

ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ПОМОЩИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Сформулирована постановка задачи активного демпфирования стационарных и нестационарных изгибных колебаний тонких вязкоупругих цилиндрических панелей с использованием распределенных пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов. Рассмотрены случаи программного управления колебаниями пластины (без обратной связи) и управления колебаниями с использованием обратной связи, обеспечивающих изменение жесткостных, диссипативных и инерционных характеристик оболочки. Основные соотношения получены с использованием гипотез Кирхгофа – Лява, дополненных гипотезами о распределении электрических полевых величин по толщине оболочки. Для цилиндрической панели с шарнирным закреплением торцов получены аналитические выражения для потенциала, демпфирующего любую из мод колебаний, возбуждаемых гармонической во времени поперечной нагрузкой. Аналогичные выражения получены и для заряда, снимаемого с сенсора при механическом возбуждении панели. Для других типов граничных условий (в частности, жесткого закрепления) для этой цели используется метод конечных элементов. На основе аналитических и конечно-элементных решений получены числовые результаты, иллюстрирующие эффективность активного демпфирования стационарных и нестационарных колебаний цилиндрической панели.

Введение. Как конструктивные элементы, тонкие цилиндрические панели широко используются в различных областях современной техники. Стационарное и нестационарное динамическое нагружение является наиболее распространенным при их эксплуатации. Для снижения амплитуды колебаний используются как пассивные, так и активные методы демпфирования. При использовании пассивных методов в структуру элемента вводятся неупругие – вязкоупругие либо вязкоупругопластические – включения с высокими диссипативными характеристиками [5, 11–13, 15, 16]. При использовании же активных методов в его структуру вводятся пьезоэлектрические включения, одни из которых (сенсоры) дают информацию о механическом состоянии оболочки, а другие (актуаторы) подводят к оболочке разность потенциалов, связанную определенными соотношениями (уравнениями обратной связи) с показаниями сенсоров. Если разность потенциалов актуатора пропорциональна разности потенциалов сенсора, изменяются жесткостные характеристики оболочки. Если же она пропорциональна току либо производной тока, изменяются характеристики демпфирования либо инерционные характеристики оболочки. Таким образом, можно существенно изменить динамическое поведение оболочки, в частности, уходить с резонанса и существенно повысить демпфирование оболочки. Последние результаты по активному демпфированию тонкостенных элементов отражены в [10–14, 21, 23–28].

Если известна действующая на оболочку нагрузка, а начальные условия – нулевые, используется такая технология, когда к актуатору подводится разность потенциалов определенной амплитуды и фазы, компенсирующая действие внешней механической нагрузки. Подробное исследование этого вопроса применительно к демпфированию колебаний прямоугольной пластины представлено в [10]. Для расширения диапазона частот эффективного демпфирования колебаний необходимо разрабатывать комбинированную технологию с применением как пассивных, так и активных методов. Постановка этой задачи для тонкостенных элементов с вязкоупругими и вязкопластическими демпфирующими слоями представлена в работах [10–14, 28]. При активном демпфировании колебаний геометрическая форма

сенсоров и актуаторов, их толщина, тип поляризации и расположение в теле выбираются из условия наиболее эффективного демпфирования колебаний. Так, если выбрать сенсоры и актуаторы в виде суперпозиции мод колебаний, то они будут воспринимать и подавлять только эти моды – так называемый модальный контроль. Формирование модальных сенсоров и актуаторов достигается путем изменения таких параметров: 1) структуры оболочки по ее толщине; 2) геометрической формы сенсора и актуатора; 3) поляризации пьезослоев, которая следит за изменением знака разности потенциалов; 4) угла между главными направлениями анизотропии оболочки и главными направлениями анизотропии пьезоэлементов; 5) толщины пьезоэлемента (она может быть выбрана переменной для формирования модального сенсора или актуатора); 6) свойств пьезоматериалов [23].

При пренебрежении влиянием пьезовключений на жесткостные характеристики пассивной оболочки решение задачи существенно упрощается, так что в некоторых случаях можно получить аналитические решения, которые дают возможность выбрать размеры и расположение пьезослоев из условий наиболее эффективного демпфирования колебаний. Можно использовать и другой подход для демпфирования колебаний, когда на пассивную цилиндрическую панель наносятся внешние пьезоэлектрические слои одинаковой или противоположной поляризации, на которые напыляются разрезные бесконечно тонкие электроды той или иной конфигурации. К этим электродам подводится необходимая для компенсации внешней механической нагрузки разность потенциалов. В этом случае при шарнирном опирании торцов оболочки также можно получить точные аналитические решения.

В настоящей статье рассмотрено демпфирование колебаний цилиндрической панели при помощи введения в ее структуру вязкоупругих слоев (пассивное демпфирование) и пьезоэлектрических включений (активное демпфирование). Для описания вязкоупругих свойств пассивных и пьезоактивных компонент используются линейные модели вязкоупругости интегрального типа, являющиеся наиболее эффективными для описания диссипативных свойств материалов в линейной области. Приводится постановка задач демпфирования стационарных и нестационарных колебаний цилиндрической панели. Оболочка считается структурно неоднородной в плане и состоит из набора идеально соединенных между собой оболочечных пассивных и пьезоактивных элементов. В свою очередь, каждый такой элемент может состоять из произвольного числа пассивных и пьезоактивных слоев. Для описания механического поведения этих оболочечных элементов используются гипотезы Кирхгофа – Лява для всего пакета в целом, дополненные адекватными им гипотезами о распределении электрических полевых величин [1, 4, 8]. Представлены основные соотношения для цилиндрических актуаторов и сенсоров. Приведены уравнения обратной связи между потенциалом актуатора и потенциалом сенсора, его первой (током) и второй производной. Именно через эти уравнения осуществляется влияние на жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики пассивной оболочки. Подробно рассматривается частный случай многослойной оболочки, составленной из среднего пассивного пакета слоев, среди которых есть и вязкоупругие слои с высокими гистерезисными потерями, и двух поляризованных в противоположном направлении пьезоактивных слоев. Механическое поведение среднего пакета описывается моделью ортотропного слоя с усредненными по толщине жесткостными характеристиками, полученными с использованием гипотез Кирхгофа – Лява. В простейшем случае, когда влиянием пьезослоев на жесткостные характеристики пассивной пластины можно пренебречь или при использовании указанного выше второго подхода, при шарнирном закреплении торцов оболочки получены точные аналитические решения, которые дают возможность исследовать наиболее рациональное размещение пьезовключений или электродов в плоскости оболочки и их размеры. Для решения интегро-дифференциального уравне-

ния, которое получается при учете вязкоупругих свойств материалов, используется классический метод усреднения. Для случая жесткого защемления торцов или в случае структурно неоднородной в плане панели для решения задачи демпфирования применяется метод конечных элементов. Приведены решения конкретных задач о демпфировании колебаний панели с использованием как аналитических, так и конечно-элементных методов. Сравнение результатов расчетов при помощи этих методов свидетельствует о высокой точности и эффективности разработанного варианта конечно-элементного метода для демпфирования колебаний цилиндрической панели. Представлены числовые данные о демпфировании стационарных колебаний пассивной оболочки с использованием пьезовключений, размеры и размещение которых выбраны в соответствии с полученными аналитическими формулами или с данными расчета конечно-элементным методом. Указаны возможные подходы для демпфирования нестационарных колебаний очень пологой цилиндрической панели и представлены результаты расчета.

1. Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную вязкоупругую цилиндрическую панель, находящуюся под действием динамической поверхностной стационарной либо нестационарной нагрузки. Оболочка состоит из произвольного числа пакетов металлических, полимерных или композитных пассивных (без пьезоэффекта) слоев. На верхней и нижней поверхностях оболочки размещены вязкоупругие пьезоэлектрические слои произвольной в плане конфигурации. Одни из них выполняют функции сенсора, а другие – актуатора. Количество пьезослоев в плане, направление поляризации и их геометрическая конфигурация выбираются из соображений наиболее эффективного демпфирования стационарных или нестационарных колебаний пассивного пакета. Так, например, при демпфировании нестационарных колебаний с применением модальных пьезослоев, конфигурация последних выбирается в виде суперпозиции мод колебаний, вносящих основной вклад в формирование геометрической формы деформированной поверхности [23]. При этом в общем случае имеем сложную конструктивно неоднородную как по толщине, так и в плане оболочку. Необходимо иметь в виду, что представленные ниже уравнения описывают не оболочку в целом, а каждый ее оболочечный элемент конечных размеров (включение, пятно) в отдельности. В частности, такой элемент может быть и пассивным, когда он не содержит пьезоактивных слоев. Для описания геометрической формы сенсоров и актуаторов и направления поляризации можно по аналогии с [23] ввести функции формы и символы (функции поляризации) «*sgn*». При этом каждый элемент такой структурно-неоднородной оболочки будет характеризоваться своими функциями формы и функциями поляризации [23]. В дальнейшем с целью сокращения не будем пользоваться такими функциями, хотя их использование подразумевается. Между элементами предполагаются условия идеального механического и электрического контакта. Основные соотношения получены с использованием гипотез Кирхгофа – Лява и дополнительных гипотез относительно электрических полевых величин [1, 4, 8]. В настоящей работе пьезоэлектрические слои считаются постоянными по толщине, хотя, как указано выше, за счет выбора переменной толщины можно формировать модальные сенсоры и актуаторы. Определяющие уравнения для усилий и моментов получаются в виде суммы составляющих, которые порождаются пассивным пакетом, пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами. Используется несколько видов уравнений обратного контроля [27].

Оболочка отнесена к декартовой системе координат (x, y, z) . Главные оси анизотропии совпадают с осями координат. Для описания деформированного состояния оболочки применим гипотезы Кирхгофа – Лява для всего пакета в целом [1, 8]. Используются геометрически линейные кинематические соотношения. Считается, что деформации малы. Кинематические соотношения теории оболочек, уравнения движения, граничные условия являются универсальными соотношениями и имеют одинаковый вид независимо

от свойств материала. Для геометрически линейного случая они представлены, например, в [1]. Компоненты перемещения и деформации панели имеют вид

$$\begin{aligned} u_x &= u(x, y) + z\theta_x(x, y), & u_y &= v(x, y) + z\theta_y(x, y), & u_z &= w(x, y), \\ \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_1 + z\alpha_1, & \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_2 + z\alpha_2, & \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{12} + z\alpha_{12}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ – перемещения координатной поверхности в направлениях x, y, z соответственно, а углы поворота равны

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R}. \quad (2)$$

В соотношениях (1), (2) введены такие обозначения для компонент тензора деформаций и изгиба:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}, & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \alpha_1 &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, & \alpha_2 &= \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, & \alpha_{12} &= \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнения движения и совместности деформаций технической теории цилиндрических оболочек имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= 0, \\ \frac{N_2}{R} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x, y, t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия на торцах оболочки имеют стандартный вид [1] и здесь не приводятся.

Определяющие уравнения для составляющих усилий и моментов, которые вносятся в выражения для полных усилий и моментов пассивными ортотропными вязкоупругими слоями, имеют вид [1, 8]

$$\begin{aligned} N_1 &= C_{11}^0 \otimes \varepsilon_1 + C_{12}^0 \otimes \varepsilon_2 + K_{11}^0 \otimes \alpha_1 + K_{12}^0 \otimes \alpha_2, \\ N_2 &= C_{12}^0 \otimes \varepsilon_1 + C_{22}^0 \otimes \varepsilon_2 + K_{12}^0 \otimes \alpha_1 + K_{22}^0 \otimes \alpha_2, \\ S &= C_{66}^0 \otimes \varepsilon_{12} + K_{66}^0 \otimes \alpha_{12}, \\ M_1 &= K_{11}^0 \otimes \varepsilon_1 + K_{12}^0 \otimes \varepsilon_2 + D_{11}^0 \otimes \alpha_1 + D_{12}^0 \otimes \alpha_2, \\ M_2 &= K_{12}^0 \otimes \varepsilon_1 + K_{22}^0 \otimes \varepsilon_2 + D_{12}^0 \otimes \alpha_1 + D_{22}^0 \otimes \alpha_2, \\ H &= K_{66}^0 \otimes \varepsilon_{12} + D_{66}^0 \otimes \alpha_{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь символом \otimes обозначен интегро-дифференциальный оператор вида

$$F \otimes G = \int_{-\infty}^t F(t - \tau) dG(\tau). \quad (6)$$

Выражения для C_{km}^0 , K_{km}^0 , D_{km}^0 получаются согласно принципу Вольтерра и техники расшифровки операторных выражений [6, 17]. При моногармоническом деформировании символ \otimes заменяется алгебраическим комплексным выражением, а для упругого случая – операцией умножения.

Рассмотрим пьезоактивные слои. Считаем, что они изготовлены из вязкоупругого пьезоэлектрического материала типа пьезокерамики и поляризованы по толщине. При этом упрощенные в соответствии с динами-

ческой гипотезой Кирхгофа – Лява уравнения состояния для них имеют вид [4, 8]

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^k &= B_{11}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_1 + \gamma \mathbf{x}_1) + B_{12}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_2 + \gamma \mathbf{x}_2) - \gamma_{31}^k(\gamma) \otimes \mathbf{E}_{\gamma}^k, \\ \sigma_{\beta}^k &= B_{12}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_1 + \gamma \mathbf{x}_1) + B_{22}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_2 + \gamma \mathbf{x}_2) - \gamma_{31}^k(\gamma) \otimes \mathbf{E}_{\gamma}^k, \\ \sigma_{\alpha\beta}^k &= B_{66}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_{12} + \gamma \mathbf{x}_{12}), \\ D_{\gamma}^k &= \gamma_{33}^k(\gamma) \otimes \mathbf{E}_{\gamma}^k + \gamma_{31}^k(\gamma) \otimes [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)], \quad k = 1, 2.\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь индекс $k = 1$ относится к актуатору, а индекс $k = 2$ – к сенсору, при этом

$$\begin{aligned}B_{11}^k(\gamma) &= B_{22}^k(\gamma) = \left\{ S_{11}^k(\gamma) \left[1 - v^2(\gamma) \right] \right\}^{-1}, \\ B_{12}^k(\gamma) &= v(\gamma) B_{11}^k(\gamma), \quad B_{66}^k(\gamma) = \frac{1}{2} \left[1 - v(\gamma) \right] B_{11}^k(\gamma), \\ \gamma_{33}^k &= \varepsilon_{33}^{T,k} \left[1 - k_p^2(\gamma) \right], \quad \gamma_{31}^k = d_{31}^k(\gamma) \left\{ S_{11}^k(\gamma) \left[1 - v^2(\gamma) \right] \right\}^{-1}, \\ k_p^2 &= 2 d_{31}^2(\gamma) \left\{ \varepsilon_{33}^{T,k}(\gamma) S_{11}^k(\gamma) \left[1 - v(\gamma) \right] \right\}^{-1}.\end{aligned}\quad (8)$$

В равенствах (8) использованы обозначения работ [4, 8].

