

**НАПРУЖЕНИЙ СТАН І ГРАНИЧНА РІВНОВАГА КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З ТРІЩИНАМИ**

*Задача про граничну рівновагу кусково-однорідної циліндричної оболонки з наскрізними та поверхневими тріщинами зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь. При цьому враховано наявність пластичних деформацій на продовженні тріщини. Запропоновано алгоритм числового розв'язування системи інтегральних рівнянь сумісно з умовами однозначності переміщень, умовами обмеженості напружень та умовами пластичності тонких оболонок. Проаналізовано залежність розкриття фронту поверхневої тріщини від навантаження, геометричних і механічних параметрів оболонки.*

Міцність реальних твердих тіл, зокрема тонкостінних, визначається не тільки їх фізико-хімічною природою, а й істотно залежить від дефектності їх структури. Розв'язання проблеми руйнування матеріалів може бути успішним тільки у випадку врахування дефектів, що містяться у тілі (мікротамакротріщин, непроварів, надрізів, різного походження порожнин і включень, границь блоків і зерен структури тощо), а також конструкційних розрізів і включень. У процесі деформації твердого тіла в околі таких концентраторів виникає висока інтенсивність напружень, що призводить до пластичного течіння матеріалу, до утворення і поширення тріщин, тобто до локального чи повного руйнування тіла. Сьогодні виробництво конструкційних матеріалів на основі бездефектних технологій є практично нездійсненним завданням. Щоб оцінити вплив різних концентраторів на напружений стан тіл, доцільно провести дослідження для більш простих концентраторів, які піддаються аналітичному трактуванню. Такими концентраторами, наприклад, у тонкостінних конструкціях є наскрізні чи ненаскрізні тріщини.

Розробці теорії і методів розв'язування задач про напружено-деформований стан оболонок з наскрізними тріщинами присвячено велику кількість робіт вітчизняних і зарубіжних авторів. Досить повний їх перелік наведено в монографіях [47, 53, 34] та в оглядовій статті [42]. Слід відзначити, що ці огляди присвячені, як правило, задачам про пружну рівновагу ізотропних оболонок, послаблених наскрізними тріщинами. Виняток становлять трансверсально-ізотропні [37, 43], спеціально-ортотропні [18, 72] та ортотропні оболонки [54, 55] з прямолінійними тріщинами.

Отримані в роботах [56–59] фундаментальні розв'язки рівнянь статистики пологих ортотропних оболонок і розроблена в них методика побудови інтегральних зображень зусиль-моментів дозволили побудувати граничні інтегральні рівняння для пологих ортотропних оболонок без обмежень на параметри ортотропії. Використовуючи цей математичний апарат, що базується на використанні теорії узагальнених функцій, теореми взаємності Бетті, двовимірних інтегральних перетворень Фур'є, теорії спеціальних функцій, у роботах [7–10, 60, 61] отримано декілька варіантів систем граничних інтегральних рівнянь для пологої ортотропної оболонки довільної кривини з прямолінійними та криволінійними тріщинами. Метод дисторсій, запропонований у роботах Я. С. Підстригача, В. А. Осадчука та їх учнів [41, 50, 51], розвинуто в роботі [31] на випадок замкнутої ортотропної циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною. При цьому за вихідні вибирали рівняння як загальної моментної теорії оболонок Кірхгофа – Лява, так і уточненої теорії оболонок типу Тимошенка. Дослідження проведено для випадку симетричного навантаження. Відмітимо, що використання уточненої теорії оболонок типу Тимошенка, яка враховує деформації поперечного зсуву, дало можливість авторам задовольнити всі п'ять природних граничних умов [49] на берегах тріщин. Деформацію зсуву враховують і зарубіжні

автори, які, як правило, використовують рівняння уточненої теорії оболонок Рейснера. У роботі [67] задача про напружений стан циліндричної оболонки з поздовжньою чи поперечною тріщиною зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь. При цьому розглянуто тільки симетричне навантаження. У роботі [83] побудовано розв'язок, що враховує зсувні деформації, для циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною, яка розміщена біля закріпленого торця оболонки. У роботі [82] отримано систему п'яти сингулярних інтегральних рівнянь, що описують розподіл напружень у циліндричній оболонці з довільно орієнтованою тріщиною, проаналізовано залежність коефіцієнтів інтенсивності нормальних, зсувних і перерізуючих зусиль, а також згинних і крутних моментів від навантаження, геометричних і механічних параметрів.

Аналіз літературних джерел показує, що значну більшість відомих розв'язків задач про напружений стан оболонок з тріщинами отримано в пружній постановці. Однак, як відомо з практики експлуатації деталей конструкцій і машин зі сталей сучасних марок, суттєвий вплив на поширення тріщин мають пластичні деформації, що розвиваються біля вершин тріщин і передують руйнуванню [2, 11–13]. Характерний лінійний розмір області біля тріщини, де розвиваються пластичні деформації, може бути сумірним з розмірами тріщини або характерними розмірами тіла. У таких випадках застосування концепції Гріффітса – Ірвіна уже не справедливе [6, 44, 48] і для правильної оцінки опору матеріалу поширенню у ньому тріщин необхідно використовувати нелінійну механіку руйнування. При цьому потрібно розв'язувати пружнопластичну задачу про визначення зусиль, моментів і переміщень в оболонках із тріщиною. Тобто потрібно розв'язати дві системи рівнянь у двох областях, границя між якими не відома. Побудова таких розв'язків у випадку континуальної зони пластичних деформацій біля вершини тріщини є складною математичною проблемою. При дослідженні напруженого стану пластин із тріщинами набув поширення метод розв'язування пружнопластичних задач за припущення, що пластичні деформації біля вершин тріщин локалізуються у тонких шарах по всій товщині пластини. Тонкі шари ковзання моделюють поверхнями розриву узагальнених переміщень (фіктивними тріщинами), а реакція пластичної зони на пружний об'єм – напруженнями, що дорівнюють границі текучості  $\sigma_T$ . Поза цими поверхнями тіло вважається пружним. Ця концепція вперше запропонована М. Я. Леоновим, В. В. Панасюком [25, 46], М. Я. Леоновим, А. М. Вітвіцьким [3, 5], Д. С. Дагдейлом [68] та А. А. Уелсом [81]. При цьому вважалось, що береги фіктивної тріщини взаємодіють лише в тому випадку, коли розкриття реальної тріщини в її вершині менше від деякого критичного значення  $\delta_c$  (сталого для даного матеріалу та для даних умов навколишнього середовища). Хоча фізичне трактування моделей, запропонованих у цих роботах, відрізняється між собою, їх математичні формулювання однакові і тому в літературі їх часто називають просто  $\delta_c$ -моделлю. Формулюванню та розвитку  $\delta_c$ -моделі присвячено досить багато робіт. Їх огляд наведено в статтях [4, 45, 62, 63] і монографіях [44, 46]. Результати, отримані на основі цієї моделі, неодноразово підтверджувались експериментально [14, 17, 76, 79, 80].

Підвищені вимоги до якості та надійності розрахунків на міцність елементів сучасних конструкцій зумовили необхідність розробки аналогічної методики для дослідження більш складних об'єктів. Ф. Ердоганом [69, 70], Е. С. Фоліасом [74, 75] запропоновано аналог  $\delta_c$ -моделі для дослідження тонких пружнопластичних пологих оболонок. Суть аналога  $\delta_c$ -моделі полягає у тому, що зони пластичних деформацій, як і в пластинах, моделюють поверхнями розриву узагальнених переміщень, а реакцію пластичних зон на пружний об'єм, на відміну від пластин, – невідомими сталими зусиллями та моментами, які задовольняють відповідні умови

пластичності тонких оболонок. На основі запропонованого аналога  $\delta_c$ -моделі розглянуто задачі для пологої циліндричної оболонки з поздовжньою [28, 71] або поперечною [35, 70] тріщинами, а також пологої сферичної оболонки з тріщиною вздовж меридіану [30]. На основі цього ж аналога  $\delta_c$ -моделі досліджено взаємодію тріщин у пологих циліндричній [71] і сферичній оболонках [29].

