

ДО ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ, ЗАСНОВАНОЇ НА КОНЦЕПЦІЇ КОВЗАННЯ

Розглянуто варіанти теорії ковзання [10, 17] для деяких часткових типів функцій зміцнення. Аналізується деформаційна анізотропія і пластична деформація при простому та монотонному навантаженні плоскостатичного середовища. Узагальнення на просторовий випадок досягається за допомогою постулату ізотропії Льюїсона. Встановлено взаємозв'язок теорії ковзання з відомими теоріями пластичних течій при ізотропному, кінематичному та комбінованому зміцненні, у тому числі з теорією пластичності [6, 13].

У рамках варіанта теорії ковзання [10, 17] з використанням одного часткового типу функції зміцнення проаналізовано деформаційну анізотропію і пластичну деформацію матеріалу при простому і деяких типах складного навантаження. Одержані результати зіставлено з аналогічними, які випливають із теорій пластичної течії при ізотропному [24], кінематичному [3], комбінованому [1, 5] зміцненні, і з результатами так званої структурної теорії пластичності, що враховує мікродеформації [6, 13].

1. Вихідні положення. Задача побудови визначальних рівнянь $\dot{\epsilon}_{mn} \sim \sim \dot{\sigma}_{mn}$ теорії ковзання [10, 17] за умови плоскостатичної деформації зводиться до визначення швидкості інтенсивності зсуву $\varphi'_t(\theta, t)$ і меж напрямків зсуву $-\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ із системи рівнянь

$$\int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} R[\lambda_k(\xi), |\theta - \theta_0|] \varphi'_\xi(\theta, \xi) d\theta d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos[\vartheta(t) - 2\theta_0 - 2\Phi_0],$$

$$\theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)], \quad (1)$$

$$\tau_s + \int_{t_0 - \alpha_1(\xi)}^t \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} R[\lambda_k(\xi), |\theta - \theta_0|] \varphi'_\xi(\theta, \xi) d\theta d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)],$$

$$\theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)], \quad \xi \in [t_0, t], \quad (2)$$

$$S(t) = [S_1^2(t) + S_3^2(t)]^{1/2}, \quad S_1 = [\sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t)] / \sqrt{2}, \quad S_3 = \sqrt{2} \sigma_{12}(t),$$

$$\Phi(t) = \Phi_1(t) - \Phi_0, \quad 2\Phi_1 = \arctg[S_3(t) / S_1(t)], \quad \Phi_0 = \Phi_1(t_0),$$

$$\vartheta(t) = \arctg[dS_3(t) / dS_1(t)]. \quad (3)$$

Тут t_0 – початковий, t – довільний моменти пластичного деформування і за параметр часу приймається довжина дуги траєкторії навантаження; $R[\lambda_k, \omega] = \Pi[\lambda_k] F(\omega)$ – універсальна функція матеріалу, яка подається у вигляді добутку функцій пластичності $\Pi[\lambda_k]$ та зміцнення $F(\omega)$; λ_k – деякі параметри історії навантаження або пластичного деформування; $\omega = |\theta - \theta_0|$ – кут між напрямком пластичного зсуву $n(\theta)$ і довільним напрямком $m(\theta_0)$ у площині деформування.

Ефективні аналітичні та числові методи визначення функцій $\varphi'_t(\theta, t)$, $\alpha_{1,2}(t)$ із системи інтегральних рівнянь (1), (2) для загального можливого й

часткових випадків функції зміцнення $F(\omega)$ наведено в роботах [18, 21]. Способи побудови функцій пластичності $\Pi[\lambda_k]$ розглянуто в [15–17, 21].

При відомих $\varphi'_t(\theta, t)$, $\alpha_{1,2}(t)$ компоненти вектора $\dot{\Gamma}^{(p)}$ швидкості плоскопластичної деформації визначаються за формулами

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_1^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_t(\theta, t) \cos 2(\theta + \Phi_0) d\theta, \\ \dot{\Gamma}_3^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_t(\theta, t) \sin 2(\theta + \Phi_0) d\theta.\end{aligned}\quad (4)$$

Розглянемо деякі особливості пластичного деформування для одного спеціального типу функції зміцнення [18, 19]

$$F(\omega) = a_0 + a_2 \cos 2\omega + a_3 \delta(\omega) + a_4 \delta\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right), \quad (5)$$

де $\delta(\omega)$ – дельта-функція Дірака, $a_i \sim \text{const}$. Функція $F(\omega)$ (5) є частковим випадком розглянутої у цих же роботах [18, 19] загальної можливої функції

$$F(\omega) = k_1 \omega^{-h_1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \cos 2n\omega + k_2 \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)^{-h_2} \quad (6)$$

і впливає з неї, якщо покласти $a_{2n} = 0$ при $n > 1$, а також $k_1 = a_3(1 - h_1)$, $k_2 = a_4(1 - h_2)$ і перейти до границі при $h_1, h_2 \rightarrow 1$. Зауважимо, що функція зміцнення $F(\omega)$ вигляду (5) використовується також у публікаціях [6, 13] без відповідних посилань на [18, 19].

