УДК 539.3

Ю. В. Немировский

ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛИТ

Для слоистых круглых защемленных и шарнирно опертых пластин из идеальных жесткопластических изотропных материалов, подчиняющихся условию пластичности Треска, получено аналитическое решение задачи о динамическом деформировании при воздействии нагрузок взрывного типа. Учитывается инерция вращения, ограниченное сопротивление поперечным сдвигам и возможная неоднородность пластических свойств по толщине. Сформулирована задача об определении наиболее эффективных конструкций с точки зрения минимальной повреждаемости.

Исследование пластического деформирования однородных пластин в рамках модели жесткопластического тела при воздействии нагрузок взрывного типа было начато в работах [1, 9] и активно развивается до сих пор. Подробный анализ полученных решений приведен в обзорах [4] и монографии [3]. Сравнение получаемых в рамках пластической теории пластин остаточных прогибов с экспериментальными, выполненное в [8], показало, что опытные величины остаточных прогибов существенно ниже теоретических, составляя примерно 30–70 % от них. Такое расхождение может быть объяснено [5] неучетом влияния инерции вращения и поперечных сдвигов, которые существенно меняют механизм пластического деформирования, значительно увеличивая степень рассеяния пластической энергии, что должно приводить к сближению теоретических и экспериментальных остаточных прогибов. В последние десятилетия запросы новой техники привели к разработкам новых технологий (сварка взрывом, диффузионная сварка, холодное газодинамическое и плазменное напыление), позволяющих создавать эффективные конструктивные элементы. При этом технология сварки взрывом позволяет создавать плоские элементы из практически любых наборов металлов и сплавов [2, 6, 7]. В связи с этим возникает проблема анализа поведения и оценки эффективности работы подобных конструкций в различных условиях эксплуатации. В предлагаемой статье эта проблема будет рассмотрена с точки зрения повреждаемости при воздействии нагрузок взрывного типа.

Рассмотрим осесимметричную деформацию круглых слоистых пластин из набора различных материалов, симметрично расположенных относительно отсчетной срединной поверхности. В цилиндрической системе координат r, φ, z, связанной с отсчетной поверхностью, для всего пакета слоев примем следующие кинематические гипотезы: $u_r = z\,\bar{u}(r,t)$, $u_\varphi \equiv 0$, $u_z = \Delta(r,t)$, где u_r, u_φ, u_z – компоненты вектора перемещения, t – время. Тогда, пользуясь вариационным принципом Даламбера, получим следующие безразмерные уравнения движения:

$$\frac{1}{3}\ddot{u} = m_1' + x^{-1}(m_1 - m_2) - q\ell, \qquad \ddot{w} = q' + x^{-1}q + p \tag{1}$$

и граничные условия

$$(u - u_j^*)(m_1 n_j - m_j^*)\Big|_{x=x_j} = 0, \qquad (w - w_j^*)(q n_j - q_j^*)\Big|_{x=x_j} = 0\,, \tag{2}$$

где

$$m_i = \frac{M_i}{M_0}, \qquad q = \frac{Q}{Q_0}, \qquad p = \frac{PR}{Q_0}, \qquad \ell = \frac{Q_0 R}{M_0},$$

$$x = \frac{r}{R}, \qquad u = \frac{\bar{u}JR}{M_0 t_0^2}, \qquad w = \frac{\Delta FR}{Q_0 t_0^2}, \qquad \tau = \frac{t}{t_0},$$

$$J = 2\sum_{k=1}^{n} \rho_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \qquad F = 2\sum_{k=1}^{n} \rho_k (h_k - h_{k-1}),$$

$$M_0 = 2\sum_{k=1}^{n} \sigma_{0k} \int\limits_{h_{k-1}}^{h_k} f_k(z) z\, dz, \qquad Q_0 = 2\sum_{k=1}^{n} \tau_{0k} \int\limits_{h_{k-1}}^{h_k} f_k(z)\, dz, \tag{3}$$

M_1, M_2, Q – изгибающие моменты и перерезывающая сила; R – радиус пластинки; t_0 – характерное время; P – распределенное давление; ρ_k, σ_{0k}, τ_{0k}, $f_k(z)$ – плотности, пределы текучести при растяжении и сдвиге, функции, характеризующие неоднородные по толщине слоя пластические свойства k-го слоя пластины; h_k – координаты раздела слоев пластины; штрихом обозначена производная по безразмерной координате x, а точкой – производная по безразмерному времени τ. В пространстве обобщенных переменных m_1, m_2, q предельная поверхность текучести с достаточной степенью точности может быть аппроксимирована многогранником с гранями, описываемыми уравнениями

$$f_s = a_s m_1 + b_s m_2 + c_s q = 1, \qquad s = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Тогда закон пластического деформирования будет иметь вид

$$\dot{\ae}_i = \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial m_i}, \qquad \dot{\varepsilon}_{13} = \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial q}, \qquad i = 1, 2, \tag{5}$$