Пусть между пассивным пакетом и пьезоактивными слоями нанесены бесконечно тонкие электроды. Такие же электроды имеются и на внешних поверхностях пьезопанели. К этим электродам приложена разность потенциалов V_k^0 , $k = 1, 2$. Согласно [4] индукция D_{γ}^k постоянна по толщине пьезослоев, так что

$$D_{\gamma}^k = C(\alpha, \beta), \quad (9)$$

при этом

$$\mathbf{E}_{\gamma}^k = \frac{1}{\gamma_{33}^k(\gamma)} \otimes C^k - \frac{\gamma_{31}^k(\gamma)}{\gamma_{33}^k(\gamma)} \otimes [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)]. \quad (10)$$

Интегрируя (10) по толщине пьезослоев, имеем

$$C = \left(v_0^k \right)^{-1} \otimes \left[-V_k^0 + v_1^k \otimes (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + v_2^k \otimes (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \right], \quad k = 0, 1, 2. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), а полученное выражение для \mathbf{E}_{γ}^k – в (7), найдем

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^k &= B_{11}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_1 + \gamma \mathbf{x}_1) + B_{12}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_2 + \gamma \mathbf{x}_2) + \sigma_0^k, \\ \sigma_{\beta}^k &= B_{12}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_1 + \gamma \mathbf{x}_1) + B_{22}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_2 + \gamma \mathbf{x}_2) + \sigma_0^k, \\ \sigma_{\alpha\beta}^k &= B_{66}^k(\gamma) \otimes (\varepsilon_{12} + \gamma \mathbf{x}_{12}), \\ \sigma_0^k &= \left[\frac{\gamma_{31}^2(\gamma)}{\gamma_{33}^k(\gamma)} - \frac{\gamma_{31}^k(\gamma) v_1^k}{\gamma_{33}^k(\gamma) v_0^k} \right] \otimes (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \\ &\quad + \left[\frac{\gamma_{31}^k(\gamma)}{\gamma_{33}^k(\gamma)} \gamma - \frac{\gamma_{31}^k(\gamma) v_2^k}{\gamma_{33}^k(\gamma) v_0^k} \right] \otimes (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \frac{\gamma_{31}^k(\gamma)}{\gamma_{33}^k(\gamma) v_0^k} \otimes V_0^k.\end{aligned}\quad (12)$$

Интегрируя (12) по толщине оболочки и учитывая расположение электродов, получим определяющие уравнения для активного пьезослоя:

$$\begin{aligned}
N_1 &= C_{11}^k \otimes \varepsilon_1 + C_{12}^k \otimes \varepsilon_2 + K_{11}^k \otimes \mathbf{x}_1 + K_{12}^k \otimes \mathbf{x}_2 + N_0^k, \\
N_2 &= C_{12}^k \otimes \varepsilon_1 + C_{22}^k \otimes \varepsilon_2 + K_{12}^k \otimes \mathbf{x}_1 + K_{22}^k \otimes \mathbf{x}_2 + N_0^k, \\
S &= C_{66}^k \otimes \varepsilon_{12} + K_{66}^k \otimes \mathbf{x}_{12}, \\
M_1 &= K_{11}^k \otimes \varepsilon_1 + K_{12}^k \otimes \varepsilon_2 + D_{11}^k \otimes \mathbf{x}_1 + D_{12}^k \otimes \mathbf{x}_2 + M_0^k, \\
M_2 &= K_{12}^k \otimes \varepsilon_1 + K_{22}^k \otimes \varepsilon_2 + D_{12}^k \otimes \mathbf{x}_1 + D_{22}^k \otimes \mathbf{x}_2 + M_0^k, \\
H &= K_{66}^k \otimes \varepsilon_{12} + D_{66}^k \otimes \mathbf{x}_{12}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
\left(C_{ij}^k; K_{ij}^k; D_{ij}^k \right) &= \int_{(h_k)} B_{ij}^k(\gamma)(1; \gamma; \gamma^2) d\gamma + v_{(3;4;5)}^k - \frac{\left(v_1^2; v_1^k v_2^k; v_2^2 \right)}{v_0^k}, \\
\left(C_{66}^k; K_{66}^k; D_{66}^k \right) &= \int_{(h_k)} B_{66}^k(1; \gamma; \gamma^2) d\gamma, \quad N_0^k = \frac{v_1^k}{v_0^k} V_0^k, \quad M_0^k = \frac{v_2^k}{v_0^k} V_0^k,
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$v_0^k = \int_{(h_k)} \frac{1}{\gamma_{33}^2} d\gamma, \quad v_{(1;2)}^k = \int_{(h_k)} \frac{\gamma_{31}(1; \gamma)}{\gamma_{33}^2} d\gamma, \quad v_{(3;4;5)}^k = \int_{(h_k)} \frac{\gamma_{31}^2(1; \gamma; \gamma^2)}{\gamma_{33}^2} d\gamma. \tag{15}$$

Для актуатора в определяющих уравнениях условимся полагать $k = 1$, а для сенсора – $k = 2$, при этом $D_\gamma^2 = 0$. Тогда

$$E_\gamma^2 = - \frac{\gamma_{31}^2(\gamma)}{\gamma_{33}(\gamma)} \otimes [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)] \tag{16}$$

и во введенных выше жесткостных характеристиках необходимо положить $v_1^2 = v_2^2 \equiv 0$. Ненулевые величины $v_{(3;4;5)}^2$ определяются по формулам (15). Общие усилия и моменты равны сумме усилий и моментов, вносимых пассивными и пьезоактивными слоями:

$$N_1 = N_1^0 + N_1^1 + N_1^2, \quad \dots, \quad M_1 = M_1^0 + M_1^1 + M_1^2, \quad \dots \tag{17}$$

Учитывая полученные выше соотношения, найдем выражения для общих усилий и моментов в оболочке

$$\begin{aligned}
N_1 &= C_{11} \otimes \varepsilon_1 + C_{12} \otimes \varepsilon_2 + K_{11} \otimes \mathbf{x}_1 + K_{12} \otimes \mathbf{x}_2 + N_{01}, \\
N_2 &= C_{12} \otimes \varepsilon_1 + C_{22} \otimes \varepsilon_2 + K_{12} \otimes \mathbf{x}_1 + K_{22} \otimes \mathbf{x}_2 + N_{01}, \\
S &= C_{66} \otimes \varepsilon_{12} + K_{66} \otimes \mathbf{x}_{12}, \\
M_1 &= K_{11} \otimes \varepsilon_1 + K_{12} \otimes \varepsilon_2 + D_{11} \otimes \mathbf{x}_1 + D_{12} \otimes \mathbf{x}_2 + M_{01}, \\
M_2 &= K_{12} \otimes \varepsilon_1 + K_{22} \otimes \varepsilon_2 + D_{12} \otimes \mathbf{x}_1 + D_{22} \otimes \mathbf{x}_2 + M_{01}, \\
H &= K_{66} \otimes \varepsilon_{12} + D_{66} \otimes \mathbf{x}_{12}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь

$$C_{11} = C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2, \quad \dots, \quad K_{11} = K_{11}^0 + K_{11}^1 + K_{11}^2, \quad \dots,$$

$$D_{11} = D_{11}^0 + D_{11}^1 + D_{11}^2, \quad \dots, \quad N_{01} = N_0^1 + N_0^2, \quad M_{01} = M_0^1 + M_0^2. \quad (19)$$