Система нелінійних рівнянь (1), (2) з невідомими функціями як під знаком інтеграла, так і в межах інтегрування, розв'язується по-різному залежно від типу $F(\omega)$ і способу навантаження. Розглянемо спочатку випадок монотонного і, зокрема, пропорційного навантаження.

2. Монотонна деформація. Монотонною називають [10, 17] деформацію, за якої функції $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ є неспадними ($\dot{\alpha}_{1,2} \geq 0$) функціями часу. Така деформація при складному навантаженні можлива при деяких обмеженнях швидкості $\dot{\Phi}(t)$ обертання головних осей тензора напружень.

За умови $\dot{\alpha}_{1,2}(t) \geq 0$ у подвійному інтегралі рівняння (2) можна зробити перестановку порядку інтегрування і це рівняння записати так:

$$\begin{aligned}\tau_s + \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} F(|\theta - \theta_0|) \Psi(\theta, t) d\theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)], \\ \theta_0 &\in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)].\end{aligned}\quad (7)$$

Тут

$$\Psi(\theta, t) = \int_{t^*(\theta)}^t \Pi[\lambda_k(\xi)] \varphi'_\xi(\theta, \xi) d\xi, \quad (8)$$

$t^*(\theta)$ – момент часу, з якого в заданому напрямку $n(\theta)$ починаються ковзання. При $\theta = \pm \alpha_{2,1}(t)$ із (8) випливає

$$\Psi(\pm \alpha_{2,1}(t), t) = 0. \quad (9)$$

Таким чином, задача визначення монотонної деформації в математичному плані звелася до розв'язування інтегрального рівняння (7) за умови (9).

Підставивши $F(\omega)$ (5) у рівняння (7), отримуємо

$$\begin{aligned} a_3 \Psi(\theta_0, t) + \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} [a_2 \cos 2(\theta - \theta_0) + a_0] \Psi(\theta, t) d\theta = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)] - \tau_s, \quad \theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Складова $a_4 \delta\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$ функції $F(\omega)$ (5) не включена до рівняння (10), так як за умови $|\theta - \theta_0| < \pi/2$ вона не впливає на його розв'язок. Після подвійного диференціювання (10) за θ_0 одержимо

$$\begin{aligned} a_3 \Psi''(\theta_0, t) - 4a_2 \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \cos 2(\theta - \theta_0) \Psi(\theta, t) d\theta = \\ = -2\sqrt{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)], \end{aligned} \quad (11)$$

де $\Psi''(\theta_0, t) = \partial^2 \Psi(\theta_0, t) / \partial \theta_0^2$. Якщо тепер вилучити з (10) і (11) інтегральний член, то отримаємо таке рівняння:

$$\Psi'' + 4\Psi = 4C, \quad (12)$$

$$\text{тут } C = -\frac{1}{a_3} \left(\tau_s + a_0 \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \Psi(\theta, t) d\theta \right).$$

Отже, при монотонному навантаженні, коли $F(\omega)$ задається формулою (5), складна система вихідних нелінійних інтегральних рівнянь вироджується і зводиться до простого лінійного диференціального рівняння (12). Його загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{aligned} \Psi(\theta, t) = A(\alpha) \cos 2(\theta - \alpha) + B(\alpha) \sin 2(\theta - \alpha) + C(\alpha), \\ 2\alpha = \alpha_2(t) + \alpha_1(t), \quad 2\alpha = \alpha_2(t) - \alpha_1(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Частковий розв'язок, що тотожно задовольняє рівняння (7) та умову (9), подається формулами

$$\begin{aligned} \Psi(\theta, t) = A [\cos 2(\theta - \Phi) - \cos 2\alpha], \\ A = \frac{\tau_s}{(a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{(a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha}{a_3 + a_2 \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right)} = \frac{\tau_s \sqrt{2}}{S(t)}, \\ \alpha_{1,2}(t) = \alpha(t) \mp \Phi(t), \quad \dot{\alpha}_{1,2}(t) = \dot{\alpha}(t) \mp \dot{\Phi}(t) \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

При відомій $\Psi(\theta, t)$ швидкість інтенсивності ковзання $\varphi'_t(\theta, t)$ можна визначити за співвідношенням (8). Для цього також можна скористатися рівнянням (1), яке з точністю до правої частини при заміні $\psi(\theta, t)$ на $\Psi(\theta, t)$ співпадає з (7). Методи розв'язування цих рівнянь ідентичні, тому аналогічно до (13) і (14) запишемо

$$\begin{aligned} \psi(\theta, t) \equiv \Pi \varphi'_t(\theta, t) = A_1 \cos [\vartheta(t) - 2\Phi_1(t)] \cos 2[\theta - \Phi(t)] + \\ + B_1 \sin [\vartheta(t) - 2\Phi_1(t)] \sin 2[\theta - \Phi(t)] + C_1 \cos 2[\vartheta(t) - 2\Phi_1(t)], \end{aligned} \quad (16)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a_3 + 2a_0\alpha}{\left[a_3 + a_2 \left(\alpha + \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) \right] (a_3 + 2a_0\alpha) - a_0 a_2 \sin^2 2\alpha},$$

$$B_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{a_3 + a_2 \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right)}, \quad C_1 = -A_1 \frac{a \sin 2\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha}.$$

Функції $\alpha_{1,2}(t) = \alpha(t) \mp \Phi(t)$, як і раніше, визначаються рівностями (15).