где

$$\dot{\ae}_1 = \ell^{-1}\dot{u}', \qquad \dot{\ae}_2 = \dot{u}(x\ell)^{-1}, \qquad \dot{\varepsilon}_{13} = \dot{u}(x,\tau) + \ell^{-1}\dot{w}(x,\tau).$$

Предполагая, что материалы всех слоев подчиняются условиям пластичности в виде призмы с основанием в виде шестиугольников Треска и с высотами $\tau_{0k} f_k(z)$, в пространстве также получим призму с основанием в виде шестиугольника Треска с размерами по осям m_i, равными единице, и с высотой, равной 2α. В момент $\tau = \tau_0$ имеем начальные условия

$$\dot{u}(x,\tau_0) = \dot{u}^0(x), \qquad u(x,\tau_0) = u^0(x),$$

$$\dot{w}(x,\tau_0) = \dot{w}^0(x), \qquad w(x,\tau_0) = w^0(x).$$

На окружностях пластины, разделяющих пластические режимы, соответствующие различным граням или ребрам используемой поверхности текучести, должны быть выполнены условия непрерывности

$$[\dot{u}] = [\dot{w}] = [m_1] = [q] = 0. \tag{6}$$

Для определенности далее будем рассматривать круглые защемленные пластины, нагружаемые равномерно распределенными нагрузками взрывного типа. В зависимости от структуры слоистой пластины, ее размеров и уровня действующей нагрузки пластическое деформирование может происходить в трех различных состояниях: *а*) изгиб без среза на опоре; *б*) изгиб со срезом на опоре; *в*) срез на опоре без изгиба.

В случае изгиба без среза на опоре граничные условия имеют вид

$$q(0,\tau) = 0, \qquad m_1(0,\tau) = -1, \qquad m_1(1,\tau) = 1, \qquad \dot{w}(1,\tau) = 0. \tag{7}$$

В соответствии с этим для принятого условия пластичности при изгибе пластина разбивается на три подобласти, описывающиеся равенствами и неравенствами:

1) $0 \le x \le a(\tau)$:

$$m_1(x,\tau) = m_2(x,\tau) = -1\,, \tag{8}$$

$$-\alpha \le q(x,\tau) \le \alpha, \qquad \dot{u}'(x,\tau) \le 0, \qquad \dot{u}(x,\tau) \le 0, \qquad \tau \ge \tau_0\,; \tag{9}$$

2) $a(\tau) \le x \le b(\tau)$:

$$m_2(x,\tau) = -1, \qquad \dot{\varepsilon}_{13}(x,\tau) = \dot{\text{æ}}_1(x,\tau) = 0\,, \tag{10}$$

$$-1 \le m_1(x,\tau) \le 0, \qquad \dot{u}(x,\tau) \le 0, \qquad \tau \ge \tau_0\,; \tag{11}$$

3) $b(\tau) \le x \le 1$:

$$m_1 - m_2 = 1, \qquad \dot{\varepsilon}_{13} = 0, \qquad \dot{\text{æ}}_1 + \dot{\text{æ}}_2 = 0\,, \tag{12}$$

$$0 \le m_1(x,\tau) \le 1, \qquad \dot{\text{æ}}_1(x,\tau) \ge 0, \qquad \dot{\text{æ}}_2(x,\tau) \le 0, \qquad \tau \ge \tau_0\,. \tag{13}$$

Учитывая равенства (8), (10), (12), условия непрерывности (6) и граничные условия (7), после интегрирования уравнений (1) получим решения

– *в области* $0 \le x \le a(\tau)$:

$$q(x,\tau) = C_1(\tau) I_1(\varepsilon x), \qquad \dot{u}(x,\tau) = -3\ell C_{11} I_1(\varepsilon x) + \dot{u}^0(x), \qquad \varepsilon^2 = 3\ell^2\,,$$

$$\dot{w}(x,\tau) = I(\tau) + \varepsilon C_{11} I_0(\varepsilon x) + \dot{w}^0(x)\,,$$

$$u(x,\tau) = -3\ell C_{12} I_1(\varepsilon x) + (\tau - \tau_0)\dot{u}^0(x) + u^0(x)\,,$$

$$w(x,\tau) = J(\tau) + \varepsilon C_{12} I_0(\varepsilon x) + (\tau - \tau_0)\dot{w}^0(x) + w^0(x)\,,$$

$$I(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} p(\tau)\,d\tau, \qquad J(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} I(\tau)\,d\tau, \qquad C_{11} = \int_{\tau_0}^{\tau} C_1(\tau)\,d\tau\,,$$

$$C_{12} = \int_{\tau_0}^{\tau} C_{11}(\tau)\,d\tau, \qquad I_0(y) = \frac{dI_1(y)}{dy} + y^{-1} I_1(y)\,, \tag{14}$$