Разность потенциалов на сенсоре получается путем интегрирования соотношения (16) по толщине h_2 и по площади S_2 и для вязкоупругого материала имеет вид

$$V_0^2 = \frac{1}{S_2} \int_{(h_2)} \int_{S_2} \left\{ \frac{\gamma_{31}}{2} \otimes [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \gamma(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)] \right\} AB d\alpha d\beta d\gamma. \quad (20)$$

Она легко измеряется и дает усредненную информацию о деформированном состоянии оболочки [23, 27]. Для малых размеров сенсоров можно получить их локальные значения потенциалов:

$$V_0^2 = \int_{(h_2)} \frac{\gamma_{31}}{2} \otimes d\gamma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \int_{(h_2)} \frac{\gamma_{31}}{k} \otimes \gamma d\gamma(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2). \quad (21)$$

Как видно, измеряемая сенсором разность потенциалов зависит как от тангенциальных, так и от изгибных деформаций. Если в качестве сенсора или актуатора используется пара пьезослоев с противоположной поляризацией, то в выражении для сенсорного потенциала будут присутствовать только изгибные деформации, а в определяющих уравнениях для актуатора будет отсутствовать связь между тангенциальными и изгибными деформациями. Необходимо отметить, что в отличие от упругого случая показания сенсора зависят от релаксационных свойств материала.

Соотношения (20), (21) играют основную роль при контроле колебаний оболочек, так как именно через показания сенсора формулируются алгоритмы обратной связи [27].

Для управления колебаниями к оболочке подключается цепь обратной связи. Существует много различных вариантов алгоритмов обратной связи [27]. В этой работе управление колебаниями оболочки будем осуществлять согласно следующим алгоритмам обратной связи [27]:

$$V_0^1 = G_1 V_0^2, \quad (22)$$

$$V_0^1 = -G_2 \frac{\partial}{\partial t} V_0^2, \quad (23)$$

$$V_0^1 = -G_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} V_0^2, \quad (24)$$

$$V_0^1 = -G_4 \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial}{\partial t} V_0^2 \right), \quad (25)$$

где G_i – управляющие параметры, влияющие на жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики оболочки.

Для одновременного влияния на жесткостные характеристики, затухание, инерцию оболочки можно принять, что

$$V_0^1 = \left(G_1 - G_2 \frac{\partial}{\partial t} - G_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - G_4 \operatorname{sgn} \frac{\partial}{\partial t} \right) V_0^2. \quad (26)$$

Естественно, при этом задача выбора трех управляющих параметров существенно усложняется.

Подставляя выражения (22)–(25) либо (26) в определяющие уравнения (18) и учитывая (1)–(3), получим линейную систему интегро-дифференциальных уравнений относительно перемещений структурно неоднородной как по толщине, так и по поверхности оболочки:

$$L_1(u, v, w, G_k) = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_1, \quad L_2(u, v, w, G_k) = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + F_2,$$

$$L_3(u, v, w, G_k) = \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + F_3. \quad (27)$$

Коэффициенты этой системы зависят от параметров обратной связи.

2. Аналитическое решение задачи. Для решения полученных интегро-дифференциальных уравнений можно использовать вариационные методы в сочетании с методом усреднения [6]. При этом решение интегро-дифференциальных уравнений представляется в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям $U_i(x, y)$ линейной упругой пьезооболочки

$$u = \sum_i u_{1i}(t)U_i(x, y), \quad v = \sum_i v_{1i}(t)U_i(x, y), \quad w = \sum_i w_{1i}(t)U_i(x, y). \quad (28)$$

После использования, например, метода Бубнова – Галеркина по пространственным координатам получаем линейную систему интегро-дифференциальных уравнений по времени

$$\frac{d^2 u_{ij}}{dt^2} + M_{ij} \otimes (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) = f_i(t), \quad (29)$$

где $M_{ij} \otimes (\cdot)$ – линейный интегральный оператор вида

$$M_{ij} \otimes (\cdot) = M_{ij}^0 \left[(\cdot) - \int_{-\infty}^t M_{ij}^1(t - \tau)(\cdot)(\tau) d\tau \right].$$

Считая вязкость материалов малой, для решения уравнения (29) можно использовать метод усреднения, подробно изложенный в монографии [6] применительно к задачам вязкоупругости. Полученное решение будет зависеть от управляющих параметров.

Для решения линейного уравнения (29) можно использовать и быстрое преобразование Фурье [2]. В этом случае оператор $M_{ij} \otimes (\cdot)$ заменяется комплексным алгебраическим выражением, соответствующим комплексным характеристикам вязкоупругих материалов [6, 17].

Параметры управления G_i выбираются из условия наиболее эффективного контроля колебаний панели, например, из условия минимальности ее поперечного прогиба.

Необходимо отметить, что вместо глобальных параметров управления можно ввести модальные параметры управления, когда для каждой моды колебаний выбирается свой параметр управления [27].

Рассмотрим наиболее простой случай граничных условий, отвечающих шарнирному закреплению торцов оболочки. Считаем, что оболочка имеет симметричную по толщине структуру и нагружена известной стационарной или нестационарной поверхностной нагрузкой. Демпфирование колебаний оболочки будем осуществлять прямоугольными в плане пьезоэлектрическими актуаторами. Необходимо выбрать наиболее эффективное расположение актуаторов и их размеры. Для случая пьезослоев, имеющих одинаковые электромеханические свойства и противоположные направления поляризации, выражения для жесткостных характеристик зависят от наличия или отсутствия электродов между пассивным и пьезоактивными слоями и приведены в [10]. При этом движение оболочки описывается краевой задачей

$$\begin{aligned} D_{11} * \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) * \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} * \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \\ + \tilde{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{H_0}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2} + q(x, y, t) = 0, \\ A_{11} * \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2(A_{12} + 2A_{66}) * \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{22} * \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{1}{RH_0} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях шарнирного за-

крепления. Решение задачи ищем в виде

$$\begin{aligned} w &= \sum_m \sum_n w_{mn}(t) \sin(k_m x) \sin(p_n y), \\ \Phi &= \sum_m \sum_n \Phi_{mn}(t) \sin(k_m x) \sin(p_n y). \end{aligned} \quad (31)$$

Для прямоугольного в плане включения, имеющего размеры u, v и координаты центра ξ, η , выражение для вызываемого актуатором момента представляется в форме

$$M_0 = \sum_m \sum_n M_{mn}^0(t) \sin(k_m x) \sin(p_n y), \quad (32)$$

где

$$M_{mn}^0(t) = \frac{16M_0(t)}{abk_m p_n} \sin(k_m \xi) \sin(p_n \eta) \sin \frac{k_m u}{2} \sin \frac{p_n v}{2}. \quad (33)$$

Приложенная к поверхности нагрузка представляется в такой же форме:

$$q(x, y, t) = \sum_m \sum_n q_{mn}(t) \sin(k_m x) \sin(p_n y). \quad (34)$$

Подставляя (31)–(34) в (30), получим интегро-дифференциальное уравнение по времени

$$\frac{d^2 w_{mn}}{dt^2} + \Delta_{mn} * w_{mn} + p_{mn}(t) - M_{mn}(t) = 0 \quad (35)$$