Для компонент вектора швидкості плоскопластичної деформації на основі (4) і (16) одержуємо

$$\begin{aligned} \Pi \dot{\Gamma}_1^{(p)} &= B_{11} \cos[\vartheta(t) - 2\Phi_1(t)] \cos 2\Phi_1(t) - \\ &\quad - B_{12} \sin[\vartheta(t) - 2\Phi_1(t)] \sin 2\Phi_1(t), \\ \Pi \dot{\Gamma}_3^{(p)} &= B_{11} \cos[\vartheta(t) - 2\Phi_1(t)] \sin 2\Phi_1(t) + \\ &\quad + B_{12} \sin[\vartheta(t) - 2\Phi_1(t)] \cos 2\Phi_1(t), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{де} \quad B_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_1 \left[\left(\alpha + \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) - \frac{a_0 \sin^2 2\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha} \right], \quad B_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2} B_1 \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right).$$

У системі координат $BS_v S_q$ з початком у довільній точці B траєкторії навантаження і повернутій відносно $OS_1 S_3$ на кут $2\Phi_1(t)$ (рис. 1) формули (17) записуються так:

$$\Pi d\Gamma_v^{(p)} = B_{11}(\alpha) dS_v, \quad \Pi d\Gamma_q^{(p)} = B_{12}(\alpha) dS_q, \quad (18)$$

$$\text{тут} \quad d\Gamma^{(p)} = \dot{\Gamma}^{(p)} dt, \quad d\mathbf{S} = \dot{\mathbf{S}} dt.$$

Визначальні рівняння (18) не залежать від орієнтації вектора \mathbf{S} і, отже, задовольняють постулат ізотропії Льюшина [2]. Постулат дозволяє узагальнити формули (18) на випадок п'ятивимірної траєкторії монотонного навантаження у дев'яторному просторі напружень. Оскільки згідно з формулами (15) функція α при монотонному навантаженні залежить тільки від довжини вектора \mathbf{S} , $\alpha(t) = \alpha[\mathbf{S}]$, то узагальнені на просторовий випадок формули (18) можна подати так:

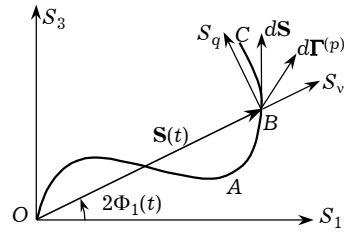


Рис. 1

$$\Pi d\Gamma_v^{(p)} = P_1(S) dS_v, \quad \Pi d\Gamma_{q_i}^{(p)} = P_2(S) dS_{q_i}. \quad (19)$$

Тут $d\Gamma_v^{(p)}$, $d\Gamma_{q_i}^{(p)}$, dS_v , dS_{q_i} – проєкції векторів $d\Gamma^{(p)}$, $d\mathbf{S}$ на осі локальної ортогональної системи координат S_v , S_{q_i} з одиничними ортами $\mathbf{v} = \mathbf{S}/S$ і $\mathbf{q}_i \perp \mathbf{v}$, $i = 1, 2, 3, 4$; $P_1(S) = B_{11}(\alpha[\mathbf{S}])$, $P_2(S) = B_{12}(\alpha[\mathbf{S}])$. У частковому випадку пропорційного навантаження ($d\mathbf{S} = dS_v$) на основі формул (19) одержуємо

$$\Pi d\Gamma^{(p)} = P(S) dS. \quad (20)$$

Якщо припустити, що при пропорційному навантаженні функція пластичності Π залежить тільки від інтенсивності напружень σ_i або, що те ж саме, від довжини вектора навантаження \mathbf{S} , то рівняння (20) можна

проінтегрувати й записати не в швидкостях, а в кінцевому вигляді

$$\Gamma^{(p)} = \Phi(S) \mathbf{S}, \quad \Phi(S) = \int \frac{P_1(S)}{\Pi(S)} S dS. \quad (21)$$

Формула (21) разом з законом Гука для пружної об'ємної деформації $\sigma = 3K\varepsilon$ виражає теорію малих пружнопластичних деформацій (ТМППД).

Розглянемо тепер випадок лінійної моделі плоскопластичного середовища, в рамках якої приймається $\Pi \equiv \text{const}$ [10]. Показано [8, 21], що лінійна модель дозволяє описати пластичну деформацію матеріалів, для яких діаграма $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ поза границями пружності є лінійною або близькою до лінійної ($E_{it} \equiv d\sigma_i / d\varepsilon_i \approx \text{const}$).