Слід підкреслити, що ці дослідження пружнопластичних оболонок з тріщинами проведено на основі теорії пологих оболонок. При цьому матеріал оболонок вважається ідеально пружнопластичним. У роботах [32, 33, 38, 39] досліджується циліндрична оболонка з однією, двома та періодичною системою паралельних чи колінеарних тріщин на основі рівнянь узагальненої моментної теорії оболонок. Матеріал оболонки вважається ідеально пружнопластичним або зі зміцненням. В останньому випадку зусилля і моменти, що моделюють реакцію пластичної зони на пружний об'єм і задовольняють умову пластичності тонких оболонок, змінюються за лінійним законом [39]. Результати дослідження порівнюються з експериментальними результатами, отриманими в [64, 73]. Встановлено границі застосовності рівнянь теорії пологих оболонок для розглянутих задач.

Реальні тонкостінні конструкції дуже часто містять поверхневі або внутрішні, тобто ненаскрізні, дефекти, які мають різну, як правило, нерегулярну геометрію, і зона дефекту може мати декілька внутрішніх тріщин довільної форми. При розробці розрахункових схем такі дефекти замінюють тріщинами, які є найбільш небезпечним, з точки зору руйнування, видом дефектів. Приймають, що ці тріщини мають ідеально правильну форму, еквівалентні розміри та орієнтацію. Розрахункові схеми заміни реальних дефектів тріщинами ідеальної форми наведені в методичних рекомендаціях [52], що поширюються на корпуси реакторів і парогенераторів, трубопроводи, цистерни, ротори турбін і турбогенераторів, інше енергетичне обладнання, яке підлягає розрахунку на тріщиностійкість. Схематизуються геометричні параметри елемента конструкції та дефекту, а також розподіл напружень у зоні ідеалізованої тріщини. Зауважимо, що навіть для ідеальної за формою ненаскрізної тріщини в тонкостінних елементах конструкції задача про дослідження напружень в її околі є складною через її тривимірність і необхідність врахування пластичних деформацій біля тріщин і граничних умов на лицьових поверхнях конструкції. Тому розв'язки таких задач будують наближено. Так, у випадку, коли розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження і властивості матеріалу такі, що пластичні деформації розвиваються на продовженні тріщини вузькою смугою по всій товщині оболонки, використовують аналог  $\delta_c$ -моделі [30, 36, 69, 79]. Тобто смугу пластичних деформацій замінюють поверхнею розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію пластичної зони на пружну дію невідомих зусиль і моментів. При цьому вважають, що на продовженні тріщини вглибину до зовнішньої та внутрішньої поверхонь оболонки діють сталі напруження  $\sigma_T$ , а в пластичних зонах на продовженні тріщини по довжині діють невідомі зусилля та моменти, що задовольняють умови пластичності тонких оболонок. При цьому в роботах [33, 69, 79] зусилля-моменти вважають сталими, а в [39] – такими, що змінюються за лінійним законом. У роботі [40], де запропоновано узагальнений аналог  $\delta_c$ -моделі, зусилля змінюється за квадратичним, а момент – за кубічним законами; нейтральна лінія у пластичних зонах змінюється за лінійним законом, тоді як у попередніх моделях вона була сталою.

Отже, аналог  $\delta_c$ -моделі дає можливість тривимірну пружнопластичну задачу для оболонки з внутрішньою тріщиною заданих розмірів звести до задачі про пружну рівновагу такої ж оболонки з наскрізною тріщиною невідомої довжини, до берегів якої прикладено невідомі зусилля й моменти, що

задовольняють умову пластичності тонких оболонок. У такій постановці досліджено максимальне розкриття фронту ненаскрізної тріщини в сферичній оболонці з меридіональною тріщиною [30] і в ізотропній циліндричній оболонці з поперечною та поздовжньою тріщинами [26].

У випадках, коли пластичні деформації в околі поверхневої тріщини займають незначні ділянки, тобто матеріал оболонок аж до руйнування залишається практично пружним, доцільно використовувати простіші математичні моделі. У дослідженнях напружено-деформованого стану та граничної рівноваги пластин і пологих оболонок з поверхневими тріщинами [6] найбільшого поширення набула модель лінійних пружин (стержнева модель), яка вперше запропонована в [78], де розв'язано задачу для пластини з поверхневою еліптичною тріщиною. Головна ідея, що лежить в основі цієї моделі, полягає в апроксимації тривимірної задачі про поверхневу тріщину двовимірною задачею для пластини чи оболонки з наскрізною тріщиною, до берегів якої прикладено мембранне зусилля  $N$  і згинний момент  $M$ , які статично еквівалентні невідомим напруженням, що діють у прошарку суцільного матеріалу на продовженні фронту тріщини по товщині пластини чи оболонки. У моделі суттєво використовується розв'язок задачі для шару з крайовою тріщиною в умовах плоскої деформації. При цьому шар перебуває під дією розтягувального зусилля  $N$  та згинного моменту  $M$ . На основі згаданої моделі досліджено залежність коефіцієнта інтенсивності напружень для циліндричної оболонки з внутрішньою чи зовнішньою поверхневою поздовжньою [65, 66] або внутрішньою чи зовнішньою поверхневою поперечною тріщинами [67, 77].

Отримане в роботах [15, 16, 19, 23] подання параметрів напружено-деформованого стану кусково-однорідних (шаруватих) тіл дало можливість, зокрема, побудувати загальний підхід до розв'язування задач про напружено-деформований стан і граничну рівновагу кусково-однорідних оболонок з тріщинами. У роботах авторів [20–22, 24, 27] отримано системи сингулярних рівнянь низки задач і проведено числовий аналіз залежності параметрів граничної рівноваги від геометричних і механічних параметрів оболонки.

**Постановка задачі.** Розглянемо тонку кусково-однорідну циліндричну оболонку товщини  $2h$ , що складається з  $l$  зістикованих оболонок з різних матеріалів. Віднесемо її серединну поверхню радіуса  $R$  до триортогональної системи координатних ліній  $\alpha, \beta, \gamma$ , спрямувавши вісь  $\alpha = z/R$  уздовж твірної, а вісь  $\gamma$  – по зовнішній нормалі до серединної поверхні (рис. 1).

