1+\nu) G_{12} / E,$$

$$a = (2 - \mu + \mu \nu) / 2, \quad c^2 = \sqrt{12(1 - \nu^2)} / R_2 h, \quad \lambda = R_2 / R_1,$$

$E_1, E_2$  – модулі Юнга;  $\nu_1, \nu_2$  – коефіцієнти Пуассона;  $G_{12}$  – модуль зсуву для площин, паралельних до серединної поверхні оболонки;  $R_1, R_2$  – радіуси головних кривин оболонки;  $k_p$  – кривина контуру  $L_p$ .

У результаті введення додаткових доданків у невідомих функціях інтегральні зображення внутрішніх зусиль та моментів і, отже, система граничних інтегральних рівнянь, містять неінтегральні доданки. Якщо контур отвору чи розрізу має кутові точки, у співвідношеннях (7) появляться ще й інші додаткові доданки.

Для забезпечення єдиності розв'язку системи до неї слід додати  $4N$  додаткових обмежень на невідомі функції:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\ell_p}^{\ell_p} [n_{1p}(s)\psi_{3p}(s) + n_{2p}(s)\psi_{4p}(s)] ds = 0, \\
& \int_{-\ell_p}^{\ell_p} [n_{2p}(s)\psi_{3p}(s) - n_{1p}(s)\psi_{4p}(s)] ds = 0, \\
& \int_{-\ell_p}^{\ell_p} \left\{ n_{1p}(s)\psi_{1p}(s) - n_{2p}(s)\psi_{2p}(s) - \frac{c^2(1-\mu)}{2(1-\nu)} [n_{1p}(s)\psi_{3p}(s) + \right. \\
& \quad \left. + n_{2p}(s)\psi_{4p}(s)] [\beta_p^2(s) - \lambda\alpha_p^2(s) + 2\beta_p(s)\beta_p(\ell_p)] + \right. \\
& \quad \left. + 2\lambda\alpha_p(s)[\beta_p(s) + \beta_p(\ell_p)][n_{1p}(s)\psi_{4p}(s) - n_{2p}(s)\psi_{3p}(s)] \right\} ds = 0, \\
& \int_{-\ell_p}^{\ell_p} \left\{ n_{2p}(s)\psi_{1p}(s) + n_{1p}(s)\psi_{2p}(s) + \frac{c^2(1-\mu)}{2(1-\nu)} [n_{2p}(s)\psi_{3p}(s) - \right. \\
& \quad \left. - n_{1p}(s)\psi_{4p}(s)] [\beta_p^2(s) - \lambda\alpha_p^2(s) + 2\beta_p(s)\beta_p(\ell_p)] + \right. \\
& \quad \left. + 2\beta_p(s)[\alpha_p(s) - \alpha_p(\ell_p)][n_{1p}(s)\psi_{3p}(s) + n_{2p}(s)\psi_{4p}(s)] \right\} ds = 0, \quad (9)
\end{aligned}$$

які впливають з умов неперервності переміщень і кутів повороту на кінцях розрізів та при обході контуру отвору (3), (4).

Додаткові доданки не впливають на характер поведінки невідомих функцій на кінцях контуру у випадку криволінійного розрізу і, отже, не створюють додаткових проблем при обчисленні коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів. Коефіцієнти концентрації зусиль і моментів на контурі отвору обчислюються за допомогою інтегральних зображень відповідних величин.

**3. Система сингулярних інтегральних рівнянь без неінтегральних доданків.** Аналітичні викладки суттєво спрощуються, якщо вважати невідомими на кожному контурі не чотири функції, як це прийнято, а п'ять і задавати невідомі функції  $\Psi_{jp}(t)$  у вигляді [15, 17, 18, 20, 23, 27, 34, 68, 73]