с нулевыми начальными условиями. Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} &= \Delta_{2mn} + \frac{H_0 k_m^4}{R^2} \frac{1}{\Delta_{1mn}}, \\ \Delta_{2mn} &= [D_{11} k_m^4 + 2(D_{12} + D_{66}) k_m^2 p_{mn}^2 + D_{22} p_{mn}^4] / \tilde{\rho}, \\ \Delta_{1mn} &= [A_{22} k_m^4 + 2(A_{12} + A_{66}) k_m^2 p_{mn}^2 + A_{11} p_{mn}^4] / \tilde{\rho}, \\ M_{mn} &= M_{mn}^0 / \tilde{\rho}, \quad p_{mn} = q_{mn} / \tilde{\rho}. \end{aligned} \quad (36)$$

В дальнейшем при действии нестационарной нагрузки будем считать, что

$$p_{mn}(t) = p_{mn}^0 H(t), \quad M_{mn}(t) = m_{mn}^0 H(t), \quad (37)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Применяя метод усреднения, получаем следующее решение этого уравнения [6]:

$$\begin{aligned} w_{mn}(t) &= \frac{p_{mn}^0 - m_{mn}^0}{\Delta_{mn}^2} - \exp\left(-\frac{\Delta_{mn}^0 A_{mn}^0}{2} t\right) \times \\ &\times \left[\frac{A_{mn}^0 (p_{mn}^0 - m_{mn}^0)}{\Delta_{mn}^2 (2 - B_{mn}^0)} \sin\left(\frac{B_{mn}^0}{2} - 1\right) \Delta_{mn}^0 t - \frac{p_{mn}^0 - m_{mn}^0}{\Delta_{mn}^2} \cos\left(\frac{B_{mn}^0}{2} - 1\right) \Delta_{mn}^0 t \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Рассмотрим случай, когда нагрузка изменяется по гармоническому во времени закону

$$p_{mn}(t) = p_{mn}^0 \cos \omega t. \quad (39)$$

Если оболочка не контролируется, т.е. к актуатору не прикладывается разность потенциалов, то решение уравнения (35) имеет вид

$$w_{mn} = -p_{mn}^0 / \Delta_{mn}, \quad (40)$$

где

$$\Delta_{mn} = \Delta'_{mn} + i \Delta''_{mn} - \tilde{\rho} \omega_{mn}^2. \quad (41)$$

Считая вязкость малой, определим резонансную частоту по формуле

$$\tilde{\rho} \omega_{mn}^2 = \Delta'_{mn}, \quad (42)$$

тогда

$$w_{mn} = i p_{mn}^0 / \Delta''_{mn}. \quad (43)$$

Если $D''_{mn} = D'_{mn} \operatorname{tg} \delta$, $A''_{mn} = A'_{mn} \operatorname{tg} \delta$, то

$$w_{mn} = i p_{mn}^0 / \Delta'_{mn} \operatorname{tg} \delta. \quad (44)$$

При $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ прогиб достаточно большой, хотя и не равен бесконечности.

Теперь пусть к актуатору приложена разность потенциалов, изменяющаяся по гармоническому закону с частотой поверхностной силы. Тогда на резонансе имеем

$$w_{mn} = i \left[p_{mn}^0 - (k_{mn}^2 + p_{mn}^2) m_{mn}^0 \right] / \Delta'_{mn} \operatorname{tg} \delta. \quad (45)$$

Так как на каждом из актуаторов разность потенциалов постоянна, то в выражении (45) произвольно можно выбрать только одну из величин на каждом из актуаторов. Поэтому, если на поверхность оболочки нанесен один актуатор, можно компенсировать только одну составляющую нагрузки в выражениях (34), (36). Как правило, для пологой оболочки максимальная составляющая нагрузки отвечает индексам $m = n = 1$. При необходимости компенсации нескольких слагаемых, необходимо увеличивать количество актуаторов. Для компенсации любой из гармоник необходимо разность потенциалов выбирать из условия равенства нулю числителя выражения (45), т. е. положить

$$p_{mn}^0 - (k_{mn}^2 + p_{mn}^2) m_{mn}^0 = 0. \quad (46)$$

Тогда решение приобретает вид

$$w = \sum_{r \neq m} \sum_{s \neq n} \frac{p_{mn}^0 - (k_{mn}^2 + p_{mn}^2) m_{mn}^0}{\Delta_{rs}} \sin(k_r x) \sin(p_s y). \quad (47)$$

Здесь

$$\Delta_{rs} = \Delta'_{rs} + i \Delta''_{rs} - \tilde{\rho} \omega_{mn}^2. \quad (48)$$

Как видим из (47), (48), прогиб резко падает из-за отсутствия резонансного члена в (47) и быстрой сходимости ряда Фурье, когда основной вклад в прогиб вносит резонансный член.

Центр размещения актуатора и его размеры выбираем из условия минимальности разности потенциалов, которая рассчитывается по формуле, следующей из (33), (46):

$$M_0 = \frac{m^0}{\sin \frac{k_m u}{2} \sin \frac{p_n v}{2}}, \quad m^0 = \frac{ab}{16} \frac{p_{mn}^0 k_m p_n}{k_m^2 + p_n^2} \frac{1}{\sin \frac{k_m u}{2} \sin \frac{p_n v}{2}}. \quad (49)$$

Величина M_0 пропорциональна подводимой к актуатору разности потенциалов. Как указано выше, центр размещения и размеры актуатора выбираются из условия минимальности этой разности. Из (49) следует, что это будет иметь место, если выполняются равенства

$$\sin(k_m \xi) = 1, \quad \sin(p_n \eta) = 1, \quad \sin \frac{k_m u}{2} = 1, \quad \sin \frac{p_n v}{2} = 1. \quad (50)$$

Рассмотрим последовательно моды колебаний, соответствующие ω_{11} , ω_{21} , ω_{13} , ω_{22} . Для моды ω_{11} центр актуатора должен выбираться из усло-

вий $\sin(k_1\xi) = 1$, $\sin(p_n\eta) = 1$, так что актуатор должен быть размещен в точке с координатами $\xi = \frac{a}{2}$, $\eta = \frac{b}{2}$, т. е. в центре панели.

При другом выборе центра актуатора имеем поверхность

$$\frac{M}{m} = \frac{1}{\sin(k_1\xi) \sin(p_1\eta)}. \quad (51)$$

На рис. 1 представлена поверхность, изображающая зависимость величины $\frac{M}{m}$, пропорциональной разности потенциалов, от координат центра актуатора.

Здесь $\xi^* = \frac{\xi}{a}$, $\eta^* = \frac{\eta}{b}$. Как следует из рис. 1 и формулы (51), при приближении координат центра актуатора к торцам пластины подводимая к нему разность потенциалов стремится к бесконечности. В окрестности точки $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ имеется достаточно большая

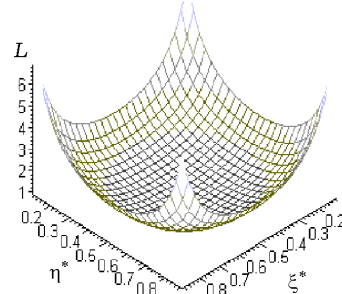


Рис. 1

область, в которой потенциал мало отличается от своего минимального значения. Поэтому центр актуатора также можно размещать в этой области.