Без обмеження загальності покладемо $\Pi \equiv 1$. У цьому разі згідно з формулою (8) будемо мати

$$\Psi(\theta, t) \equiv \int_{t^*(\theta)}^t \varphi'_t(\theta, \xi) d\xi = \varphi(\theta, t), \quad (22)$$

де $\varphi(\theta, t)$ – сумарна інтенсивність зсуву, накопичена за весь час пластичного деформування. Умову (9) запишемо так:

$$\varphi(\mp \alpha_{1,2}(t), t) = 0. \quad (23)$$

За аналогією з (4) при $\Pi \equiv 1$ можемо відразу одержати формули для компонент вектора сумарної плоскопластичної деформації

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi(\theta, t) \cos 2(\theta + \Phi_0) d\theta, \\ \Gamma_3^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi(\theta, t) \sin 2(\theta + \Phi_0) d\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

Якщо прийняти до уваги формули (14), (15), (22) і обчислити квадратури (24), то остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} A_1 \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) \cos 2\Phi_1, \\ \Gamma_3^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} A_1 \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) \sin 2\Phi_1 \end{aligned}$$

або у векторній формі

$$\Gamma^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_1 \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right) \mathbf{S} / S. \quad (25)$$

Так як $\alpha = \alpha[S]$, то формула (25) допускає таке подання:

$$\Gamma^{(p)} = \Phi(S) \mathbf{S}, \quad \Phi(S) = \frac{\sqrt{2}}{2S} A_0(\alpha) \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right), \quad \alpha = \alpha[S]. \quad (26)$$

Таким чином, знову отримали формулу (21), записану раніше для нелінійної моделі ($\Pi \neq \text{const}$), але тільки при пропорційному навантаженні. Отже, існує істотна відмінність між нелінійним і лінійним пластичними середовищами. У першому випадку із теорії ковзання отримуємо ТМППД тільки при пропорційному навантаженні, а в другому – при монотонному. Результат, одержаний для матеріалів з лінійним або близьким до лінійного зміцненням ($E_{it} \approx \text{const}$), значно розширює рамки застосування ТМППД і має важливе прикладне значення. Коли $\Pi \neq \text{const}$, монотонна деформація залежить від траєкторії навантаження. Однак і тут, якщо функція $\Pi[\lambda_k]$

змінюється у малому діапазоні, то така залежність може бути неістотною і рівняннями деформаційної теорії можна користуватися при монотонному навантаженні як наближеними.

Запишемо тепер умови, які повинні задовольняти траєкторії монотонного навантаження $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t)$. Як зазначалося вище, при такому навантаженні

$$\dot{\alpha}_{1,2}(t) = \dot{\alpha}(t) \mp \dot{\Phi}(t) \geq 0. \quad (27)$$

З урахуванням формул (3), (15) умова (27) зводиться до такої:

$$\beta \equiv \arctg \left[\left(\frac{S\dot{S}}{S_k\dot{S}_k} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \leq \beta_0, \quad \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{2\sqrt{2} \tau_s}{Sf'(\alpha)}. \quad (28)$$

Тут β – кут між векторами \mathbf{S} і $\dot{\mathbf{S}}$ у довільній точці траєкторії навантаження, β_0 – його граничне значення при монотонній деформації;

$$f'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{a_0 \sin 2\alpha - (a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha}{a_3 + a_2 \left(\alpha - \frac{1}{4} \sin 4\alpha \right)} \right]. \quad (29)$$

Графіки залежності $\beta_0 \sim \lambda$, де $\lambda = S / \sqrt{2} \tau_s$, побудовані на основі формули (28) для деяких значень параметрів a_i функції зміцнення $F(\omega)$ (5), наведено на рис. 2. Як випливає з аналізу графіків, монотонне навантаження може бути «досить далеким» від пропорційного. Зокрема, при деформуванні на межі пружності ($S_0 = \sqrt{2} \tau_s$) граничне значення кута β_0 дорівнює $\pi/2$. Воно зменшується зі зростанням величини вектора навантаження.

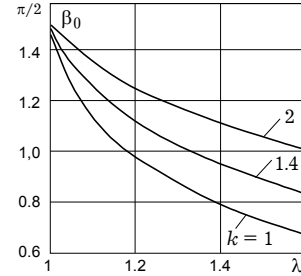


Рис. 2

Межі застосування ТМППД, які встановлюються моделлю лінійного ($\Pi \equiv 1$) плоскопластичного середовища, одержали експериментальне підтвердження для багатьох матеріалів [8, 21, 22 та ін].

3. Поверхня (лінія) навантаження при монотонній деформації. У просторі напружень σ_{ij} поверхня навантаження Σ відокремлює область пружного деформування від пружнопластичного. Для моделі, що розглядається, початкова поверхня навантаження Σ_0 визначається умовою пластичності Треска $\tau_{\max} = \tau_s$. Оскільки при плоскопластичній деформації

$$\tau_{\max} = \left[\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2 \right]^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{2} S,$$

то умова досягнення пластичного стану початково ізотропного матеріалу записується так:

$$S = \sqrt{2} \tau_s. \quad (30)$$

Рівняння (30) є рівнянням кола радіуса $\sqrt{2} \tau_s$ у площині OS_1S_3 . Якщо при плоскопластичній деформації прийняти, що $\sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$, і вважати, що $\sigma_s = \sqrt{3} \tau_s$, то умови пластичності Треска ($\tau_{\max} = \tau_s$) і Губера – Мізеса ($\sigma_i = \sigma_s$) у цьому разі будуть співпадати й описуватися рівнянням (30).