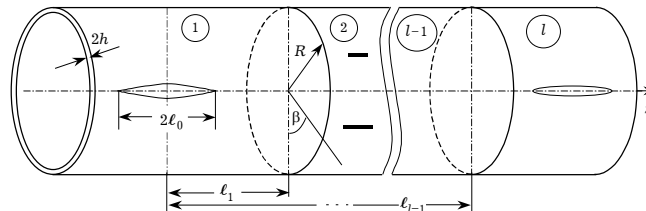


Рис. 1

Нехай оболонка послаблена системою  $k$  наскрізних тріщин, що не перетинаються. Тріщини розміщені вздовж координатних ліній і не перетинають лінії стику. Вздовж кожної лінії  $\alpha = \alpha_p$  розміщено  $m_p$  тріщин, реальної довжини яких  $l_{pv}$ , а на кожній лінії  $\beta = \beta_r$  розміщено  $n_r$  тріщин завдовжки  $q_{rs}$ . Зовнішнє навантаження, довжини тріщин і властивості матеріалів оболонки вважаються такими, що пластичні деформації розвиваються вузькими смугами на продовженні тріщин по всій товщині оболонки. Замінімо, відповідно з аналогом  $\delta_c$ -моделі, смуги пластичності поверхнями розриву пружних узагальнених переміщень. Тоді довжини фіктивних трі-

щин будуть:  $\ell_{pv}^1 = \ell_{pv} + \ell_{pv}^{(2)} + \ell_{pv}^{(3)}$  та  $q_{rs}^1 = q_{rs} + q_{rs}^{(2)} + q_{rs}^{(3)}$ , де  $\ell_{pv}^{(2)}, q_{rs}^{(2)}$  – довжини пластичних зон біля лівих вершин тріщин, а  $\ell_{pv}^{(3)}, q_{rs}^{(3)}$  – біля правих вершин. Крім зовнішнього навантаження, до протилежних берегів тріщин прикладено самозрівноважувальні зусилля і моменти. Якщо до берегів тріщин прикладено довільне навантаження, то, як і у випадку плоскої [53] чи просторової [1] задач, цю задачу можна звести до попередньої та до задачі про дію деякого додаткового навантаження на місці тріщини в суцільній оболонці. Будемо вважати, що береги реальних тріщин у процесі деформації не контактують між собою.

Напружений стан розглянутої оболонки подамо у вигляді суми станів – основного, викликаного зовнішнім навантаженням оболонки без тріщин, і збуреного, зумовленого наявністю тріщин. Основний напружений стан будемо вважати відомим. Оскільки береги реальних тріщин, а, отже, і фіктивних, завантажені самозрівноважувальними зусиллями та моментами, то на контурі кожної тріщини для зусиль і моментів збуреного напруженого стану повинні виконуватись умови

– на лініях тріщин  $\ell_{pv}^1$  ( $\beta \in \ell_{pv}^1$ ):

$$T_i^+(\alpha_p, \beta) = T_i^-(\alpha_p, \beta) = f_i^{pv}(\beta), \quad i = \overline{1, 4}; \quad (1)$$

– на лініях тріщин  $q_{rs}^1$  ( $\alpha \in q_{rs}^1$ ):

$$P_i^+(\alpha, \beta_r) = P_i^-(\alpha, \beta_r) = f_i^{rs}(\alpha), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (2)$$

В умовах (1), (2) позначено

$$f_i^{pv}(\beta) = \begin{cases} T_i^1(\alpha_p + 0, \beta) - T_i^0(\alpha_p^0, \beta) & \forall \beta : \beta \in \ell_{pv}, \\ -T_i^0(\alpha_p, \beta) + T_{ij}^{(2)} & \forall \beta : \beta \in \ell_{pv}^{(2)}, \\ -T_i^0(\alpha_p, \beta) + T_{ij}^{(3)} & \forall \beta : \beta \in \ell_{pv}^{(3)}, \end{cases} \quad (3)$$

$$f_i^{rs}(\alpha_1) = \begin{cases} P_i^1(\alpha, \beta_r + 0) - P_i^0(\alpha, \beta_r) & \forall \alpha : \alpha \in q_{rs}, \\ -P_i^0(\alpha, \beta_r) + P_{ij}^{(2)} & \forall \alpha : \alpha \in q_{rs}^{(2)}, \\ -P_i^0(\alpha, \beta_r) + P_{ji}^{(3)} & \forall \alpha : \alpha \in q_{rs}^{(3)}, \end{cases} \quad (4)$$

$$\{T_i\}_1^4 = \{N_1, S_{12}^*, M_1, Q_1^*\}, \quad \{P_i\}_1^4 = \{N_2, S_{21}^*, M_2, Q_2^*\}.$$

Індексом «0» позначено зусилля і моменти основного напруженого стану, індексом «1» – зусилля і моменти, прикладені до берегів реальної тріщини, індексами «+» і «-» позначено граничні значення відповідної функції на берегах тріщини;  $T_{ij}^{(2)}, T_{ij}^{(3)}, P_{ij}^{(2)}, P_{ij}^{(3)}$  – невідомі зусилля і моменти, що діють у пластичних зонах на продовженнях кожної тріщини ( $j = \overline{1, k}$ ) і задовольняють умови пластичності тонких оболонок.

Таким чином, пружнопластична задача для кусково-однорідної циліндричної оболонки з тріщинами заданої довжини зведена до задачі про пружну рівновагу такої ж оболонки з тріщинами невідомої довжини (невідомими є довжини пластичних зон), на берегах яких виконуються умови (1), (2).

**Загальний спосіб зведення задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь.** Для розв'язування задачі про пружну рівновагу кусково-однорідної оболонки з тріщинами скористаємось методом дисторсій у теорії тонких однорідних оболонок із тріщинами [34, 51]. Отримані раніше [34] рівняння рівноваги однорідної циліндричної оболонки в переміщеннях, що враховують наявність тріщин, справджуються для  $k$ -ї ( $k = \overline{1, l}$ ) складової кус-

ково-однорідної циліндричної оболонки з тріщинами. Для моделювання кусково-однорідної оболонки як єдиної цілісної структури та опису фізико-механічних процесів, що протікають у ній, використовуємо подання [19, 23]

$$p(\alpha, \beta) = p_1(\alpha, \beta) + \sum_{k=1}^{l-1} [p_{k+1}(\alpha, \beta) - p_k(\alpha, \beta)] S_-(\alpha - \alpha_k), \quad (5)$$

де  $p(\alpha, \beta)$  – продовжені функції;  $p_k(\alpha, \beta)$  – шукані та задані функції у  $k$ -й складовій оболонки;  $S_-(\alpha) = \{(1, \alpha \geq 0) \cup (0, \alpha < 0)\}$  – асиметрична одинична функція [16]. В результаті продовження системи диференціальних рівнянь пружної рівноваги однорідної циліндричної оболонки в переміщеннях [34] відповідно до подання (5) отримуємо для розглядуваної кусково-однорідної оболонки систему частково вироджених рівнянь з розривними коефіцієнтами:

$$L_{i1}(\alpha, \beta) u + L_{i2}(\alpha, \beta) v + L_{i3}(\alpha, \beta) w = g'_i(\alpha, \beta) + g''_i(\alpha, \beta). \quad (6)$$

Тут  $u, v, w$  – компоненти вектора переміщень серединної поверхні оболонки

$$L_{11}(\alpha, \beta) = \partial_1^2 + \frac{1 - \nu(\alpha)}{2} \partial_2^2, \quad L_{12}(\alpha, \beta) = L_{21}(\alpha, \beta) = \frac{1 + \nu(\alpha)}{2} \partial_1 \partial_2,$$

$$L_{13}(\alpha, \beta) = L_{31}(\alpha, \beta) = \nu(\alpha) \partial_1, \quad L_{22}(\alpha, \beta) = \frac{1 - \nu(\alpha)}{2} \partial_1^2 + \partial_2^2 + c_1^2 \{2[1 - \nu(\alpha)] \partial_1^2 + \partial_2^2\},$$

$$L_{23}(\alpha, \beta) = L_{32}(\alpha, \beta) = \partial_2 \{1 - c_1^2 [2 - \nu(\alpha)] \partial_1^2 + \partial_2^2\},$$

$$L_{33}(\alpha, \beta) = 1 + c_1^2 \nabla^2 \nabla^2, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad c_1^2 = \frac{h^2}{3R^2},$$