$I_1(y)$ – функция Бесселя мнимого аргумента;

– *в области* $a(\tau) \le x \le b(\tau)$:

$$q(x,\tau) = (6x)^{-1}\left\{6aC_1(\tau)I_1(\varepsilon x) + (x-a)\left[3(x+a)(\dot{g} + \ell\dot{a}f - p) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \ell(x-a)(2x+a)\dot{f}\right]\right\},$$

$$m_1(x,\tau) = (12x)^{-1}\left\{2\left[(x^2 - a^2)\dot{f} + 6(x-a)a\ell C_1 I_1(a\varepsilon) - 6x\right] + \right.$$
$$\left. + \ell(x-a)^2\left[2(x+2a)(\dot{g} + \ell\dot{a}f - p) - \ell(x^2 - a^2)\dot{f}\right]\right\},$$

$$\dot{u}(x,\tau) = f(a,\tau), \qquad \dot{w}(x,\tau) = -\,\ell(x-a)f(a,\tau) + g(a,\tau)\,, \tag{15}$$

где

$$f(a,\tau) = \dot{u}(a) - 3\ell C_{11} I_1(a\varepsilon)\,,$$

$$\dot{f}(a,\tau) = \dot{a}\,\frac{\partial u^0(a)}{\partial a} - 3\ell C_1 I_1(a\varepsilon) - 3\ell\dot{a}C_{11}\left[I_0(a\varepsilon) - (a\varepsilon)^{-1} I_1(a\varepsilon)\right],$$

$$g(a,\tau) = I(\tau) + \dot{w}^0(a) + \varepsilon C_{11} I_0(a\varepsilon)\,,$$

$$\dot{g}(a,\tau) = p(\tau) + \dot{a}\,\frac{\partial \dot{w}^0(a)}{\partial a} + \varepsilon C_1 I_0(a\varepsilon) + \varepsilon^2 C_{11}\dot{a} I_1(a\varepsilon)\,;$$

− *в области* $b(\tau) \le x \le 1$:

$$q(x,\tau) = (4x)^{-1}\left\{4bq(b,\tau) + 2(x^2 - b^2)(\dot{\Phi} - p) - \right.$$

$$\left. - \ell(\dot{b}f + b\dot{f})\left[2(x^2 \ln x - b^2 \ln b) - x^2 + b^2\right]\right\},$$

$$12 m_1(x,t) = (b\&f + bf\&)\{[(2\ln b - 1)b^2 e^2 + 4]\ln(xb^{-1}) + e^2(x^2 - b^2) -$$

(16)

где

Функции определяем из системы уравнений

(17)

где

$$36 j_3 = \{e^2 b(1 - b^2) - 2\ln b[3b(2 + e^2 b^2(\ln b - 1)) -$$

Пусть в некоторый момент времени для имеем, что . Тогда из (14), (17) можно убедиться, что это возможно лишь при и

(18)

где определяется из уравнения

(19)

Можно проверить, используя эти равенства и решения (15), (16), что в этом случае для всех

Таким образом, формула (18) определяет безразмерную предельную нагрузку и рассмотренное движение происходит лишь при нагрузках, превышающих значение . При этом пластическая зона в окрестности центра существует от начала движения и до остановки. Время остановки определяется из уравнения и максимальный остаточный прогиб в центре имеет вид

. (20)

Начальные условия для , необходимые при интегрировании системы уравнений (17), выбираем из условий .

Полученное решение будет справедливо при выполнении всех неравенств (9), (11), (13). Можно проверить, что все эти неравенства, кроме , справедливы на отрезке в течение времени . В соответствии с полученным решением функция является монотонно возрастающей по . Тогда равенство определяет время возможного среза пластины на опоре в случае неубывающей нагрузки. При этом записанное решение справедливо при в интервале времени , где . Если же нагрузка от начального времени убывающая, то из соотношения

(21)

определяем зависимость пика срезывающей нагрузки от . Тогда решение будет справедливо при выполнении неравенств

.

В случае имеем, очевидно, , и тогда из (21) получим . Можно проверить, что , причем . Если пик невозрастающей нагрузки превышает значение , то движение пластинки будет происходить со срезом на опоре. Это приводит к тому, что вместо граничного условия будем иметь граничное условие . Тогда решение задачи будет описываться теми же формулами, если коэффициенты в уравнениях (17) заменить, соответственно, на коэффициенты , где

,

,

Как видно из этих выражений, коэффициенты и правые части уравнений (17) не зависят от вида нагрузки , т. е. изменение нагрузки при движении со срезом на опоре не влияет на пластическое состояние внутри пластины, а сказывается лишь на ее смещениях и скоростях. Из законов пластического течения на отрезке имеем и . Таким образом, по всей пластине . Поскольку в то же время то, очевидно, что наименьшее по модулю значение скорости прогиба достигается на опоре. Так что время прекращения движения со срезом определяем из уравнения или

.