Пластична деформація зумовлює виникнення деформаційної анізотропії і, в кінцевому підсумку, зміну поверхні навантаження. Нехай елемент тіла зазнав пропорційного (або відповідного пропорційному – монотонного) навантаження, яке характеризується вектором $\mathbf{S}^0 = \mathbf{S}(t^0)$, $S^0 > \sqrt{2} \tau_s$. Для зручності будемо вважати його напрямленим вздовж осі OS_1 ($\Phi^0 \equiv \Phi(t^0) = 0$). Проведемо розвантаження, а потім повторно навантаження, яке характеризується вектором $\mathbf{S}(t)$, нахиленим до осі OS_1 під кутом $2\Phi_1(t) = \arctg(S_3 / S_1)$ (рис. 3). Запишемо умову виникнення нових пластичних деформацій при повторному навантаженні, тобто розглянемо задачу побудови у площині OS_1S_3 вторинної лінії навантаження. Як показано в [20, 21], розв'язок сформульованої задачі описується формулами

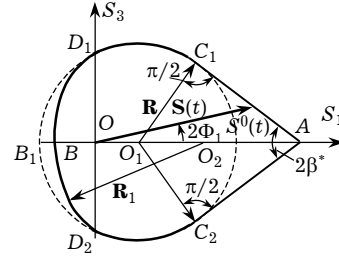


Рис. 3

$$S_1 = \sqrt{2}R_m(\theta_0, t^0) \cos 2\theta_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial R_m(\theta_0, t)}{\partial \theta_0} \sin 2\theta_0,$$

$$S_3 = \sqrt{2}R_m(\theta_0, t^0) \sin 2\theta_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial R_m(\theta_0, t)}{\partial \theta_0} \cos 2\theta_0, \quad \Phi^0 = 0. \quad (31)$$

Тут $R_m(\theta_0, t^0)$ – опір зсуву, під яким розуміємо віднесену до одиниці площі силу опору ковзання по заданій площинці в заданому напрямку $m(\theta_0)$.

При пропорційному навантаженні вздовж осі OS_1

$$R_m(\theta_0, t^0) = \tau_s + \int_{-\alpha(t^0)}^{\alpha(t^0)} F(|\theta - \theta_0|) \Psi(\theta, t^0) d\theta. \quad (32)$$

Зауважимо, що у формулу (32), як і в формули (14) і (15), які визначають $\Psi(\theta_0, t)$, не входить функція пластичності $\Pi[\lambda_k]$. Тому одержані в п. 3 результати залишаються в силі як для лінійного ($\Pi \equiv 1$), так і нелінійного ($\Pi \neq \text{const}$) середовищ.

Якщо підставити $F(\omega)$ (5) і $\Psi(\theta_0, t^0)$ (14) у співвідношення (32) і обчислити інтеграли, то для трьох характерних напрямків зміни θ_0 одержимо

$$R_m(\theta_0, t^0) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} S(t^0) \cos 2\theta_0, & \theta_0 \in [-\alpha(t^0), \alpha(t^0)], \\ Q_1(\theta_0, t^0), & \theta_0 \in [\alpha(t^0), \pi/2 - \alpha(t^0)], \\ Q_2(\theta_0, t^0), & \theta_0 \in [\pi/2 - \alpha(t^0), \pi/2 + \alpha(t^0)]. \end{cases} \quad (33)$$

Тут позначено

$$Q_1 = \tau_s + A \left[a_2 \left(\alpha^0 - \frac{1}{4} \sin 4\alpha^0 \right) \cos 2\theta_0 + a_0 (\sin 2\alpha^0 - 2\alpha^0 \cos 2\alpha^0) \right],$$

$$Q_2 = Q_1 - A a_4 (\cos 2\theta_0 - \cos 2\alpha_0), \quad \Phi^0 = 0, \quad \alpha^0 = \alpha(t^0). \quad (34)$$

Для визначення опору зсуву $R_m(\theta_0 \pm \pi, t^0)$ у напрямку m' , який задається кутом $\theta_0 \pm \pi$, а також у напрямку $-m(\theta_0)$, протилежному до $m(\theta_0)$, можна використати залежності [21]

$$R_m(\theta_0 \pm \pi, t^0) = R_m(\theta_0, t^0), \quad R_{-m}(\theta_0, t) = R_m(\pi/2 + \theta_0, t). \quad (35)$$