$$\begin{aligned}
\Psi_{1p} &= \frac{Eh(1-\mu)}{a} \left( n_{1p} \frac{\partial [u]_{L_p}}{\partial y} - n_{2p} \varepsilon_1 \right), \\
\Psi_{2p} &= \frac{Eh(1-\mu)}{a} \left( n_{1p} \varepsilon_2 - n_{2p} \frac{\partial [v]_{L_p}}{\partial x} \right), \\
\Psi_{3p} &= \frac{Eh(1-\mu)}{a} \frac{1}{c^2 R_2} \left( n_{1p} \frac{\partial [\theta_1]_{L_p}}{\partial y} - n_{2p} \chi_1 \right), \\
\Psi_{4p} &= \frac{Eh(1-\mu)}{a} \frac{1}{c^2 R_2} \left( n_{1p} \chi_2 - n_{2p} \frac{\partial [\theta_2]_{L_p}}{\partial x} \right), \\
\Psi_{5p} &= \frac{Eh(1-\mu)}{a} \frac{1}{c R_2} [n_{1p} [\theta_1]_{L_p} + \lambda n_{2p} [\theta_2]_{L_p}]. \quad (10)
\end{aligned}$$

Введення на кожній ділянці контуру додаткової невідомої функції дозволяє позбутися неінтегральних доданків і суттєво спростити структуру ядер, однак, збільшує розмірність системи інтегральних рівнянь.

У роботах [22, 28–33, 63–65, 69–72] використовувався традиційний варіант вибору граничних умов: на контурі розрізу чи отвору задаються зусилля і моменти, а отримана в результаті система сингулярних інтегральних рівнянь має особливість типу Коші. Для поліпшення структури інтегральних рівнянь у роботах [15, 17, 18, 20, 23, 27, 34, 68, 73] запропоновано новий варіант вибору граничних умов: на контурі розрізів чи отворів задаються компоненти головного вектора зусиль і моментів, що діють уздовж частини контуру змінної довжини.

Отримана в результаті система граничних інтегральних рівнянь

$$\sum_{p=1}^N \int_{-\ell_p}^{\ell_p} \sum_{j=1}^5 \mathcal{K}_{ij}((\alpha_m(t) - \alpha_p(s)) / \chi, \beta_m - \beta_p) \Psi_{jp}(t) dt = \pi \Phi_{im}^*(s),$$

$$s \in (-\ell_m, \ell_m), \quad i = \overline{1, 4}, \quad m = \overline{1, N}, \quad (11)$$

має логарифмічну особливість, матриця ядер симетрична.

Кількість невідомих функцій у системі граничних інтегральних рівнянь (11) перевищує кількість рівнянь. Для забезпечення єдиності розв'язку необхідно додати ще по одному рівнянню на кожному контурі, які будуть відображати зв'язок між невідомими функціями. Ці додаткові рівняння можна вибирати у вигляді диференціального співвідношення

$$\frac{d^2 \Psi_{5p}}{dt^2} = c \left[ \left( n_{1p} \frac{d\Psi_{3p}}{dt} + \lambda n_{2p} \frac{d\Psi_{4p}}{dt} \right) + 2k_p (-n_{2p} \Psi_{3p} + \lambda n_{1p} \Psi_{4p}) - \right. \\ \left. - \frac{dk_p}{dt} \frac{n_{1p} \Psi_{3p} + \lambda n_{2p} \Psi_{4p}}{k_p} \right] - k_p^2 \Psi_{5p} + \frac{1}{k_p} \frac{d\Psi_{5p}}{dt} \frac{dk_p}{dt}, \quad (12)$$

чи інтегрального

$$\Psi_{5p}(t) = c \left( n_{1p}(t) \int_{-\ell_p}^t \Psi_{3p} ds + \lambda n_{2p}(t) \int_{-\ell_p}^t \Psi_{4p} ds + \right. \\ \left. + n_{1p}(t) \theta_1(-\ell_p) + \lambda n_{2p}(t) \theta_2(-\ell_p) \right). \quad (13)$$

Для розрізу з гладким контуром, з огляду на неперервність кутів повороту на його кінцях, додаткове співвідношення можна записати в простішому вигляді

$$\Psi_{5p}(t) = c \left( n_{1p}(t) \int_{-\ell_p}^t \Psi_{3p} ds + \lambda n_{2p}(t) \int_{-\ell_p}^t \Psi_{4p} ds \right). \quad (14)$$