Дальнейшее, при , движение пластины полностью описывается соотношениями для пластины, движущейся без среза, если всюду заменить на и заменить на величины , . Время окончания этой фазы движения определяется из равенства .

Возможен также случай движения жесткой пластины со срезом на опоре. При этом . Таким образом, , т. е. . Тогда из второго из уравнений движения (1) с учетом граничного условия получим . Учитывая равенство при нулевых начальных данных имеем

. (22)

Время остановки определяется из уравнения и максимальный остаточный прогиб равен . Рассматриваемое движение имеет место при , где определяется из уравнения . Условие, когда пластина на участке остается жесткой, соответствует требованию или . Отметим, что если в системе уравнений (17) с учетом указанных для пластин при движении со срезом замен коэффициентов положить , то из нее найдем . Подставляя эти значения в формулы (14)–(16) при нулевых начальных данных , получим формулы (22). Таким образом, решения изгибаемых и жестких пластин со срезом на опоре при значении сопрягаются.

Вышеизложенное решение для защемленной пластины можно легко трансформировать в решение для шарнирно опертой пластины с граничным условием , если все формулы на отрезке отбросить, а для формул на отрезке принять и положить при отсутствии среза и при движении со срезом. Кроме того, в системе (17) необходимо отбросить третье уравнение и в выражении для положить .

Полученное решение позволяет сформулировать и решить задачу о создании наиболее эффективных слоистых конструкций при воздействии нагрузок взрывного типа. Для этого необходимо подобрать материалы и толщины слоев конструкции из условия, что при сохранении общей массы конструкции будет обеспечен максимум предельной нагрузки и минимум остаточного прогиба в центре пластины: .

1. *Гопкинс Г., Прагер В.* Динамика пластической круглой пластины // Механика: Сб. пер. иностр. статей. – 1955. – № 3. – С. 112–122.
2. *Дерибас А. А.* Физика упрочнения и сварки взрывом. – Новосибирск: Наука, 1972. – 188 с.
3. *Комаров К. Л., Немировский Ю. В.* Динамика жесткопластических элементов конструкций. – Новосибирск: Наука, 1984. – 234 с.
4. *Мазалов В. Н., Немировский Ю. В.* Динамика тонкостенных пластических конструкций // Новое в зарубежной науке. Сер. Механика. Проблемы динамики упругопластических сред. – 1975. – Вып. 5. – С. 155–247.
5. *Немировский Ю. В., Сковорода А. Р.* Динамический изгиб жесткопластических защемленных круглых пластин при учете эффектов сдвига и инерции вращения // Прикл. механика и техн. физика. – 1978. – № 2. – С. 124–133.
6. *Яковлев И. В., Сиротенко Л. Д., Ханов А. М.* Сварка взрывом армированных композиционных материалов. – Новосибирск: Наука, 1991. – 119 с.
7. *Fleck J., Laber A., Leonard R.* Explosive welding of composite materials // J. Compos. Mater. – 1969. – **3,** No. 4. – P. 669–701.
8. *Florence A. L.* Circular plate under a uniformly distributed impulse // Int. J. Solids and Struct. – 1966. – **2,** No. 1. – P. 37–47.
9. *Wang A. J.* The permanent deflection of a plastic plate under blast loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1955. – **22,** No. 3. – P. 375–376.

ДИНАМІЧНИЙ ЗГИН ШАРУВАТИХ ПЛАСТИЧНИХ ПЛИТ

Для шаруватих круглих защемлених і шарнірно опертих пластин з ідеальних жорсткопластичних ізотропних матеріалів, які задовольняють умову пластичності Треска, отримано аналітичний розв'язок задачі про динамічне деформування при дії навантажень типу вибуху. Враховується інерція обертання, обмежений опір поперечним зсувам і можлива неоднорідність пластичних властивостей за товщиною. Сформульовано задачу про визначення найбільш ефективних конструкцій з точки зору мінімальної пошкоджуваності.

DYNAMIC BENDING OF LAYER PLASTIC PLATES

For the layer circular fixed and hinge-supported plates of ideal rigid-plastic isotropic materials, obeying to the Tresca plasticity condition, the analytic solution to the problem on dynamic strain under explosion-type loading, is obtained. The rotation inertia, limited resistance to transverse shear and possible inhomogeneity of plastic properties across the thickness are considered. The problem on determination of the most efficient structures from the point of view of minimal damageability is formulated.

Ин-т теорет. и прикл. механики
СО РАН, Новосибирск

Получено
20.01.03