Зокрема, ефект Баушингера визначається так:

$$\tau_s^- = R_m(\pi/2, t^0). \quad (36)$$

Побудована за формулами (31)–(36) лінія навантаження $AC_1D_1BD_2C_2$ показана на рис. 3. (Детальна методика побудови Σ для довільних $F(\omega)$ описана в [20, 21]). Як випливає з рис. 3, лінія навантаження Σ є симетричною відносно вектора $\mathbf{S}^0 = \mathbf{S}(t^0)$ і складається з трьох характерних частин: а) дуг C_1D_1 і C_2D_2 кола радіуса R з центром у точці O_1 , де $R = \sqrt{2} \left[\tau_s + A(\alpha^0) \left(\alpha^0 - \frac{1}{4} \sin 4\alpha^0 \right) \right]$, $OO_1 = \sqrt{2} A(\alpha^0) \left(\alpha^0 - \frac{1}{4} \sin 4\alpha^0 \right)$; б) кута C_1AC_2 ($OA = S^0$, $2\beta^* = \pi - 4\alpha^0$), сторони якого дотикаються кола радіуса R ; в) дуги D_1BD_2 кола радіуса R_1 з центром в точці O_2 , де $R_1 = \sqrt{2} \left[\tau_s + a_0(\sin 2\alpha^0 - 2\alpha^0 \cos 2\alpha^0) + a_4 \cos 2\alpha^0 \right]$, $OO_2 = OO_1 + \sqrt{2} A |a_4|$. Відрізок OB визначає ефект Баушингера. Відхилення дуги D_1BD_2 від $D_1B_1D_2$ зумовлюється членом $a_4 \delta(\pi/2 - \omega)$ функції зміцнення $F(\omega)$ (5). Він не впливає на інші ділянки лінії Σ і на розвиток монотонної деформації, але дозволяє описати деформацію при знакозмінному навантаженні.

Внутрішні параметри побудованої на рис. 3 лінії Σ залежать тільки від довжини вектора навантаження $\mathbf{S}^0 = \mathbf{S}(t^0)$ і не залежать від його орієнтації у площині OS_1S_3 . Крім цього, записані вище визначальні рівняння (21) і (26) задовольняють постулат ізотропії Ільюшина. Звідси як наслідок випливає висновок: при монотонній деформації поверхня навантаження у п'ятивимірному просторі девіатора напружень утворюється шляхом обертання лінії $AC_1D_1BD_2C_2A$ (рис. 3) навколо вектора $\mathbf{S}^0 = \mathbf{S}(t^0)$. Отже, вона складається із частин двох п'ятивимірних гіперсфер радіусів R і R_1 та гіперконуса з вершиною у точці навантаження, твірні якого дотичні до гіперсфери радіуса R , і кутом розхилу $2\beta^* = \pi - 4\alpha^0$, де $\alpha^0 = \alpha[S^0]$.

При довільному (немонотонному) навантаженні рівняння (31) для побудови лінії Σ залишаються в силі, але опір зсуву R_m потрібно обчислювати за більш складною формулою:

$$R_m(\theta_0, t^0) = \tau_s + \int_{t_0 - \alpha_1(\xi)}^{t^0} \int_{\alpha_2(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} \Pi[\lambda_k(\xi)] F(|\theta - \theta_0|) \phi'_\xi(\theta, \xi) d\theta d\xi. \quad (37)$$

При цьому геометрія лінії навантаження буде істотно залежати від історії навантаження і набувати складніших форм.

Щоб відобразити вплив кожного із чотирьох членів функції зміцнення (5) на поверхню навантаження Σ (рис. 3), розглянемо її часткові випадки.

1°. Нехай $F = a_0 = \text{const}$. При цьому початкова поверхня Σ_0 (п'ятивимірна гіперсфера радіуса $R_0 = \sqrt{2} \tau_s$) у процесі навантаження ізотропно розширюється (рис. 4а), як це приймається у випадку теорії пластичної течії Гандельмана – Ліня – Прагера [15, 24].

2°. У випадку $F = a_2 \cos 2\omega$ маємо кінематичне зміцнення (рис. 4б), яке покладено в основу теорії Ішлінського [3, 15].

3°. Випадок $F = a_0 + a_2 \cos 2\omega$ відповідає комбінованому зміцненню: поверхня навантаження ізотропно розширюється і кінематично зміщується як жорстке ціле (рис 4в). За такої гіпотези при деяких обмеженнях, що накладаються на функцію $\Pi[\lambda_k]$, отримуємо теорію пластичності Кадашевича – Новожилова [5] і Арутюняна – Вакуленка [1, 15].