$$g'_1(\alpha, \beta) = R \left[ \partial_1 \varepsilon_{11}^0 + \nu(\alpha) \partial_1 \varepsilon_{22}^0 + \frac{1 - \nu(\alpha)}{2} \partial_2 \varepsilon_{12}^0 \right],$$

$$g'_2(\alpha, \beta) = R \left\{ \partial_2 \varepsilon_{22}^0 + \nu(\alpha) \partial_2 \varepsilon_{11}^0 + \frac{1}{2} [1 - \nu(\alpha)] \partial_1 \varepsilon_{12}^0 \right\} + R^2 c_1^2 \{ \partial_2 \mathbf{x}_{22}^0 + \nu(\alpha) \partial_2 \mathbf{x}_{11}^0 + 2[1 - \nu(\alpha)] \partial_1 \mathbf{x}_{12}^0 \},$$

$$g'_3(\alpha, \beta) = R \left[ \varepsilon_{22}^0 + \nu(\alpha) \varepsilon_{11}^0 \right] - R^2 c_1^2 \{ \partial_1^2 \mathbf{x}_{11}^0 + \nu(\alpha) \partial_1^2 \mathbf{x}_{22}^0 + \partial_2^2 \mathbf{x}_{22}^0 + \nu(\alpha) \partial_2^2 \mathbf{x}_{11}^0 + 2[1 - \nu(\alpha)] \partial_1 \partial_2 \mathbf{x}_{12}^0 \},$$

$$g''_1(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^{l-1} \{ [\partial_1 u]_k - R([\varepsilon_{11}^0]_k + \nu_k [\varepsilon_{22}^0]_k) \} \delta_-(\alpha - \alpha_k),$$

$$g''_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l-1} \{ (1 + 4c_1^2)(1 - \nu_k) [\partial_1 v]_k - R(1 - \nu_k) ([\varepsilon_{12}^0]_k + 2Rc_1^2 [\mathbf{x}_{12}^0]_k) \} \delta_-(\alpha - \alpha_k),$$

$$g''_3(\alpha, \beta) = c_1^2 \sum_{k=1}^{l-1} \left\langle \{ [\partial_1^3 w]_k - (2 - \nu_k) \partial_2 [\partial_1 v]_k + R^2([\partial_1 \mathbf{x}_{11}^0]_k + \nu_k [\partial_1 \mathbf{x}_{22}^0]_k) \} \delta_-(\alpha - \alpha_k) + \{ [\partial_1^2 w]_k + R^2([\mathbf{x}_{11}^0]_k + \nu_k [\mathbf{x}_{22}^0]_k + 2(1 - \nu_k) \partial_2 [\mathbf{x}_{12}^0]_k) \} \delta'_-(\alpha - \alpha_k) \right\rangle,$$

$$\varepsilon_{mn}^0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h e_{mn}^0(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma, \quad \alpha_{mn}^0 = \frac{2}{3h^2} \int_{-h}^h \gamma e_{mn}^0(\alpha, \beta, \gamma) d\gamma, \quad m, n = 1, 2,$$

$$[p(\beta)]_k = p_{k+1}(\alpha_k + 0, \beta) - p_k(\alpha_k - 0, \beta), \quad \delta_-^\lambda(\alpha) = \frac{d^\lambda S_-(\alpha)}{d\alpha^\lambda}.$$

У системі (6) враховано неперервність компонент вектора переміщень  $u, v, w$  та кута повороту  $\theta_1 = R^{-1}\partial_1 w$  на поверхнях поділу  $\alpha = \alpha_k$ , а функції стрибків похідних від переміщень на поверхнях поділу будемо визначати з решти умов ідеального механічного контакту:

$$N_1^{(k)} = N_1^{(k+1)}, \quad S^{*(k)} = S^{*(k+1)}, \quad M_1^{(k)} = M_1^{(k+1)}, \quad Q_1^{*(k)} = Q_1^{*(k+1)}, \quad (7)$$

де узагальнені зусилля і моменти  $k$ -ї складової кусково-однорідної оболонки мають вигляд

$$\begin{aligned} N_1^{(k)} &= D_1^{(k)} R^{-1} [\partial_1 u_k + v_k (\partial_2 v_k + w_k) - R(\varepsilon_{11}^{0(k)} + v_k \varepsilon_{22}^{0(k)})], \\ N_2^{(k)} &= D_1^{(k)} R^{-1} [\partial_2 v_k + w_k + v_k \partial_1 u_k - R(\varepsilon_{22}^{0(k)} + v_k \varepsilon_{11}^{0(k)})], \\ S_k &= \frac{E_k h}{(1 + v_k) R} (\partial_2 u_k + \partial_1 v_k - R \varepsilon_{12}^{0(k)}), \\ M_1^{(k)} &= -D_2^{(k)} [\partial_1^2 w_k + v_k (\partial_2^2 w_k - \partial_2 v_k) + R^2 (\alpha_{11}^{0(k)} - v_k \alpha_{22}^{0(k)})], \\ M_2^{(k)} &= -D_2^{(k)} [\partial_2^2 w_k - \partial_2 v_k + v_k \partial_1^2 w_k + R^2 (\alpha_{22}^{0(k)} - v_k \alpha_{11}^{0(k)})], \\ H_k &= -D_2^{(k)} (1 - v_k) [\partial_1 (\partial_2 w_k - v_k) + R^2 \alpha_{12}^{0(k)}], \\ S^{*(k)} &= S_k + 2R^{-1} H_k, \quad Q_1^{*(k)} = \partial_1 M_1^{(k)} + 2R^{-1} \partial_2 H_k, \\ D_1^{(k)} &= 2E_k h / (1 - v_k^2), \quad D_2^{(k)} = D_1^{(k)} c_1^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Враховуючи, що зусилля і моменти згідно з умовами (1), (2) зберігають неперервність у довільній точці оболонки, а переміщення  $u, v, w$  і кути повороту  $\theta_1, \theta_2$  мають стрибки при переході через лінії тріщин (розриви першого роду), та розглядаючи їх як узагальнені функції, на основі співвідношень (8) виразимо компоненти деформації  $\varepsilon_{ij}^0, \alpha_{ij}^0$  через зосереджені на лініях тріщин функціонали, густинами яких є комбінації стрибків переміщень і кутів повороту. Для тріщини, розміщеної вздовж лінії  $\alpha = \alpha_p$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^0 &= \frac{1}{R} [u(\beta)]_{\ell_{pv}} \delta(\alpha - \alpha_p), & \varepsilon_{22}^0 &= 0, \\ \varepsilon_{12}^0 &= \frac{1}{R} [v(\beta)]_{\ell_{pv}} \delta(\alpha - \alpha_p), & \alpha_{22}^0 &= 0, \\ \alpha_{11}^0 &= -\frac{1}{R} \left\{ [\theta_1(\beta)]_{\ell_{pv}} \delta(\alpha - \alpha_p) + \frac{1}{R} [w(\beta)]_{\ell_{pv}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \delta(\alpha_1 - \alpha_p) \right\}, \\ 2\alpha_{12}^0 &= -\left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \beta} [w(\beta)]_{\ell_{pv}} - \frac{1}{R^2} [v(\beta)]_{\ell_{pv}} \right\} \delta(\alpha - \alpha_p). \end{aligned} \quad (9)$$

Тут

$$[\Psi(\beta)]_{\ell_{pv}} = \begin{cases} \Psi^+(\alpha_p + 0, \beta) - \Psi^-(\alpha_p - 0, \beta) & \forall \beta : \beta \in \ell_{pv}, \\ 0 & \forall \beta : \beta \notin \ell_{pv}, \end{cases} \quad \Psi = \{u, v, w, \theta_1\}.$$

Аналогічні співвідношення можна записати для функціоналів  $\varepsilon_{ij}^0$ ,  $\alpha_{ij}^0$ , що відповідають розрізу  $q_{rs}$ , розміщеному вздовж лінії  $\beta = \beta_r$ .