Система граничних інтегральних рівнянь (11) містить невідомі сталі інтегрування по шість на кожному контурі. Для їх визначення до системи (11) слід додати ще  $6N$  додаткових співвідношень

$$\int_{L_p} \Psi_{3p} dt = 0, \quad \int_{L_p} \Psi_{4p} dt = 0, \\ \int_{L_p} [\Psi_{5p} - c(\lambda \alpha_p \Psi_{4p} - \beta_p \Psi_{3p})] dt = 0, \\ \int_{L_p} [\alpha_p \Psi_{3p} + \beta_p \Psi_{4p}] dt = 0, \\ \int_{L_p} \left[ \Psi_{1p} - \frac{c^2}{2} \left( (\beta_p^2 - \lambda \alpha_p^2) \Psi_{3p} - 2\lambda \alpha_p \beta_p \Psi_{4p} + 2 \frac{\beta_p}{c} \Psi_{5p} \right) \right] dt = 0,$$

$$\int_{L_p} \left[ \Psi_{2p} + \frac{c^2}{2} \left( \beta_p^2 - \lambda \alpha_p^2 \right) \Psi_{4p} + 2\alpha_p \beta_p \Psi_{3p} + 2\frac{\alpha_p}{c} \Psi_{5p} \right] dt = 0, \quad (15)$$

які впливають з умов неперервності переміщень і кутів повороту на кінцях розрізів і при обході контуру отворів.

**4. Система сингулярних інтегральних рівнянь для прямолінійного контуру.** У випадку прямолінійного контуру немає необхідності вводити додаткову невідому функцію і тим самим збільшувати розмірність системи інтегральних рівнянь.

Для прямолінійного розрізу кривина його контуру дорівнює нулю, тому вигляд невідомих функцій (8) значно спрощується:

$$\begin{aligned} \Psi_{1p}(s) &= \frac{Eh(1-\mu)}{4a} \left( \frac{\partial}{\partial s} [u_{n_p}]_{L_p} + \frac{2(1-\lambda)}{R_2} n_{1p} n_{2p} [w]_{L_p} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda n_{2p}^2 + n_{1p}^2}{R_2} \int_{-\ell_p}^s [\theta_{n_p}]_{L_p} ds \right), \\ \Psi_{2p}(s) &= \frac{Eh(1-\mu)}{4a} \left( \frac{\partial}{\partial s} [u_{\tau_p}]_{L_p} + \frac{\lambda n_{2p}^2 + n_{1p}^2}{R_2} [w]_{L_p} \right), \\ \Psi_{3p}(s) &= \frac{D(1-\nu)}{4a} c^2 R_2 \frac{\partial}{\partial s} [\theta_{n_p}]_{L_p}, \\ \Psi_{4p}(s) &= \frac{D(1-\nu)}{4a} c^2 R_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} [w]_{L_p}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для оболонки, послабленої симетрично розміщеними тріщинами, що перебувають під дією симетричного навантаження, невідомі функції доцільніше вибрати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{1p}(s) &= \frac{Eh(1-\mu)}{4a} \left( \frac{\partial}{\partial s} [u_{n_p}]_{L_p} + \frac{2(1-\lambda)}{R_2} n_{1p} n_{2p} [w]_{L_p} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda n_{2p}^2 + n_{1p}^2}{R_2} \int_0^s [\theta_{n_p}]_{L_p} ds \right), \\ \tilde{\Psi}_{2p}(s) &= \frac{Eh(1-\mu)}{4a} \left( \frac{\partial}{\partial s} [u_{\tau_p}]_{L_p} + \frac{\lambda n_{2p}^2 + n_{1p}^2}{R_2} [w]_{L_p} \right), \\ \tilde{\Psi}_{3p}(s) &= \frac{D(1-\nu)}{4a} c^2 R_2 \frac{\partial}{\partial s} [\theta_{n_p}]_{L_p}, \\ \tilde{\Psi}_{4p}(s) &= \frac{D(1-\nu)}{4a} c^2 R_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} [w]_{L_p}. \end{aligned} \quad (17)$$

При такому виборі невідомих функцій у випадку симетричної задачі кількість невідомих скорочується наполовину.