Для моды ω_{21} из условия (50) при $m = 2$, $n = 1$ минимальная разность потенциалов достигается при размещении центра актуатора в точках $\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{3a}{4}, \frac{b}{2}\right)$. При этом разность потенциалов в зависимости от координат центра актуатора определяется выражением

$$\frac{M}{m} = \frac{1}{\sin(k_2\xi) \sin(p_1\eta)}.$$

Поверхность, изображающая величину $\frac{M}{m}$ в зависимости от координат центра актуатора, имеет такой же вид, как и поверхность на рис. 1, с тем лишь отличием, что она размещена над прямоугольником $(0 \leq x \leq \frac{a}{2}, 0 \leq y \leq b)$ с диагональю L .

Для моды ω_{13} центр актуатора должен быть размещен в точках $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{6}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, \frac{5b}{6}\right)$. При этом пластина разбивается на три полосы шириной $\frac{b}{3}$ и длиной a . Над каждой из этих полос поверхность имеет вид, показанный на рис. 1. Разность потенциалов будет стремиться к бесконечности при подходе к краям указанных полос. Поэтому L на рис. 1 означает длину диагонали этих полос.

Для моды ω_{22} центр актуатора, соответствующий минимальной разности потенциалов, размещается в точках $\left(\frac{a}{4}, \frac{b}{4}\right)$, $\left(\frac{a}{4}, \frac{3b}{4}\right)$, $\left(\frac{3a}{4}, \frac{b}{4}\right)$, $\left(\frac{3a}{4}, \frac{3b}{4}\right)$. Поэтому пластина разбивается на четыре равных прямоугольника с координатами центра в этих точках. Над каждым из этих прямоуголь-

ников поверхность, изображающая разность потенциалов в зависимости от координат центра актуатора, имеет приведенный на рис. 1 вид, где L – диагональ указанных прямоугольников. Потенциал стремится к бесконечности при приближении центра актуатора к их краям.

Таким образом, при неудачном выборе координат центров актуаторов для указанных выше мод потенциал может достигнуть критических значений, при которых имеет место электрический или тепловой пробой.

Теперь рассмотрим, как изменяется разность потенциалов в зависимости от размера актуатора, размещенного в центре пластины или упомянутых выше прямоугольников. Площадь актуаторов будем изменять путем изменения размеров соответствующих им диагоналей l .

Для моды ω_{11} имеем $\frac{M}{m} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi l}{2L}}$, где l, L – длины диагоналей актуатора и пластины соответственно.

Характер изменения величины потенциала $\frac{M}{m}$ в зависимости от размера диагонали l актуатора представлен на рис. 2, так что сначала при изменении длины диагонали актуатора наблюдается резкое уменьшение потенциала, а потом – незначительное его изменение.

Для моды ω_{21} при выборе центра актуатора в точке $(\frac{a}{4}, \frac{b}{2})$ имеем такую же формулу, в которой L – длина диагонали прямоугольника с центром в указанной точке. Такая же формула будет иметь место и для моды ω_{22} при выборе центра актуатора в точке $(\frac{a}{4}, \frac{b}{4})$, при этом L – длина диагонали упомянутого прямоугольника.

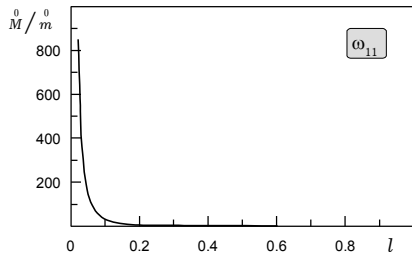


Рис. 2

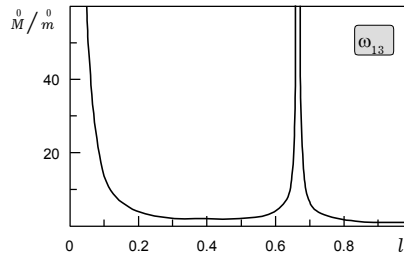


Рис. 3

Для моды ω_{13} при выборе координат центра актуатора в точке $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ зависимость разности потенциалов от размера диагонали актуатора показана на рис. 3. Однако, если пластину разбить на три указанных выше полосы и отнести диагональ актуатора к диагонали такой полосы, то изменение потенциала в зависимости от размера диагонали актуатора будет иметь такой же характер, как и представленный на рис. 2.

Указанные выше формулы и графики необходимо использовать при компенсации нескольких мод колебаний при помощи актуаторов либо разрезных электродов. На рис. 4 представлен один из возможных вариантов размещения четырех актуаторов при необходимости компенсации четырех мод колебаний. При этом, конечно, разность потенциалов на каждом актуаторе не будет минимальной.

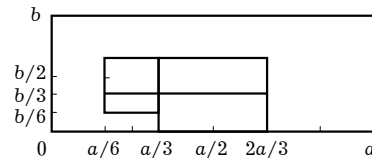


Рис. 4

Если с помощью изменения формы электродов, толщины пьезоактуатора, углов поворота главных направлений анизотропии и изменения направ-

ления поляризации сделать член M^0 пропорциональным форме колебаний, то прогиб пластины, соответствующий этой форме, будет нулевым. При изготовлении актуатора в виде суперпозиции нескольких мод, он будет демпфировать все моды при соответствующем выборе разности потенциалов.

Аналогичные соображения имеют место и при расчете сенсоров. Пусть на оболочку действует гармоническое во времени нагружение, распределенное по одной из форм колебаний. Тогда прогиб рассчитывается по формуле

$$w = w_{mn}^0 \sin(k_m x) \sin(p_n y) \exp(i\omega t). \quad (52)$$

Эта форма колебаний будет выдерживаться с большой точностью, если частота нагружения равна резонансной. Тогда величина, обратная заряду Q , определяется по формуле

$$\frac{1}{Q} = \frac{A}{\sin(k_m \xi) \sin(p_n \eta) \sin \frac{k_m u}{2} \sin \frac{p_n v}{2}}. \quad (53)$$

Здесь A – константа, не зависящая от координат центра и размеров сенсора.

Основной принцип, на основе которого рассчитываются сенсоры, состоит в том, что заряд должен быть максимальным при заданном прогибе. Тогда величина (53) должна быть минимальной.

Сравнение формул (49) и (53) показывает, что координаты центра сенсора и его размеры определяются по одинаковым формулам. Тогда представленные выше соображения о положении и размерах сенсора для разных мод колебаний сохраняются без изменений. Если сенсор изготовить в виде некоторой моды колебаний, он будет реагировать только на эту моду, т. е. будет играть роль фильтра.

Представленный выше анализ носит общий характер независимо от вида граничных условий. Пусть в результате анализа частот и мод колебаний упругой панели установлено, что при разложении нестационарной нагрузки по собственным формам основную роль играют несколько мод, например, указанные выше четыре моды. Тогда при помощи соответствующего выбора расположения центров и размеров четырех актуаторов можно согласно представленным выше формулам устранить их действие на оболочку. При этом необходимо иметь в виду, что указанные четыре электрода должны быть отделены друг от друга, т. е. необходимо использовать четыре разрезных электрода прямоугольной формы. Один из вариантов расположения указанных электродов представлен на рис. 4. Подводя к этим электродам разности потенциалов, рассчитанные по представленным выше формулам, устраним четыре основных члена в разложении нагрузки по модам, в результате чего прогиб существенно уменьшится.