Розв'язок системи частково вироджених диференціальних рівнянь (6) шукаємо у вигляді

$$u_i(\alpha, \beta) = \iint_D \left\{ \sum_{j=1}^3 G_{ij}(\alpha - \xi, \beta - \varphi) g_j(\xi, \varphi) \right\} d\xi d\varphi, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (10)$$

де  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$ ,  $u_3 = w$ ,  $g_j(\xi, \varphi) = g'_j(\xi, \varphi) + g''_j(\xi, \varphi)$ ;  $D$  – область, яку займає серединна поверхня оболонки;  $G_{ij}$  – компоненти  $T$ -періодичної фундаментальної матриці переміщень, які визначені [22] як часткові розв'язки такої системи диференціальних рівнянь із розривними коефіцієнтами:

$$\sum_{j=1}^3 L_{ij}(\alpha, \beta) G_{jm}(\alpha, \beta, \xi, \varphi) = \delta_{im} \delta(\alpha - \xi) \delta(\beta - \varphi), \quad i, m = \overline{1, 3}. \quad (11)$$

Тут  $L_{ij}(\alpha, \beta)$  – диференціальні оператори системи рівнянь (6).

Інтегральне подання (10) містить невідомі стрибки переміщень і кутів повороту при переході через лінії тріщин, а також невідомі стрибки похідних від переміщень при переході через поверхню контакту  $\alpha = \alpha_k$ . Підставивши подання (10) у формули (8) отримаємо співвідношення для визначення зусиль і моментів у довільній точці оболонки. Вимагаючи тепер, щоб виконувались умови (1), (2) на берегах усіх  $k$  тріщин і умови (7) на всіх  $l-1$  поверхнях розділу, отримаємо систему  $4(k+l-1)$  інтегральних рівнянь для визначення невідомих стрибків узагальнених переміщень і похідних від них. Зауважимо, що в систему інтегральних рівнянь увійдуть інтеграли вздовж ліній фіктивних тріщин. Тобто межі інтегрування в цих інтегралах є невідомими. Крім цього, в праві частини  $4k$  сингулярних інтегральних рівнянь згідно з умовами (1), (2) увійдуть  $8k$  невідомих зусиль і моментів-реакцій пластичної зони на пружну. Для повноти отриманої системи будемо вимагати обмеженості зусиль і моментів біля вершин фіктивних тріщин, тобто, щоб відповідні коефіцієнти інтенсивності дорівнювали нулю, а також виконання умов пластичності невідомими зусиллями та моментами в усіх  $2k$  пластичних зонах.

**Кусково-однорідна циліндрична оболонка з поздовжньою внутрішньою тріщиною.** Розглянемо оболонку, що складається з двох ( $l=2$ ) зістикованих напівнескінчених оболонок з різних матеріалів. Одна з них послаблена поздовжньою ненаскрізною тріщиною  $\beta = 0$ ,  $|\alpha| \leq \alpha_0 = \ell_0 / R$ ,  $-h + 2d_2 \leq \gamma \leq h - 2d_1$  (рис. 2). Центр тріщини знаходиться на віддалі  $\ell_1$  від поверхні стику  $\alpha = \alpha_1 = \ell_1 / R$ . Оболонка перебуває під дією симетричних відносно тріщини зусиль і моментів. Якщо величина зовнішнього навантаження, розміри тріщини та властивості матеріалу оболонки, в якій розміщена тріщина, такі, що пластичні деформації розвиваються вузькою смугою на продовженні тріщини по всій товщині оболонки, то можна використати аналог  $\delta_c$ -моделі. Тобто замінимо смуги пластичних деформацій поверхнями розриву узагальнених пружних переміщень, а дію матеріалу пластичної зони на пружну – деякими зусиллями та моментами. При цьому вважаємо, що в області  $\beta = 0$ ,

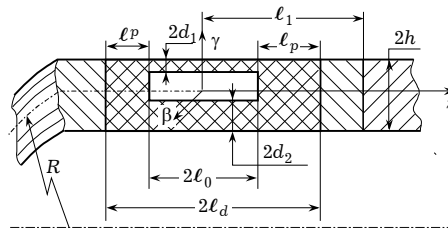


Рис. 2



$\alpha \in [-\alpha_0; \alpha_0]$ ,  $\gamma \in [-h; -h + 2d_2] \cup [h - 2d_1; h]$  діють сталі напруження  $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T)/2$ , де  $\sigma_B, \sigma_T$  – границя міцності та течіння матеріалу оболонки, в якій розміщена тріщина. У пластичних зонах біля тріщини  $\ell_p$  та  $\ell^p$  (рис. 2) діють невідомі зусилля та згинні моменти  $N^1, N^2, M^1, M^2$  відповідно, кожна пара з яких задовольняє умови пластичності Треска у вигляді поверхневого шару

$$N^s / (2h\sigma_0) + 3 |M^s| / (2h^2\sigma_0) = 1, \quad s = 1, 2, \quad (12)$$

або пластичного шарніру

$$[N^s / (2h\sigma_0)]^2 + |M^s| / (h^2\sigma_0) = 1, \quad s = 1, 2. \quad (13)$$

Отже, в межах вибраної моделі тривимірна пружнопластична задача для оболонки з внутрішньою тріщиною завдовжки  $2\ell_0$  зведена до двовимірної задачі про пружну рівновагу оболонки з наскрізною тріщиною  $2\ell_d = 2\ell_0 + \ell_p + \ell^p$ , на берегах якої виконуються умови

$$N_2(\alpha) = \begin{cases} N^2 - N_2^0, & -(\alpha_0 + \alpha^p) \leq \alpha \leq -\alpha_0, \\ N^\ell - N_2^0 + N^3, & |\alpha| < \alpha_0, \\ N^1 - N_2^0, & \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0 + \alpha_p < \alpha_1, \end{cases}$$

$$M_2(\alpha) = \begin{cases} M^2 - M_2^0, & -(\alpha_0 + \alpha^p) \leq \alpha \leq -\alpha_0, \\ M^\ell - M_2^0 + M^3, & |\alpha| < \alpha_0, \\ M^1 - M_2^0, & \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0 + \alpha_p < \alpha_1, \end{cases} \quad (14)$$

де  $\alpha^p = \ell^p/R$ ,  $\alpha_p = \ell_p/R$ ,  $N^\ell = 2(d_1 + d_2)\sigma_0$ ,  $M^\ell = 2\sigma_0(h - d_1 - d_2)(d_2 - d_1)$ ,  $N^3$  і  $M^3$  – зусилля і моменти, прикладені до берегів реальної тріщини;  $N^0$  і  $M^0$  – компоненти основного напруженого стану.