Для прямолінійних розрізів напрямні косинуси вектора зовнішньої нормалі є сталими. Тому ядра інтегральних зображень внутрішніх зусиль і моментів можна одержати в явному вигляді і при іншому виборі невідомих функцій:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{1p}(s) &= \frac{Eh(1-\mu)}{4a} \left( \frac{\partial}{\partial s} [u_{n_p}]_{L_p} + \frac{2(1-\lambda)}{R_2} n_{1p} n_{2p} [w]_{L_p} \right), \\ \hat{\Psi}_{2p}(s) &= \frac{Eh(1-\mu)}{4a} \left( \frac{\partial}{\partial s} [u_{\tau_p}]_{L_p} + \frac{\lambda n_{2p}^2 + n_{1p}^2}{R_2} [w]_{L_p} \right), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_{3p}(s) &= \frac{D(1-\nu)}{4a} c^2 R_2 \frac{\partial}{\partial s} [\theta_{n_p}]_{L_p}, \\ \hat{\Psi}_{4p}(s) &= \frac{D(1-\nu)}{4a} c^2 R_2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} [w]_{L_p}.\end{aligned}\quad (18)$$

Застосування формул (18) не призводить до появи неінтегральних доданків в інтегральних рівняннях і виявляється у багатьох випадках ефективнішим, ніж використання формул (16) чи (17).

**Чисельні дослідження для ортотропних оболонок із розрізами й отворами.** Для рівнянь з ядрами типу Коші (для розрізів) і Гільберта (для отворів) існують ефективні квадратурні формули [37, 39, 56], які використовувалися при чисельному розв'язанні систем граничних інтегральних рівнянь з відповідною особливістю в роботах [22, 24, 28, 29, 31–33, 71, 72].

У роботах [25, 26] наведено квадратурні формули для інтегралів з логарифмічною особливістю, аналогічні квадратурним формулам [37, 39, 56]. Для забезпечення єдиності розв'язку задачі і визначення додаткових констант інтегрування, що появляються в інтегральних рівняннях у результаті перетворення граничних умов, використовувалися додаткові обмеження на невідомі функції, отримані з умов неперервності переміщень і кутів повороту при обході контуру отвору та на кінцях розрізу. Збіжність методу перевірена на тестових задачах, що мають відомий в літературі розв'язок.

На основі розробленої методики проведено чисельні дослідження для ортотропних оболонок із круговим і еліптичним отворами [15, 17, 19, 21, 34, 68], для ортотропних пластин і оболонок з дуговим і еліптичним розрізами [27, 70], отримано методом малого параметра в першому наближенні коефіцієнти інтенсивності для ізотропної оболонки з дуговим розрізом [30], досліджено взаємний вплив двох тріщин, орієнтованих уздовж ліній головних кривин в ортотропних оболонках довільної гауссової кривини [22, 28, 31–33], і досліджена похибка застосування теорії спеціальної ортотропії при розв'язанні задач для ортотропних оболонок з розрізами й отворами [29, 69, 71, 72].