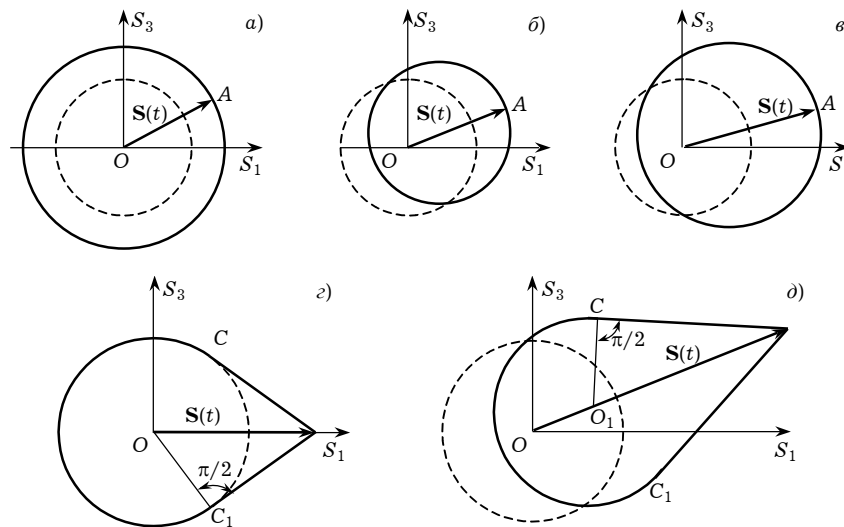


Рис. 4

4°. Заслужує окремого розгляду випадок $F = a_3 \delta(\omega)$, який пов'язаний з кінематикою зміни поверхні навантаження, запропонований Сандерсом [25]. Вважається, що Σ є обвідною скінченного або нескінченного числа незалежних між собою плоских гладких поверхонь $f_\alpha = 0$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$, які можуть поступально зміщуватися під дією кінця вектора активного навантаження $\mathbf{S} = \mathbf{S}(t)$. При такій кінематиці поверхня Σ утворюється п'ятивимірною гіперсферою радіуса $R_0 = \sqrt{2} \tau_s$ і гіперконусом обертання з вершиною у точці навантаження і твірними, дотичними до гіперсфери (рис. 4з). Зокрема, таку поверхню Σ при монотонному навантаженні отримуємо з основоположної теорії ковзання Батдорфа – Будянського [23].

5°. Розглянута в попередньому пункті кінематика Сандерса доповнюється у роботі [4] гіпотезою про переміщення поверхні навантаження як жорсткого цілого (другий варіант комбінованого зміцнення). Відповідна поверхня Σ зображена на рис. 4д. Вона є наслідком функції зміцнення $F = a_2 \cos 2\omega + a_3 \delta(\omega)$. Автори [4] при побудові визначальних рівнянь $\dot{\epsilon}_{mn}^{(p)} \sim \dot{\sigma}_{mn}$ обмежилися розглядом монотонної деформації за умови $\Pi = 1$.

6°. Зупинимося тепер більш детально на теорії пластичності, запропонованій у роботах [6, 13]. Зробимо такі зауваження. (Тут йдеться не про декларативну теорію, а реально побудовану). Якщо дещо спростити прийняті в [6, 13] символіку та термінологію (наприклад, замінити термін *мікродеформація* на більш зрозумілий – *інтенсивність зсуву*, провести усереднення деформації по об'єму елемента тривимірного тіла, а не абстрактного п'ятивимірного простору), вилучити з теорії деякі поняття і гіпотези, які не мають фізичного підґрунтя і ніде не використовуються при побудові визначальних рівнянь $\dot{\epsilon}_{mn}^{(p)} \sim \dot{\sigma}_{mn}$ (наприклад, змінну в межах $[0, \infty]$ величину границі течії τ_s і т.п.), то отримаємо варіант теорії ковзання, в основу якого при $\Pi = 1$ покладено частковий випадок функції зміцнення

$F(\omega)$ вигляду (5). Тому викликає подив висновок авторів робіт [6, 13], що із запропонованої ними теорії як часткові випливають відомі теорії ковзання. При цьому автори посилаються на такі роботи, як [7, 9–12, 14, 17, 23]. Як нам здається, тут у явній формі напрошується протилежний висновок. Зокрема, на основі функції зміцнення $F(\omega)$ (5) і $\Pi = 1$ не можна в принципі одержати як часткові результати, притаманні загальній можливій $F(\omega)$ (6) і довільній функції пластичності $\Pi[\lambda_k]$. Незрозумілим є також твердження авторів робіт [6, 13] про побудову ними *структурної теорії, у якій враховано мікродеформації*. Адже вихідні положення теорії і, в кінцевому підсумку, визначальні рівняння зв'язку $\dot{\varepsilon}_{mn}^{(p)} \sim \dot{\sigma}_{mn}$ не містять ні жодного параметра, ні тим більше функції, які враховували б структуру матеріалу або фізичні механізми пластичного деформування. Щодо врахування мікродеформацій, то тут справа зводиться до загальноприйнятої процедури підсумовування деформацій зсуву по об'єму елемента тіла.

У зв'язку з тим, що в роботах [6, 13], по суті, розглянута при $\Pi \equiv 1$ тільки монотонна деформація, то одержані в них співвідношення $\varepsilon_{mn}^{(p)} \sim \sigma_{mn}$ є частковим випадком визначальних рівнянь теорії малих пружнопластичних деформацій.

Висновки. Існує тісний взаємозв'язок між теоріями ковзання і відомими теоріями пластичної течії при ізотропному кінематичному та комбінованому зміцненнях. З так званої структурної теорії пластичності [6, 13] також отримуються визначальні рівняння $\dot{\varepsilon}_{mn}^{(p)} \sim \dot{\sigma}_{mn}$ часткового варіанта теорії ковзання.

Автор вдячний К. М. Русинкові за обговорення результатів роботи.