На основі запропонованої методики розглядувану задачу зведено до системи шести сингулярних інтегральних рівнянь

$$\int_{-\alpha_d}^{\alpha_d} \{\Psi'_1(\xi)\mathcal{K}_{i1}(\xi, \alpha) + \Psi'_3(\xi)\mathcal{K}_{i3}(\xi, \alpha)\} d\xi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \sum_{j=5}^8 \Psi_j(\theta)\mathcal{K}_{ij}(\theta, \alpha) d\theta = 2\pi(E_1h)^{-1}f_i(\alpha), \quad i = 1, 3,$$

$$\int_{-\alpha_d}^{\alpha_d} \{\Psi'_1(\xi)\mathcal{K}_{i1}(\beta, \xi) + \Psi'_3(\xi)\mathcal{K}_{i3}(\beta, \xi)\} d\xi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \sum_{j=5}^8 \Psi_j(\theta)\mathcal{K}_{ij}(\theta, \beta) d\theta = \delta_{i8}A_1, \quad i = \overline{5, 8}, \quad (15)$$

де

$$\alpha_d = \ell_d / R, \quad \Psi_1(\xi) = [v(\xi)]_c, \quad \Psi_3(\xi) = -R[\theta_2(\xi)]_c,$$

$$\Psi_5(\beta) = \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} u(\alpha, \beta) \right]_{\alpha=\alpha_1}, \quad \Psi_6(\beta) = \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} v(\alpha, \beta) \right]_{\alpha=\alpha_1},$$

$$\Psi_7(\beta) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} w(\alpha, \beta) \right]_{\alpha=\alpha_1}, \quad \Psi_8(\beta) = \int \left[ \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} w(\alpha, \beta) \right]_{\alpha=\alpha_1} d\beta,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ij}(\xi, \alpha) &= \frac{1}{2} a_{ij} \operatorname{cth} \left( \frac{\xi - \alpha}{2} \right) + \mathcal{K}_{ij}^0(\xi - \alpha) + \mathcal{K}_{ij}^*(\xi, \alpha), \quad i, j = 1, 3, \\ a_{11} &= 1, \quad a_{13} = a_{31} = \tilde{c}_1^2 (1 - \nu_1^2), \quad a_{33} = (3 + \nu_1) / (1 + \nu_1), \\ \tilde{c}_1^2 &= c_1^2 / (1 - \nu_1^2), \quad f_1(\alpha) = N_2(\alpha, 0), \quad f_3(\alpha) = M_2(\alpha, 0).\end{aligned}$$

Тут  $E_1$  та  $\nu_1$  – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона оболонки, яка містить тріщину;  $A_1$  – стала інтегрування,  $\mathcal{K}_{ij}^0(z)$  та  $\mathcal{K}_{ij}^*(z)$  – неперервні функції.

Перші два рівняння системи (15) є сингулярними. У них невідомими є границі інтегрування ( $\ell_p$  та  $\ell^p$ ) і величини  $N^1, N^2, M^1, M^2$ . Тому систему (15) доповнюємо умовами (12) або (13) та умовами обмеженості зусиль і моментів біля вершин наскрізної тріщини. Для цього достатньо, щоб дорівнювали нулю коефіцієнти інтенсивності нормального зусилля та згинального моменту

$$K_N^s = 0, \quad K_M^s = 0, \quad s = 1, 2. \quad (16)$$

Праві частини сингулярних інтегральних рівнянь згідно з (14) є розривними функціями. Прямі числові методи розв'язування таких систем дають значні похибки в точках розриву. Тому розв'язок перших двох рівнянь шукаємо у вигляді

$$\Psi_i(\alpha) = h_i(\alpha) + \Phi_i(\alpha), \quad i = 1, 3. \quad (17)$$

Тут  $h_i(\alpha)$  – розв'язки канонічних сингулярних інтегральних рівнянь з розривними правими частинами

$$\int_{-\alpha_d}^{\alpha_d} \frac{h_i(\xi)}{\alpha - \xi} d\xi = f_i(\alpha), \quad i = 1, 3, \quad (18)$$

які знаходимо, використовуючи формули обернення для інтегралів типу Коші. Підставляючи після цього подання (17) у перші два рівняння системи (15), отримуємо нову систему інтегральних рівнянь для визначення невідомих  $\Phi_i(\alpha)$ . Ця система має вигляд (15), але праві частини перших двох рівнянь є неперервними функціями, які мають вигляд

$$f_i^*(\alpha) = f_i^0(\alpha) + \sum_{s=1}^2 [N^s f_i^s(\alpha) + M^s f_i^{s+2}(\alpha)], \quad i = 1, 3. \quad (19)$$

Тому  $\Phi_i(\alpha)$  шукаємо у вигляді

$$\Phi_i(\alpha) = \Phi_i^0(\alpha) + \sum_{s=1}^2 [N^s \Phi_i^s(\alpha) + M^s \Phi_i^{s+2}(\alpha)], \quad i = 1, 3. \quad (20)$$

Функції  $\Phi_i(\alpha)$  шукаємо методом механічних квадратур, який дозволяє визначати кожен з  $\Phi_i^{(m)}(\alpha)$  із систем відповідних алгебричних рівнянь. Але  $\ell_p$  та  $\ell^p$  у ці системи входять нелінійно. Тому процедура розв'язування така: задаємо початкові значення параметрів  $\ell_p$  та  $\ell^p$ . Визначаємо кожен з функцій  $\Phi_i^{(m)}(\alpha)$ . З умов (16) знаходимо  $N^s, M^s$  і перевіряємо одну з умов пластичності (12) або (13). Якщо вона задовольняється з наперед заданою точністю, то задача розв'язана, якщо ні – заміняємо  $\ell_p$  та  $\ell^p$  і процедуру повторюємо.

Зінтегрувавши розв'язки системи інтегральних рівнянь, визначаємо розкриття тріщини в довільній її точці за формулою

$$\Delta(\alpha, \gamma) = [v(\alpha)]_c + \gamma[\theta_2(\alpha)]_c. \quad (21)$$

Прирівнявши тепер розкриття тріщини на її фронті до критичного значення  $\delta_c$ , отримуємо критерій для встановлення співвідношень між прикладеними зусиллями, розмірами тріщини, фізичними та геометричними параметрами оболонки в умовах граничного рівноважного стану.

Проведено дослідження граничної рівноваги кусково-однорідної оболонки з тріщиною ( $h/R = 0.01$ ,  $\ell_0/h = 5$ ), складові якої виготовлені з алюмінію ( $E_1 = 0.65 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu_1 = 0.3$ ,  $\sigma^0 = \sigma_T = 0.11 \cdot 10^3$  МПа) та епоксидної смоли ( $E_2 = 0.26 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu_2 = 0.35$ ,  $\sigma^0 = \sigma_T = 4.3$  МПа). На рис. 3 зображено залежності максимального відносного розкриття  $\Delta^* = \Delta/\Delta_0$  поверхневої тріщини глибини  $2d$  ( $d_1 = 2(h-d)$ ,  $d_2 = 0$ ,  $d/h = 0.6$ ;  $\Delta_0$  – розкриття тріщини в однорідній оболонці) від параметра  $\eta = \ell_d/(\alpha_1 R)$  для випадку пружно-пластичного деформування оболонки, яка перебуває під внутрішнім тиском інтенсивності  $p$ , так що  $pR/(2h\sigma_0) = 0.3$ . Криві 1 і 2 відповідають випадкам розміщення тріщини в складовій оболонки з алюмінію або епоксидної смоли відповідно. Максимальне розкриття тріщини відбувається у точці  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = h - 2d$ .

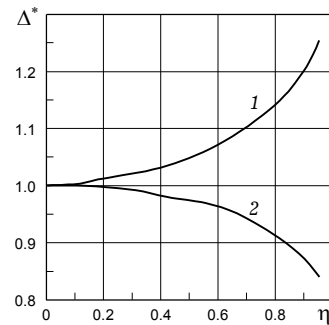


Рис. 3

З наведених на рис. 3 графіків бачимо, що наявність подібних тріщин у різних матеріалах оболонки неоднаково впливає на її міцність.