3. Конечно-элементное решение. При учете влияния пьезовключений (пятен) на жесткостные характеристики оболочки и при других типах граничных условий получим сложную задачу для структурно-неоднородной как по толщине, так и в плане оболочки. В этом случае найти какие-либо аналитические решения практически невозможно. Правда задачу можно существенно упростить, если использовать указанный выше второй подход, когда на пассивный средний цилиндрический слой наносится два пьезоактивных слоя противоположной поляризации, покрывающие всю поверхность оболочки. При этом компенсация внешней нагрузки производится нанесением на пьезослои бесконечно тонких электродов необходимой конфигурации, к которым подводится разность потенциалов, выбранная из указанных выше соображений.

Для решения задачи активного демпфирования стационарных и нестационарных колебаний можно использовать численные методы, в частности, метод конечных элементов. Подробности используемого варианта метода

конечных элементов представлены в работах [3, 10, 18, 20, 22]. Поэтому приведем лишь числовые данные о демпфировании колебаний цилиндрической панели при помощи пьезоэлектрических включений для граничных условий, отвечающих шарнирному и жесткому закреплению торцов пластины. При этом необходимо отметить, что при жестком закреплении торцов необходимо обязательно использовать электроды и пьезовключения, только частично покрывающие пластину, поскольку при полном покрытии оболочки демпфировать поперечные колебания оболочки невозможно.

Конкретные расчеты проведены для панели с углом раствора $\varphi = \pi/2$, составленной из противоположно поляризованных внешних слоев пьезокерамики типа ЦТС_ТБС – 2, внутреннего дюралюминиевого слоя со следующими характеристиками материала [10], геометрическими размерами и параметрами нагружения:

$$d_{31} = -1.6 \cdot 10^{-10} \text{ Кл/Н}; \quad S_{11}^E = 12.5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}; \quad S_{12}^E = 4.2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н};$$

$$\varepsilon_{33}^T = 2100 \varepsilon_{33}^0; \quad \varepsilon_{33}^0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; \quad \eta_1 = 1.7 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с};$$

$$E_0 = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad \nu_0 = 0.34; \quad \eta_0 = 1.47 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}; \quad \rho_0 = 0.279 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3;$$

$$H = 0.011 \text{ м}; \quad h_1 = h_2 = 0.005 \text{ м}; \quad L = 0.1 \text{ м}; \quad R = 0.1 \text{ м}; \quad p_0 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2.$$

Здесь η_0, η_1 – коэффициенты вязкости модели Фойгта, используемой при расчете демпфирования нестационарных колебаний.

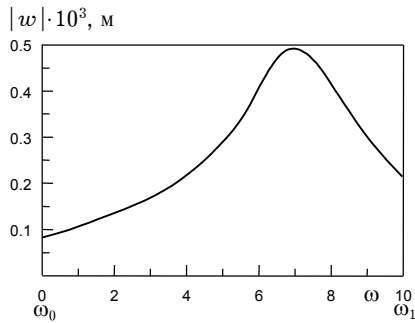


Рис. 5

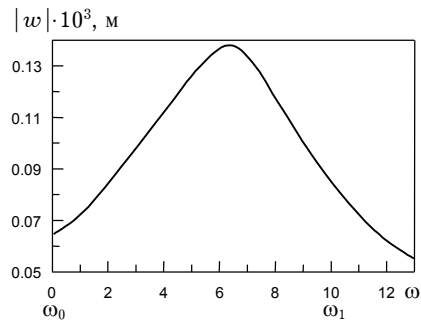


Рис. 6

Результаты расчета амплитудно-частотных характеристик для трехслойной шарнирно- и жестко заземленной цилиндрической панели представлены соответственно на рис. 5, 6. Показанные на рисунках кривые изображают амплитудно-частотные характеристики вязкоупругой панели в окрестности первой резонансной частоты при действии на нее изменяющегося по гармоническому закону во времени внешнего давления без использования активного демпфирования.

На рис. 5 $\omega_0 = 0.37850 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, а каждое последующее деление на оси абсцисс отвечает изменению частоты в пятом знаке, когда частота $\omega_1 = 0.37860 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$. Аналогичные обозначения приняты и на рис. 6, при этом $\omega_0 = 0.69670 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, а $\omega_1 =$

$= 0.69680 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$. По указанной выше методике рассчитывалась необходимая для компенсации первой моды разность потенциалов. Прогиб пластины уменьшался на четыре порядка. Поэтому на рисунке он не представлен, поскольку практически равен нулю. На рис. 7 представлена зависимость разности потенциалов, необходимой для компенсации механической нагрузки, от размера стороны квадратного электрода.

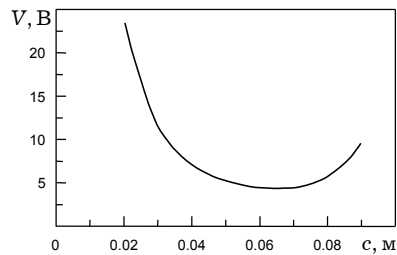


Рис. 7

Для демпфирования нестационарных колебаний за счет выбора необходимого количества актуаторов можно компенсировать несколько основных членов нагрузки и существенно уменьшить поперечный прогиб. Для пластины и весьма пологой панели с большим радиусом результаты расчета прогибов мало отличаются друг от друга. Поэтому для иллюстрации эффективности активного контроля нестационарных колебаний приведем представленные в работе [10] результаты расчетов для прямоугольной пластины. Электромеханические характеристики и размеры пластины (пологой оболочки), амплитуда механического нагружения приведены в [10].

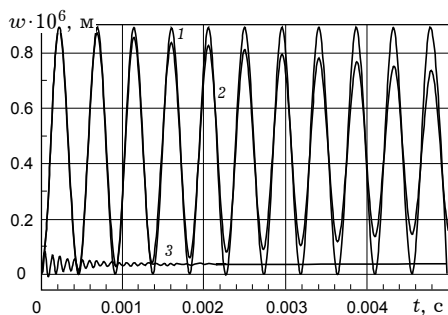


Рис. 8

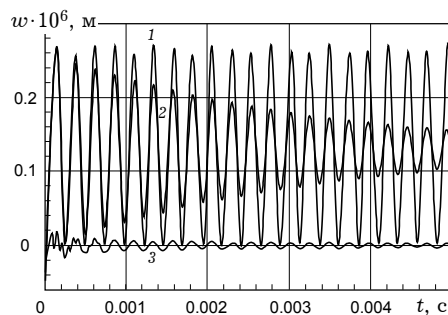


Рис. 9

На рис. 8 показано изменение прогиба в центре шарнирно опертой пластины (пологой панели) в зависимости от времени. Кривые 1, 2 отвечают решению упругой и вязкоупругой задач соответственно при действии только механической нагрузки, а кривая 3 – решению вязкоупругой задачи при совместном электрическом и механическом нагружениях.

На рис. 9 представлены кривые изменения прогиба в центре жестко заземленной пластины (пологой панели) в зависимости от времени. Здесь использованы те же обозначения, что и на рис. 8. Как видно из приведенных результатов, при использовании даже одного актуатора, когда компенсируется только первая составляющая нагрузки, достигается существенное уменьшение амплитуды колебаний пластины.