1. Арутюнян Р. А., Вакуленко А. А. О многократном нагружении упругопластической среды // Изв. АрмССР. Механика. – 1965. – № 4. – С. 53–61.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
3. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Укр. мат. журн. – 1954. – 6, № 3. – С. 314–325.
4. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. О предельных вариантах теории пластичности, учитывающей начальные микронапряжения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 3. – С. 93–96.
5. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения // Прикл. математика и механика. – 1958. – 22, № 1. – С. 78–89.
6. Кадашевич Ю. И., Новожилов В. В., Черняков Ю. А. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации // Прикл. математика и механика. – 1986. – 50, № 6. – С. 890–897.
7. Кнетс И. В. Основные современные направления в математической теории пластичности. – Рига: Зинатне, 1971. – 147 с.
8. Кудряшов Н. Н., Рычков Б. А., Швайко Н. Ю. Теоретическое и экспериментальное исследование законов деформации сплава АК-6 при сложном нагружении // Изв. АН КиргССР. – 1970. – № 1. – С. 28–35.
9. Леонов М. Я. Основные постулаты теории пластичности // Докл. АН СССР. – 1971. – 199, № 1. – С. 51–54.
10. Леонов М. Я., Швайко Н. Ю. Сложная плоская деформация // Докл. АН СССР. – 1964. – 159, № 5. – С. 1007–1010.
11. Малмейстер А. К. Основы теории локальных деформаций. Обзор // Механика полимеров. – 1965. – № 4. – С. 12–27.
12. Мохель А. Н., Салганик Р. Л., Христианович С. А. О пластическом деформировании упрочняющихся металлов и сплавов: Определяющие уравнения и расчеты по ним // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С. 119–141.
13. Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И., Черняков Ю. А. Теория пластичности, учитывающая микродеформации // Докл. АН СССР. – 1985. – 284, № 4. – С. 821–823.

14. Русинко К. Н. Теория пластичности и неустановившейся ползучести. – Львов: Вища шк., 1981. – 148 с.
15. Швайко М. Ю. Про теорію пластичності з гладкими поверхнями навантаження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1997. – **33**, № 6. – С. 63–70.
16. Швайко Н. Ю. Концепция скольжения и некоторые особенности пластического деформирования материалов при сложном нагружении // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. – М.: Изд-во Моск. гос. горн. ун-та, 2001. – С. 348–364.
17. Швайко Н. Ю. К теории пластичности, основанной на концепции скольжения // Прикл. механика. – 1976. – **12**, № 11. – С. 12–24.
18. Швайко Н. Ю. Методы решения уравнений, описывающих законы деформирования линейной анизотропно упрочняющейся плоскопластической среды // Сложная деформация твердого тела. – Фрунзе: Илим, 1967. – С. 3–34.
19. Швайко Н. Ю. О возможном общем виде функции упрочнения линейной плоскопластической среды // Гидроаэромеханика и теория упругости. – 1972. – № 14. – С. 109–120.
20. Швайко Н. Ю. О развитии деформационной анизотропии при монотонном нагружении линейной анизотропно упрочняющейся плоскопластической среды // Деформация неупругого тела. – Фрунзе: Илим, 1970. – С. 31–53.
21. Швайко Н. Ю. Сложное нагружение и вопросы устойчивости. – Днепропетровск: Изд-во Днепр. гос. ун-та, 1989. – 176 с.
22. Швайко Н. Ю., Макаренко А. Г., Гашко А. Л. и др. О пределах применимости теории малых упругопластических деформаций при непропорциональном нагружении сплава ВТ-6с // Прикл. механика. – 1976. – **12**, № 2. – С. 48–53.
23. Batdorf S. B., Budiansky B. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip // NASA Techn. Notes. – April, 1949. – No. 1871.
Те саме: Батдорф С. Б., Будянски Б. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // Механика: Сб. пер. иностр. статей. – 1962. – № 1. – С. 135–155.
24. Handelman G. H., Lin C. C., Prager W. On the mechanical behavior of metals in the strain-hardening range // Quart. Appl. Math. – 1947. – No. 4. – P. 397–407.
25. Sanders J. L. Plastic stress-strain relations based on linear loading functions // Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. – 1954. – P. 455–460.

К ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ, БАЗИРУЮЩЕЙСЯ НА КОНЦЕПЦИИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Рассмотрены варианты теории скольжения [10, 17] при некоторых частных типах функций упрочнения. Анализируется деформационная анизотропия и пластическая деформация при простом и монотонном нагружениях плоскопластической среды. Обобщение на пространственный случай достигается при помощи постулата изотропии Ильюшина. Устанавливается взаимосвязь теории скольжения с известными теориями пластического течения при изотропном, кинематическом и комбинированном упрочнениях, включая теорию пластичности [6, 13].

ON PLASTICITY THEORY, BASED ON SLIDING CONCEPTION

Some variants of the theory of sliding [10, 17] at particular types of hardening functions are considered in the article. Deformation anisotropy under simple and monotonic loading of plano-plastic environment is analyzed. Generalization on a three-dimensional case is achieved by means of Iliushin's isotropy postulate. The interconnection between the theory of sliding and well-known theories of plastic flow under isotropic, kinematic and compound hardening is defined. Correlation of the theory of sliding and the theory of plasticity [6, 13] is also established.

Дніпропетр. нац. ун-т, Дніпропетровськ

Одержано
21.06.02