Аналіз проведених розрахунків для інших значень параметрів показав, що максимальне розкриття тріщини відбувається у її вершинах на поверхні оболонки  $\gamma = h$  або при  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = h - 2d$ .

У першому випадку (при  $\gamma = h$ ) тріщина поширюється вздовж оболонки, у другому (при  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = h - 2d$ ) – углибину, в результаті чого ненаскрізна тріщина стає наскрізною. Якщо розкриття наскрізної тріщини залишається меншим від критичного значення, то руйнування припиняється, у протилежному випадку така тріщина поширюється вздовж оболонки.

Наведена методика дозволяє досліджувати взаємодію наскрізних та поверхневих тріщин, що знаходяться в одній чи різних частинах складеної кусково-однорідної циліндричної оболонки.

1. Андрейкив А. Е. Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 345 с.
2. Винн Р. Г., Смит С. М. Экспериментальное исследование критерия разрушения при комбинированном растяжении и изгибе // Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. Сер. Д. – 1969. – № 4. – С. 280–288.
3. Витвицкий П. М., Леонов М. Я. Полосы скольжения при неоднородной деформации пластинки // Вопросы механики реального твердого тела. – 1962. – Вып. 1. – С. 13–17.
4. Витвицкий П. М., Панасюк В. В., Ярема С. Я. Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения. (Обзор) // Проблемы прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–18.
5. Витвицкий П. М., Леонов М. Я. Про руйнування пластинки з щілиною // Прикл. механіка. – 1961. – № 3. – С. 85–92.
6. Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Алтури. – М.: Мир, 1990. – 391 с.

7. Довбня Е. Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек положительной кривизны с разрезами и отверстиями // Теорет. и прикл. механика. – 1997. – Вып. 26. – С. 59–69.
8. Довбня Е. Н., Шевченко В. П. К решению граничных задач теории ортотропных оболочек с разрезами и отверстиями произвольной конфигурации // Доп. НАН України. Сер. А. – 1995. – № 4. – С. 44–46.
9. Довбня Е. Н., Шевченко В. П. Система прямолинейных трещин в пологой ортотропной оболочке произвольной кривизны // Теорет. и прикл. механика. – 1984. – Вып. 15. – С. 48–53.
10. Довбня К. М. До питання дослідження концентрації напружень у ортотропній оболонці з отвором довільної конфігурації // Доп. НАН України. Сер. А. – 2001. – № 8. – С. 33–36.
11. Ивлев Д. Д. О теории трещин квазихрупкого разрушения // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1967. – № 6. – С. 88–128.
12. Каминский А. А. Исследования в области разрушения вязкоупругих тел // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 9. – С. 3–26.
13. Кирьян В. И. Методика оценки сопротивления конструкционных сталей вязким разрушениям // Автомат. сварка. – 1984. – № 11. – С. 1–6.
14. Кирьян В. И. Расчетное определение локальной пластической деформации в вершине трещиноподобного дефекта // Автомат. сварка. – 1985. – № 4. – С. 6–9.
15. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
16. Коляно Ю. М., Кушнір Р. М. Неустановившиеся температурные напряжения в армированной полосе – пластинке // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 7. – С. 124–128.
17. Корнилов Г. И., Ярема С. Я. Плоские образцы с трещиновидным концентратором для экспериментального исследования полос пластичности // Вопросы механики реального твердого тела. – 1962. – Вып. 1. – С. 29–36.
18. Костенко И. С. Упругое равновесие замкнутой ортотропной цилиндрической оболочки с продольными разрезами // Физ.-хим. механика материалов. – 1980. – **16**, № 5. – С. 67–71.
19. Кушнір Р. М. Неустановившиеся температурные напряжения в составной бесконечной пластинке с круговым отверстием // Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 94–98.
20. Кушнір Р. М. Визначення граничної рівноваги кусково-однорідної циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 135–143.
21. Кушнір Р. М. Визначення термопружного стану кусково-однорідної циліндричної оболонки з тріщиною // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 73–78.
22. Кушнір Р. М. Перерозподіл залишкових напружень у циліндричній кусково-однорідній оболонці з тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 5. – С. 39–45.
23. Кушнір Р. М., Лопушанська Г. П. Про один підхід до побудови розв'язку загальної задачі спряження // Мат. методи и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 198–203.
24. Кушнір Р. М., Осадчук В. А. Температурні напруження у кусково-однорідній циліндричній оболонці, зумовлені наявністю поздовжньої тріщини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 1. – С. 108–113.
25. Леонов М. Я., Панасюк В. В. Развитие найдрібніших тріщин в твердому тілі // Прикл. механіка. – 1959. – **5**, № 4. – С. 391–401.
26. Николишин М. М. Напряженное состояние упругопластических оболочек с несквозными трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1992. – Вып. 35. – С. 147–151.
27. Николишин М., Кушнір Р., Боднар Р. Розкриття наскрізної тріщини в кусково-однорідній пластині // машинознавство. – 1999. – № 8. – С. 19–22.
28. Николишин М. М., Маселко Т. Е. Предельное равновесие пологой цилиндрической оболочки с продольной трещиной с учетом пластических деформаций // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1986. – Вып. 23. – С. 80–84.
29. Николишин М. М., Маселко Т. Е. Предельное равновесие сферической упругопластической оболочки с двумя коллинеарными трещинами // Проблемы прочности. – 1994. – № 8. – С. 24–28.

30. *Николишин М. М., Маселко Т. Е.* Раскрытие несквозной трещины в сферической оболочке с учетом пластического деформирования // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1988. – Вып. 28. – С. 74–78.
31. *Николишин М., Сеньків Л., Уханська О.* Математична модель і дослідження напруженого стану ортотропної циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною // *Машинознавство.* – 2002. – № 8. – С. 9–12.
32. *Николишин М. М., Шабо А. Г.* Аналог  $\delta_k$ -модели для цилиндрической оболочки с продольной трещиной // *Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии.* – Киев: Наук. думка, 1989. – Ч. 2. – С. 33–34.
33. *Николишин М. М., Шабо А. Г.* Взаимодействие системы продольных разрезов в замкнутой цилиндрической оболочке с учетом пластического деформирования // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1989. – Вып. 30. – С. 50–54.
34. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
35. *Осадчук В. А., Кирьян В. И., Николишин М. М.* Раскрытие вершины сквозной трещины в цилиндрической оболочке под воздействием внутреннего давления // *Проблемы прочности.* – 1984. – № 10. – С. 64–67.
36. *Осадчук В. А., Кушнір Р. М., Николишин М. М.* Залишкові напруження в циліндричній оболонці з тріщиною // *Машинознавство.* – 1998. – № 4-5. – С. 40–43.
37. *Осадчук В. А., Николишин М. М.* Напряженное состояние замкнутой трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки и бесконечной пластины с трещинами // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1976. – Вып. 3. – С. 30–36.
38. *Осадчук В. А., Николишин М. М., Шабо А. Г.* Предельное равновесие замкнутой цилиндрической оболочки с регулярной системой поперечных сквозных трещин // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1988. – **24**, № 6. – С. 109–110.
39. *Осадчук В. А., Николишин М. М., Шабо А. Г., Маселко Т. Е.* Предельное равновесие ослабленных трещинами оболочек из упрочняющегося материала // *Прикл. механика.* – 1991. – № 2. – С. 67–72.
40. *Осадчук В. А., Николишин Т. М.* Математична модель внутрішньої тріщини в пружнопластичній циліндричній оболонці // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 2. – С. 111–116.
41. *Осадчук В. А., Подстригач Я. С.* К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластинке с трещинами // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1973. – № 3. – С. 69–78.
42. *Осадчук В. А., Подстригач Я. С.* Напряженное состояние и предельное равновесие оболочек с трещинами // *Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела / ВИНТИ.* – 1986. – **18**. – С. 3–52.
43. *Осадчук В. А., Федюк Е. М.* Интегральные уравнения задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пологой сферической оболочки с трещиной // *Докл. АН УССР. Сер. А.* – 1975. – № 2. – С. 81–85.
44. *Панасюк В. В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.
45. *Панасюк В. В.* О современных проблемах механики разрушения // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1982. – **18**, № 2. – С. 7–27.
46. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
47. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
48. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1974. – 416 с.
49. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.
50. *Підстригач Я. С., Осадчук В. А.* До визначення напруженого стану в замкнутій циліндричній оболонці з тріщиною // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* – 1972. – № 1. – С. 79–83.
51. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1975. – Вып. 1. – С. 29–41.
52. *Расчеты и испытания на прочность: Оборудование энергетическое / Метод. рекомендации МР 108.7-86.* – М.: НПО ЦНИИТМАШ, 1986. – 29 с.
53. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.