1. Абэ Г. Распределение напряжений в окрестности линейной трещины в ортотропной цилиндрической оболочке // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. – 1969. – **35**, No. 278. – P. 1989–1996.
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
3. Вайнберг Д. В., Синявский А. Л. Приближенный расчет оболочек с вырезами методами теории потенциала // Проблемы механики сплошной среды. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 73–82.
4. Вайнберг Д. В., Синявский А. Л. Расчет оболочек. – Киев: Госстройиздат УССР, 1961. – 119 с.
5. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
6. Гавеля С. П. Періодичні задачі для пологих оболонок довільної кривини з отворами // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1969. – № 8. – С. 703–708.
7. Гавеля С. П. Шарнирное опирание и подвижное закрепление пологой сферической оболочки с отверстием // Концентрация напряжений. – 1965. – Вып. 1. – С. 90–98.
8. Гавеля С. П., Давыдов И. А. Расчет напряженно-деформированного состояния ортотропных пологих оболочек с отверстиями // Устойчивость и прочность элементов конструкций. – Днепропетр.: Изд-во Днепропетр. ун-та, 1973. – С. 176–183.
9. Гавеля С. П., Шаталов В. И. Расчет напряженного состояния ослабленной отверстием пологой сферической оболочки при помощи малых ЭВМ // Динамика и прочность машин. – 1967. – Вып. 7. – С. 122–126.
10. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1959. – 470 с.
11. Гузь А. Н. Концентрация напряжений около отверстий в тонких оболочках (обзор) // Прикл. механика. – 1969. – **5**, № 3. – С. 1–17.

12. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н. и др. Исследование по теории тонких оболочек с отверстиями (обзор) // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 11. – С. 3–37.
13. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н. и др. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с. – Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 1.
14. Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И. Концентрация напряжений около отверстий в оболочках из композитных материалов // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 2. – С. 3–44.
15. Довбня Е. Н. Деформация контура кругового отверстия в ортотропных оболочках при растягивающей нагрузке // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2000. – Вип. 1. – С. 51–55.
16. Довбня Е. Н. Исследование концентрации напряжений вблизи трещин и конструктивных прорезей в оболочечных конструкциях // Прогрессивная техника и технологии машиностроения: Тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. (Севастополь, 12–15 сент. 1995 г.). – С. 75.
17. Довбня Е. Н. Исследование напряженно-деформированного состояния ортотропной оболочки с эллиптическим отверстием // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 140–144.
18. Довбня Е. Н. Комбинирование граничных условий в задачах теории ортотропных оболочек с разрезами // Дифференц. и интегр. уравнения мат. физики и их приложения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – С. 69–72.
19. Довбня Е. Н. Концентрация напряжений около кругового отверстия в ортотропной оболочке положительной гауссовой кривизны // Прогрессивная техника и технологии машиностроения: Тр. Междунар. науч.-техн. конф. (Севастополь, сент. 1997 г.). – С. 87–88.
20. Довбня Е. Н. К оценке влияния модуля сдвига на концентрацию напряжений в ортотропной оболочке с круговым отверстием // Динам. системы. – 2001. – Вып. 17.
21. Довбня Е. Н. Напряженно-деформированное состояние ортотропной оболочки с круговым отверстием // Теорет. и прикл. механика. – 1997. – Вып. 27. – С. 154–158.
22. Довбня Е. Н. О корректности постановки симметричных задач механики полых оболочек с разрезами // Теорет. и прикл. механика. – 1988. – Вып. 19. – С. 98–100.
23. Довбня Е. Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек нулевой и отрицательной кривизны, ослабленных разрезами и отверстиями // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 1998. – Вип. 2. – С. 45–52.
24. Довбня Е. Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек положительной кривизны с разрезами и отверстиями // Теорет. и прикл. механика. – 1997. – Вып. 26. – С. 59–69.
25. Довбня Е. Н. Численное решение системы граничных интегральных уравнений с логарифмической особенностью в задачах теории оболочек с криволинейными разрезами // Прикл. проблемы мат. моделирования. – Херсон: Херсон. гос. техн. ун-т, 1999. – С. 68–70.
26. Довбня Е. Н. Численное решение системы граничных интегральных уравнений с логарифмической особенностью в задачах теории оболочек с отверстиями // Динам. системы. – 1999. – Вып. 15. – С. 122–127.
27. Довбня Е. Н., Пасечник Д. В. К исследованию концентрации напряжений в окрестности эллиптического разреза в ортотропной пластине // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2001. – Вип. 1. – С. 27–33.
28. Довбня Е. Н., Шевченко В. П. К оценке взаимовлияния системы разрезов в полых ортотропных оболочках // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 7. – С. 50–55.
29. Довбня Е. Н., Шевченко В. П. К оценке влияния геометрических и упругих параметров на напряженное состояние ортотропных оболочек с разрезами // Теорет. и прикл. механика. – 1986. – Вып. 17. – С. 74–80.
30. Довбня Е. Н., Шевченко В. П. К решению граничных задач теории ортотропных оболочек с разрезами и отверстиями произвольной конфигурации // Доп. НАН України. Сер. А. – 1995. – № 4. – С. 44–46.
31. Довбня Е. Н., Шевченко В. П. Напряженное состояние ортотропных оболочек с прямолинейным разрезом // Теорет. и прикл. механика. – 1987. – Вып. 18. – С. 63–65.
32. Довбня Е. Н., Шевченко В. П. Симметричная задача для ортотропных оболочек произвольной кривизны с системой параллельных трещин // Теорет. и прикл. механика. – 1983. – Вып. 14. – С. 52–58.