4. Заключение. В работе представлена постановка задачи о демпфировании колебаний цилиндрической панели при помощи включения в ее структуру слоев из вязкоупругих пассивных и пьезоэлектрических материалов. Представлены возможные типы уравнений обратной связи, влияющие на жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики оболочки, за счет чего достигается существенное уменьшение амплитуд колебаний оболочки. Рассматривается также такой метод демпфирования колебаний, когда к пьезоактуатору подводится разность потенциалов необходимой амплитуды и фазы для компенсации внешней нагрузки. Подробно рассмотрен случай нагружения оболочки давлением, изменяющимся по гармоническому закону. Для случая шарнирного закрепления торцов оболочки представлены простые формулы, которые дают возможность рассчитать координаты центра прямоугольного пьезовключения и его размеры из условий минимальности подводимой к пьезоактуатору разности потенциалов. Аналогичные формулы получены и для сенсоров. Для расчета этих параметров для других типов граничных условий предлагается использовать метод конечных элементов.

Представленные результаты расчетов для различных видов граничных условий свидетельствуют об эффективности рассмотренного варианта демпфирования колебаний и высокой точности разработанного метода конечных элементов. Указаны возможные подходы для демпфирования нестационарных колебаний, когда за счет компенсации определенного количества мод можно существенно уменьшить уровень нестационарных колебаний.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Барканов Е., Рикардс Р., Хольсте К., Тегер О. Вынужденные колебания вязкоупругой балки, пластины и оболочки типа сэндвич под ударной нагрузкой // Механика композитных материалов. – 2001. – **37**, № 3. – С. 367–377.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Госстройиздат, 1982. – 448 с.
4. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.
5. Дубенец В. Г., Хильчевский В. В. Колебания демпфируемых композитных конструкций. – К.: Вища шк., 1995. – Т. 1. – 226 с.
6. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
7. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф. Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 2. – С. 39–63.
8. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф. Электротермовязкоупругость. – Киев: Наук. думка, 1988. – 320 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 4.
9. Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И. Электромеханические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов с пьезоэффектом // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 2. – С. 45–77.
10. Карнаузов В. Г., Козлов А. В., Пятецкая Е. В. Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин при помощи распределенных пьезоэлектрических включений // Акуст. вестн. – 2002. – **5**, № 4. – С. 1–20.
11. Карнаузов В. Г., Козлов В. И., Жук Я. А., Карнаухова Т. В. Основные соотношения слоистых оболочек с пассивными физически нелинейными слоями и пьезоактивными вязкоупругими включениями для управления нестационарными колебаниями // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 35. – С. 28–41.
12. Карнаузов В. Г., Козлов В. И., Жук Я. О., Карнаухова Т. В. Термомеханічна зв'язана теорія гармонічних коливань шаруватих оболонок з фізично нелінійними непружними пасивними шарами й розподіленими п'єзоелектричними включеннями для контролю коливань // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 113–122.
13. Карнаузов В. Г., Козлов В. И., Жук Я. О., Карнаухова Т. В. Термомеханічна зв'язана теорія шаруватих оболонок з пасивними фізико-механічними шарами та розподіленими п'єзоелектричними включеннями для контролю нестационарних коливань // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 3. – С. 96–106.
14. Козлов В. И., Карнаухова Т. В. Основные соотношения вязкоупругих слоистых оболочек с распределенными пьезоэлектрическими включениями для контроля нестационарных колебаний // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 10. – С. 109–117.
15. Матвеев В. В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 264 с.
16. Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
17. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
18. Рассказов А. О., Козлов А. В. Численное исследование неосесимметричных колебаний оболочки вращения при неосесимметричном нагружении // Прикл. механика. – 1998. – **34**, № 5. – С. 68–75.
19. Bank H. T., Rosario R., Smith R. C. Reduced-order model feedback control design: Numerical implementation in a thin shell model // IEEE Trans. Autom. Contr. – 2000. – **45**, No. 7. – P. 1312–1324.
20. Bhimaraddi A., Carr A. J., Moss P. T. A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution // Comput. Struct. – 1989. – **31**, No. 3. – P. 299–308.
21. Gabbert U., Tzou H. S. Smart structures and structronic systems. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – 384 p.
22. Huang-Sying Ying, Ming-Liang Liao Partial hybrid stress element for transient analysis of thick laminated composite plates // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1990. – **29**, No. 8. – P. 1787–1796.

23. Lee C.-R. Theory and experiment for distributed sensors and actuators // Intelligent Structural Systems / Eds. H. S. Tzou and G. L. Anderson. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ, 1992. – P. 75–167.
24. Rao S. S., Sunar M. Piezoelectricity and its use in disturbance sensing and control of structure: A survey // Appl. Mech. Rev. – 1994. – **47**, No. 44. – P. 113–123.
25. Tani J., Takagi T., Qiu J. Intelligent material systems: Applications of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**, No. 8. – P. 505–521.
26. Tzou H. S. Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 400 p.
27. Tzou H. S., Bergman L. A. Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 400 p.
28. Varadan V. V., Lim Y.-H., Varadan V. K. Closed loop finite-element modelling of active-passive ping in structural vibration control // Smart Mater. Struct. – 1996. – **5**. – P. 685–694.

ДЕМПФУВАННЯ КОЛИВАНЬ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПАНЕЛЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗПОДІЛЕНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Сформульовано постановку задачі активного демпфування стаціонарних і нестаціонарних коливань тонкої в'язкопружної циліндричної панелі з використанням розподілених п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів. Розглянуто випадки програмного керування коливаннями пластини (без оберненого зв'язку) і керування коливаннями з використанням оберненого зв'язку. Наведено декілька варіантів рівнянь оберненого зв'язку, які забезпечують зміну жорсткісних, дисипативних та інерційних характеристик пластини. Основні співвідношення одержано з використанням гіпотез Кірхгофа – Лява, доповнених гіпотезами про розподіл електричних польових величин по товщині оболонки. Для прямокутної панелі з шарнірним закріпленням торців одержано аналітичний вираз для потенціалу, який демпфує кожну з мод коливань, що збуджуються гармонічним за часом поперечним навантаженням. Аналогічний вираз одержано і для різниці потенціалів сенсора при механічному збудженні панелі. Для інших типів граничних умов і геометрії пластини з цією метою використано метод скінченних елементів. На основі аналітичних і скінченно-елементних розв'язків одержано числові результати, які ілюструють ефективність активного демпфування стаціонарних і нестаціонарних коливань циліндричної панелі.

DAMPING OF VIBRATIONS OF VISCOELASTIC CYLINDRICAL PANELS BY DISTRIBUTED PIEZOELECTRIC INCLUSIONS

The problem of active damping of steady and unsteady vibrations of a thin viscoelastic cylindrical panel is studied, using the distributed piezoelectric sensors and actuators. The program control of panel oscillations without feedback control and vibration control with feedback control are considered. Different variants of equations of feedback control are presented, what changes the stiffness, dissipative and inertial characteristics of the plate. The principal equations are obtained on the basis of the mechanical Kirchoff – Love hypothesis and adequate assumptions about electrical fields. For the panel with simply supported edges the analytical expression for potential is obtained. The potential is damping every mode of vibrations, excited by transverse loading. It allows one to calculate the optimal location and dimensions of actuators. Analogous expression is obtained for the charge of sensors. For another boundary conditions and geometry of panel the method of finite elements is used to this end. On the basis of analytical and finite element solutions the numerical results are obtained for a rectangular plate with simply-supported and built-in edges. They illustrate the effectiveness of active damping steady and unsteady vibrations of panel.

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
21.02.03