54. Фильштинский Л. А., Любчак В. А. Упругое поведение полубесконечных анизотропных пластин и оболочек под действием сосредоточенных нагрузок // Динамика и прочность машин. – 1981. – Вып. 33. – С. 11–15.
55. Фильштинский Л. А., Любчак В. А. Эффект подкрепления ребрами жесткости анизотропной оболочки с разрезами // Физ.-хим. механика материалов. – 1984. – **20**, № 1. – С. 53–58.
56. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Действие сосредоточенных сил на анизотропные оболочки // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 4. – С. 123–128.
57. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Напряженное состояние ортотропных оболочек, ослабленных трещинами // Докл. III нац. конгр. «Теорет. и приложн. механика» (Варна, 1977). – София, 1977. – Кн. 1. – С. 604–609.
58. Шевченко В. П. Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек: Учеб. пособие. – Донецк: Изд-во Донец. ун-та, 1977. – 114 с.
59. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек // Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений. – К.: А. С. К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: В 12 т. – Т. 7). – С. 159–196.
60. Шевченко В. П., Довбня К. М. Дослідження похибки застосування теорії спеціальної ортотропії при розв'язанні задач для ортотропних оболонок з розрізами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37**, № 6. – С. 116–118.
61. Шевченко В. П., Довбня К. М. Система граничних інтегральних рівнянь для ортотропної оболонки з розрізом довільної конфігурації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 1. – С. 103–108.
62. Atkinson C. Stress singularities and fracture mechanics // Appl. Mech. Rev. – 1979. – **32**, No. 2. – P. 123–135.
63. Barsoum R. S., Loomis R. W., Stewart B. D. Analysis of through cracks in cylindrical shells by the quarter-point elements // Int. J. Fract. – 1979. – **15**, No. 3. – P. 259–280.
64. Cowan A., Langford W. J. Effect of hydrogen and neutron irradiation on the failure of flowed zircalloy-2 pressure tubes // J. Nucl. Mat. – 1969. – No. 30. – P. 271–281.
65. Delale F., Erdogan F. Application of the line-spring model to a cylindrical shell containing a circumferential or axial part-through crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1982. – **49**. – P. 97–102.
66. Delale F., Erdogan F. Stress intensity factors in a hollow cylinder containing a radial crack // Int. J. Fract. – 1982. – **20**. – P. 251–256.
67. Delale F., Erdogan F. The crack problem in a specially orthotropic shell with double curvature // Eng. Fract. Mech. – 1983. – **18**. – P. 529–544.
68. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. and Phys. Solids. – 1960. – **8**, No. 2. – P. 100–104.
69. Erdogan F. Plastic strip model for thin shells // Prospects Fract. Mech. – Leyden, 1974. – P. 609–617.
70. Erdogan F., Delale F. Ductile fracture of pipes and cylindrical containers with circumferential flaw // Trans. ASME. Ser. J, J. Pressure Vessel Technol. – 1981. – **103**. – P. 160–168.
71. Erdogan F., Ratwani M. A note on the interference of two collinear crack in a cylindrical shell // Int. J. Fract. – 1974. – **10**, No. 4. – P. 463–465.
72. Erdogan F. E., Ratwani M., Yuceoglu U. On the effect of orthotropy in a cracked cylindrical shell // Int. J. Fract. – 1974. – **10**, No. 3. – P. 369–374.
73. Fearnough G. D., Watting B. Application of crack opening displacement approach to prediction of pressurized tube failure // Int. J. Fract. – 1968. – **4**, No. 3. – P. 233–243.
74. Folias E. S. Estimating plastic zone sizes // Int. J. Fract. – 1974. – **10**, No. 1. – P. 109–111.
75. Folias E. S. On the theory of fracture of curved sheets // Eng. Fract. Mech. – 1970. – **2**, No. 2. – P. 151–164.
76. Kobayashi A. S., Engstrom W. L., Simon B. R. Crack opening displacement and normal strains in centrally notched plates // Exp. Mech. – 1969. – No. 9. – P. 165–170.
77. Raju I. S. Newman J. C. (Jr) Stress-intensity factors for internal and external surface cracks in cylindrical vessels // Trans. ASME. Ser. J, J. Pressure Vessel Technol. – 1982. – **104**. – P. 293–298.

78. Rice J. R., Levy N. The part-through crack in an elastic plate crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1972. – **32**. – P. 185–194.
79. Sanders J. L. Dugdale model for circumferential through-cracks in pipes loaded by bending // Int. J. Fract. – 1987. – **34**, No. 1. – P. 71–81.
80. Wang N. M. Twisting of an elastic plate containing a crack // Int. J. Fract. – 1970. – **6**, No 4. – P. 367–378.
81. Wells A. A. Critical tip opening displacement as fracture criterion // Proc. Crack Propagation Symp. – Cranfield, 1961. – Vol. **1**. – P. 210–221.
82. Yashi O. S., Erdogan F. A cylindrical shell with an arbitrarily oriented crack // Int. J. Solids and Struct. – 1983. – **19**, No. 11. – P. 955–975.
83. Yashi O. S., Erdogan F. A pressurized cylindrical shell with a fixed end which contains on axial part-through or through crack // Int. J. Fract. – 1985. – **28**. – P. 161–187.

#### **НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ТРЕЩИНАМИ**

*Задача о предельном равновесии кусочно-однородной цилиндрической оболочки со сквозными и поверхностными трещинами сведена к системе сингулярных интегральных уравнений. При этом учтено наличие пластических деформаций на продолжении трещин. Предложен алгоритм численного решения системы интегральных уравнений совместно с условиями однозначности перемещений, условиями конечности напряжений и условиями пластичности тонких оболочек. Проведен численный анализ зависимости раскрытия фронта поверхностной трещины от нагрузки, геометрических и механических параметров оболочки.*

#### **STRESSED STATE AND LIMIT EQUILIBRIUM OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS CYLINDRICAL SHELLS WITH CRACKS**

*The problem on limit equilibrium of a piecewise-homogeneous cylindrical shell with through and surface cracks is reduced to a system of singular integral equations. In addition the existence of plastic strains on the crack extension is considered. An algorithm is proposed for numerical solution of a system of integral equations together with conditions of displacements uniqueness, conditions of stresses boundedness, and conditions of thin crack plasticity. The dependence of the surface crack front opening on loading, geometric and mechanical parameters of the shell is analyzed.*

Ин-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
15.04.03