33. Довбня Е. Н., Шевченко В. П. Система прямолинейных трещин в полой ортотропной оболочке произвольной кривизны // Теорет. и прикл. механика. – 1984. – Вып. 15. – С. 48–53.
34. Довбня К. М. До питання дослідження концентрації напружень у ортотропній оболонці з отвором довільної конфігурації // Доп. НАН України. Сер. А. – 2001. – № 8. – С. 33–36.
35. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек: В 2 ч. – Киев: Изд-во АН УССР, 1963. – Ч. 1. – 354 с.
36. Кильчевский Н. А., Издебская Г. А., Киселевская Л. М. Лекции по аналитической механике оболочек. – Киев: Вища шк., 1974. – 232 с.
37. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения дифференц и интегр. уравнений и квадратурные формулы. – М.: Наука, 1964. – С. 64–74.
38. Костенко И. С. Напряженное состояние ослабленных разрезами цилиндрических оболочек конечной длины // Физ.-хим. механика материалов. – 1985. – 21, № 4. – С. 68–71.
39. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
40. Осадчук В. А. Метод дисторсий в задачах об упругом равновесии оболочек с разрезами (трещинами) // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – Вып. 10. – С. 27–50.
41. Осадчук В. А. Напряжения в замкнутой цилиндрической оболочке с системой коллинеарных трещин // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – Вып. 7. – С. 38–42.
42. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
43. Осадчук В. А., Костенко И. С. Напряженное состояние полой цилиндрической оболочки с бесконечным рядом параллельных трещин при симметричной нагрузке // Физ.-хим. механика материалов. – 1979. – 15, № 1. – С. 33–38.
44. Осадчук В. А., Николишин М. М. Напряженное состояние в замкнутой цилиндрической оболочке с системой трещин // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 4. – С. 26–31.
45. Осадчук В. А., Николишин М. М. Напряженное состояние замкнутой трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки и бесконечной пластины с трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1976. – Вып. 3. – С. 30–36.
46. Осадчук В. А., Подстригач Я. С. Напряженное состояние и предельное равновесие оболочек с трещинами // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела / ВИНТИ. – 1986. – 18. – С. 3–52.
47. Осадчук В. А., Федюк Е. М. Система продольных трещин различной длины в полой цилиндрической оболочке // Физ.-мех. поля в деформируемых средах. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 45–51.
48. Осадчук В. А., Федюк Е. М. Система произвольно ориентированных трещин в полой сферической оболочке // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 8. – С. 711–714.
49. Осадчук В. А., Ярмоцук И. С. Упругое равновесие замкнутой цилиндрической оболочки с системой периодически расположенных трещин // Физ.-мех. поля в деформируемых средах. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 51–58.
50. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
51. Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М. Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 29–41.
52. Ремизова Н. И. Применение интегральных уравнений к решению некоторых задач теории цилиндрических оболочек // Тр. конф. по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1961. – С. 110–114.
53. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
54. Савін Г. М., Гавеля С. П. Застосування методів теорії потенціалу при дослідженні концентрації напружень біля отворів в оболонках // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 4. – С. 352–356.
55. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.

56. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 248 с.
57. Синяевский А. Л. Метод потенциала для цилиндрической оболочки // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1965. – Вып. 3. – С. 4–16.
58. Федюк Е. М. Взаимодействие трещин в пологой сферической оболочке // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 2. – С. 125–129.
59. Фрадлин Б. Н., Шахновский С. М. Об определении тензора Грина для задачи о равновесии пологой оболочки // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 6. – С. 132–134.
60. Хиженяк В. К., Шевченко В. П. Действие сосредоточенных сил на анизотропные оболочки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 4. – С. 123–128.
61. Хиженяк В. К., Шевченко В. П. Напряженное состояние ортотропных оболочек, ослабленных трещинами // Докл. III нац. конгр. «Теорет. и приложна механика» (Варна, 1977). – София, 1977. – Кн. 1. – С. 604–609.
62. Хиженяк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек: Учеб. пособие. – Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1979. – 179 с.
63. Цванг В. А., Шевченко В. П. Изотропная оболочка произвольной кривизны с прямолинейной трещиной // Теорет. и прикл. механика. – 1981. – Вып. 12. – С. 60–65.
64. Цванг В. А., Шевченко В. П. Напряженное состояние ортотропной оболочки, ослабленной прямолинейной трещиной // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 12. – С. 41–44.
65. Цванг В. А., Шевченко В. П. Напряженное состояние ортотропной оболочки с прямолинейной трещиной при антисимметричном нагружении // Теорет. и прикл. механика. – 1980. – Вып. 11. – С. 55–62.
66. Шевченко В. П. Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек: Учеб. пособие. – Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1977. – 114 с.
67. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений. – К.: А. С. К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7). – С. 159–196.
68. Шевченко В. П., Гольцев А. С., Довбня Е. Н. Методы фундаментальных решений в механике тонкостенных конструкций // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – 37, № 3. – С. 21–28.
69. Шевченко В. П., Довбня Е. Н. К оценке концентрации напряжений в ортотропных оболочках с трещинами // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. – Донецк: Донец. гос. техн. ун-т, 2001. – Вып. 18. – С. 79–82.
70. Шевченко В. П., Довбня Е. Н. Ортотропная оболочка произвольной кривизны с криволинейными разрезами // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 1997. – Вип. 1. – С. 89–97.
71. Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А. Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений. – К.: А. С. К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7). – С. 212–249.
72. Шевченко В. П., Довбня Е. Н. Дослідження похибки застосування теорії спеціальної ортотропії при розв'язанні задач для ортотропних оболонок з розрізами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – 37, № 6. – С. 116–118.
73. Шевченко В. П., Довбня Е. Н. Система граничних інтегральних рівнянь для ортотропної оболонки з розрізом довільної конфігурації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 1. – С. 103–108.
74. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях // Докл. АН СССР. – 1940. – 27, № 9. – С. 911–913.
75. Шнеренко К. И. Анализ расчетных схем для оболочек из композиционных материалов с отверстием // Прикл. механика. – 1981. – 17, № 4. – С. 24–30.
76. Ярема С. Я., Саврук М. П. Антисиметричний напружений стан біля тріщини в пологій оболонці // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1969. – № 8. – С. 726–730.
77. Ярема С. Я., Саврук М. П. Влияние кривизны на напряженное состояние оболочки с трещиной // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 11. – С. 32–40.
78. Ярема С. Я., Саврук М. П. Напружений стан пологої оболонки з тріщиною при симетричному навантаженні // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1969. – № 1. – С. 55–58.

79. Ярема С. Я., Саврук М. П. Напружений стан циліндричної оболонки з поздовжньою або поперечною тріщиною при симетричному навантаженні // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – № 8. – С. 720–724.
80. Ярема С. Я., Саврук М. П. Напряжения в цилиндрической оболочке с произвольно ориентированной трещиной // Физ.-хим. механика материалов. – 1969. – 5, № 3. – С. 328–337.
81. Ярема С. Я., Саврук М. П. Пологая оболочка с трещиной // Концентрация напряжений. – Киев: Наук. думка, 1971. – Вып. 3. – С. 208–214.
82. Delale F., Erdogan F. Effect of transverse shear and material orthotropy in a cracked spherical cap // Int. J. Solids and Struct. – 1979. – 15, No. 12. – P. 907–926.
83. Delale F., Erdogan F. The crack problem in a specially orthotropic shell with double curvature // Eng. Fract. Mech. – 1983. – 18, No. 3. – P. 529–544.
84. Delale F., Erdogan F. Transverse shear effect in a circumferentially cracked cylindrical shell // Quart. Appl. Mech. – 1979. – 37, No. 3. – P. 239–258.
85. Dovbnya E., Shevchenko V. Stress intensity factors for orthotropic shells with curvilinear slits // XXXVI symp. «Modelowanie w mechanice» (Gliwice, 16–20. 02. 1997). – Gliwice, 1997. – Vol. 4. – S. 115–119.
86. Erdogan F. E. Crack problems in cylindrical and spherical shells // Mech. Fract. – 1977. – No. 3. – P. 161–199.
87. Erdogan F. E., Ratwani M. A note on the interference of two collinear crack in a cylindrical shell // Int. J. Fract. – 1974. – 10, No. 4. – P. 463–465.
88. Erdogan F. E., Ratwani M., Yuceoglu U. On the effect of orthotropy in a cracked cylindrical shell // Int. J. Fract. – 1974. – 10, No. 3. – P. 369–374.
89. Folias E. S. A finite line crack in a pressurized spherical shell // Int. J. Fract. Mech. – 1965. – 1, No. 1. – P. 20–46.
90. Folias E. S. An axial crack in a pressurized cylindrical shell // Int. J. Fract. Mech. – 1965. – 1, No. 2. – P. 104–113.
91. Folias E. S. The stresses in a cracked spherical shell // J. Math. Phys. – 1965. – 44, No. 2. – P. 164–176.
92. Hansen E. B. An integral equation method for stress concentration problem in cylindrical shells // Rept. Dan. Cent. Appl. Math. and Mech. – 1975. – 93. – P. 1–37.
93. Hansen E. B. Stress concentration in a stretched cylindrical shells with two elliptical holes // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1978. – 45, No. 4. – P. 839–844.
94. Sanders J. L. Cut-out in shallow shells // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1970. – 37. – P. 374–383.
95. Simmonds J. G. V., Bradley M. R. Stress-intensity factors for very short crack in arbitrary pressurized shells // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1976. – 43, No. 4. – P. 657–662.
96. Simmonds J. G. V., Bradley M. R., Nicholson J. W. Stress-intensity factors for arbitrarily oriented cracks in shallow shells // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1978. – 45, No. 3. – P. 135–141.
97. Tsai C. J., Sanders J. L. Elliptical cut-outs in cylindrical shells // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1975. – 42, No. 2. – P. 326–334.
98. Yahsi O. S., Erdogan F. E. A cylindrical shell with an arbitrarily oriented crack // Int. J. Solids and Struct. – 1983. – 19, No. 11. – P. 955–975.
99. Yuceoglu U., Erdogan F. E. A cylindrical shell with an axial crack under skew-symmetric loading // Int. J. Solids and Struct. – 1973. – 9, No. 3. – P. 347–362.

**МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК С РАЗРЕЗАМИ И ОТВЕРСТИЯМИ**

*Статья посвящена анализу различных подходов к построению системы граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек с разрезами и отверстиями произвольной конфигурации.*

**BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS METHOD FOR STATICS PROBLEMS OF ORTHOTROPIC SHELL WITH SLITS AND CUTS**

*The work is devoted to analysis of different approaches to obtaining a system of boundary integral equations for orthotropic shells with slits and cuts of arbitrary configuration.*

Донец. нац. ун-т, Донецьк

Одержано  
05.03.03